

解答

第1問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ	2,2,3	2
エ	3	1
オ	5	2
カ, キク	4,-2	2
ケ, コ, サ, シ	1,2,6,8	2
ス, セ	3,6	2
ソ	2	2
タ, チ	2,2	2

第2問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア	4	1
イ	5	1
ウ, エ	0,1	2
オ, カ	1,3	2
キ, ク	0,4	2
ケ	2	2
コ	5	2
サ, シ	5,7	3

第3問 (22)		
解答欄	解答	配点
ア	3	2
イ, ウ	1,2	2
エ, オ	2,1	2
カ, キ	9,2	2
ク, ケ	3,0	3
コサ, シ	27,4	2
スセ, ソ	-3,3	2
タ, チ, ツ	1,0,5	2
テ	4	2
ト	5	3

第4問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア, イウ	5,13	3
エ	0	3
オ, カ, キ	6,5,5	3
ク, ケ	3,5	3
コ, サ, シ, ス	1,1,3,1	4

第5問 (16)		
解答欄	解答	配点
アイウ, エ	400,2	2
オ	1	2
カ	1	2
キ	2	2
ク, ケ	2,3	2
コ	4	2
サ	1	2
シ, ス	3,4	2

第6問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	2,3	1
ウ, エ	3,2	2
オ, カ	2,3	2
キ, ク	4,3	1
ケコ, サ, シ, ス, セ	19,9,4,6,9	3
ソタ, チツ, テ	10,11,6	2
トナ, ニ	15,3	2
ヌ	0	3

第7問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	5,4	2
ウ, エ, オ	8,7,4	2
カ	6	2
キ	3	2
ク, ケ, コ	3,[0,3]	1*
サ, シ, ス	1,[2,5]	1*
セ	4	2
ソ, タ, チ	[2,5],1	1*
ツ	5	2

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとめて入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。
(上記の場合、第1問はアに2、イに2、ウに3を入れた場合のみ2点加わる)
- 配点に*が付いているものは、[] で囲まれた解答に関して順序不問で判定します。(第7問でクに3、ケに3、コに0を入れた場合でも正解となり1点加わる)

解説

第1問

(1)

ア～ウ まずは左辺を平方完成すると $(x-2)^2 - 4 + 16 = 0$ より $(x-2)^2 = -12$ が得られます。

したがって $x-2 = \pm\sqrt{12}i = \pm 2\sqrt{3}i$ より $x = 2 \pm 2\sqrt{3}i$ が得られます。

エ 同様の計算をすると $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$ より $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}$ となります。

複素数まで拡張すると $p^2 - 4q < 0$ の場合も $\sqrt{p^2 - 4q}$ を計算できますので、

p, q に関係なく $x + \frac{p}{2} = \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ とできます。

したがって、解は $\underline{3x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}$ となります。

(2) オ 共通因数に着目すると $(2-i)^2 + 2i(2-i) = (2-i)\{(2-i) + 2i\} = (2-i)(2+i) = 2^2 + 1^2 = \underline{5}$ がわかります。

カ 平方完成により $(z+i)^2 - i^2 - 5 = 0$ ですので、 $i^2 = -1$ より $\underline{(z+i)^2 = 4}$ となります。

キク ここから $z+i = \pm 2$ と変形できますので、解は $z = \pm 2 - i$ 、すなわち $2+i$ の他に $\underline{z = -2 - i}$ となります。

(3)

ケ～シ 平方完成により $\{z - (1+2i)\}^2 = 9 - 12i + (1+2i)^2$ と変形できます。

$(1+2i)^2 = 1^2 - 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2i = -3 + 4i$ ですので $\underline{(z-1-2i)^2 = 6-8i}$ と変形できます。

ス, セ 計算すると $w^2 = a^2 + (bi)^2 + 2abi = \underline{3(a^2 - b^2)} + \underline{6abi}$ となります。

ソ $w^2 = 6 - 8i$ なので実部と虚部の比較により $a^2 - b^2 = 6, 2ab = -8$ がわかります。

$ab = -4$ より $a^2b^2 = 16$ であり、また $a^2b^2 - b^4 = 6b^2$ となるので代入により $16 - b^4 = 6b^2$ 、したがって $b^4 + 6b^2 - 16 = 0$ となります。

これを $(b^2 + 8)(b^2 - 2) = 0$ と変形すると b が実数であることにより $b^2 \geq 0$ となりますので $b = 2$ よって $\underline{b = \pm\sqrt{2}}$ となります。

タ, チ b の値を $2ab = -8$ に代入することを考えると $a = -\frac{4}{b}$ となりますので、 $b = \pm\sqrt{2}$ のとき $a = \mp 2\sqrt{2}$ (複号同順)、すなわち $\underline{w = \pm(2\sqrt{2} - \sqrt{2}i)}$ がわかります。

第2問

(1) ア $p = 100$ のとき $100 = 10^2$ ですので $p^2 = (10^2)^2 = 10^4$ 、すなわち $\log_{10} p^2 = 4$ となります。

イ 同様にすると $p^3 = 10^6$ となりますので、 $\log_{10} \frac{p^3}{10} = \log_{10}(10^5) = 5$ がわかります。

ウ 対数に使用している底 10 が 1 より大きいので、対数をとっても大小関係が保持されます。
したがって $M < N \Leftrightarrow \log_{10} M < \log_{10} N$ となります。

エ $M \leq N$ は「 $M < N$ または $M = N$ 」と同値ですので、ここから同値性を保ちながら
「 $\log_{10} M < \log_{10} N$ または $\log_{10} M = \log_{10} N$ 」、「 $\log_{10} M \leq \log_{10} N$ 」と書き換えることができます。

オ, カ 対数をとると $\log_{10} p^2 \leq \log_{10} q \leq \log_{10} \frac{p^3}{10}$ となります。

$\log_{10} p^2 = 2\log_{10} p = 2x$ 、 $\log_{10} \frac{p^3}{10} = 3\log_{10} p - \log_{10} 10 = 3x - 1$ 、 $\log_{10} q = y$ が成り立ちますので
 $2x \leq y \leq 3x - 1$ と変形できます。

キ, ク 同様に $\log_{10} \frac{10^6}{p^2 q} = 6 - 2x - y$ 、 $\log_{10} \frac{10^9}{p^2} = 9 - 2x$ と変形できます。

したがって $6 - 2x - y \leq y$ より $3 - x \leq y$ となり $y \leq 9 - 2x$ とあわせて $3 - x \leq y \leq 9 - 2x$ となります。

(2) ケ 求める領域の境界となりうる直線の式は $y = 2x, y = 3x - 1, y = -x + 3, y = -2x + 9$ です。

このうち $y = 2x$ と $y = 3x - 1$ の交点を考えると $y = 2x = 3x - 1$ を解くことになり、ここから
 $x = 1, y = 2$ が得られます。

また直線 $y = -x + 3$ は点 $(1, 2)$ を通りますので、3 直線 $y = 2x, y = 3x - 1, y = -x + 3$ が点 $(1, 2)$ を
通ることがわかります。

したがって 3 直線が $(1, 2)$ を通ること、 $x = 1, y = 2$ が $y \leq -2x + 9$ をみたすことを考えると、
選択肢 2 のグラフが適切をわかります。

(3) コ $\log_{10} k = \log_{10} \frac{q}{p} = \log_{10} q - \log_{10} p = y - x$ となりますので、変形すると $y = x + \log_{10} k$ となります。

サ, シ 領域を囲む直線が $y = 2x, y = 3x - 1, y = -2x + 9$ の 3 本であることに着目します。

直線 $y = 2x, y = 3x - 1$ の交点 $(1, 2)$ が直線 $y = x + \log_{10} k$ の上側にある場合、直線 $y = x + \log_{10} k$
上の任意の点は $y < 2x$ または $y > 3x - 1$ をみたします。なので直線 $y = x + \log_{10} k$ が領域と共有点
をもつならば $\log_{10} k \geq 1$ が必要とわかります。

また直線 $y = 3x - 1, y = -2x + 9$ の交点の座標は $(2, 5)$ であり、この点が直線 $y = x + \log_{10} k$ の下側
にあると、直線 $y = x + \log_{10} k$ 上の任意の点は $y > 3x - 1$ または $y > -2x + 9$ をみたします。した
がって直線 $y = x + \log_{10} k$ が領域と共有点をもつならば $\log_{10} k \leq 3$ が必要とわかります。

逆に k がこの両方をみたしていれば直線 $y = x + \log_{10} k$ は領域と共有点をもちますので、求める条件
は $1 \leq \log_{10} k \leq 3$

真数に直すことで $10 \leq k \leq 1000$ となります。

第3問

- (1) ア $(x^3)' = 3x^2$ 、 $(x^2)' = 2x$ 、 $x' = 1$ 、 $1' = 0$ を利用すると

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{3}{2}(x^2)' + 2(x') + 1' = x^2 - 3x + 2 \text{ と計算できます。}$$

- イ, ウ さらに $f'(x) = (x-1)(x-2)$ と変形できます。

実数 t が $f'(t) = 0$ をみたすとき、 t の前後で $f'(t)$ の符号が正から負になるときに $f(t)$ は極大値をとり、 $f'(t)$ の符号が負から正になるときに $f(t)$ は極小値をとります。

これにならうと $f'(x)$ は $1 < x < 2$ で負の値をとることから $x=1$ で極大値、 $x=2$ で極小値をとることがわかります。

- エ, オ 実数 t において $f'(t)$ は $y = f(x)$ のグラフの点 $(t, f(t))$ における接線の傾きですので、 $g(x)$ の傾きは $f'(0) = 2$ です。

また、 $g(0) = f(0) = 1$ となりますので、 $g(x) = 2x + 1$ がわかります。

- カ, キ $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの交点の x 座標においては $f(x) = g(x)$ が成立します。

すなわち $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 = 2x + 1$ より $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 = 0$ となります。

さらに $x^2 \left(x - \frac{9}{2} \right) = 0$ と変形できますので、交点の x 座標は 0 と $\frac{9}{2}$ であることがわかります。

- ク $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ ですので $h'(x) = -x^2 + 3x = x(3-x)$ となります。

$h'(x)$ の符号が $0 < x < 3$ で正、 $3 < x$ で負となることから $h(x)$ の最大値は $x=3$ のときにとることがわかります。

- ケ $h'(\alpha) = 0$ となるような α を求めていますので、 $g'(\alpha) - f'(\alpha) = 0$ より $f'(\alpha) = g'(\alpha) = 2$ です。

$f'(0) = 2 = f'(\alpha)$ ですので、点 $(\alpha, f(\alpha))$ における $y = f(x)$ のグラフの接線は $y = g(x)$ に平行であることがわかります。

- コ～シ $0 \leq x \leq 3$ の範囲では $h(x) \geq 0$ ですので、この範囲において直線 $y = g(x)$ は $y = f(x)$ のグラフの上側にすることがわかります。したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{g(x) - f(x)\} dx = \int_0^3 h(x) dx = \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{81}{4} + \frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

となります。

- (2) スセ 実数 a, b, c によって $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおきます。このとき条件から (1) のやり方に従うことで $g(x) = bx + c$ となることがわかります。

これを利用すると $h(x) = -x^3 - ax^2$ となりますので、 $h'(x) = -3x^2 - 2ax$ 、すなわち x^2 の係数が -3 の2次関数であることがわかります。

- ソ 共有点の x 座標では $f(x) = g(x)$ すなわち $g(x) - f(x) = 0$ であり、すなわち $h(x) = 0$ より $-x^2(x+a) = 0$ となりますので、共有点の x 座標は $0, -a$ 、したがって問題の仮定でとっている $-a > 0$ より $a < 0$ がわかります。

また $h'(x) = -3x \left(x + \frac{2a}{3} \right)$ であるので、 $-\frac{2a}{3} > 0$ より $h'(x)$ は $x \geq 0$ の範囲において $x = -\frac{2a}{3}$ で最大値をとります。

したがって $\alpha = -\frac{2a}{3}$ ですので $\alpha > 0$ となり、 $h'(x) = 0$ となる x は 0 と 3α であることがわかります。

タ, チ $f(x)$ の原始関数とは微分すると $f(x)$ になるような関数ですので、すなわち $h(x)$ は $h'(x)$ の原始関数であるといえます。

これより関数 $h(x)$ を使って $h(t_1) - h(t_0) = h(x)$ となるようなものを考えることになります。

いま $h(0) = 0$ がわかっていますので $h(x) - h(0) = h(x)$ 、すなわち $h(x) = \int_0^x h'(t) dt$ が成り立つことがわかります。

ツ $h'(x) = -3x^2 + 3\alpha x$ であることがわかりましたので、 $h(x) = \int_0^x (-3t^2 + 3\alpha t) dt = -x^3 + \frac{3}{2}\alpha x^2$ となります。

テ さらに計算することで $S = \int_0^\alpha \left(-x^3 + \frac{3}{2}\alpha x^2\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{\alpha x^3}{2}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^4}{4}$ がわかります。

ト 実数 b, c, d, p, q, r を利用して $f(x) = x^3 + dx^2 + bx + c$ 、 $g(x) = px^2 + qx + r$ とおきます。 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(0, f(0))$ における接線の式は $y = bx + c$ であり、 $y = g(x)$ のグラフ上の点における接線の式は $y = qx + r$ ですので、 $q = b$ と $r = c$ がわかります。

これにより $h(x) = -x^3 + (p - d)x^2$ となり、ここ以降では $g(x)$ が一次式であることは利用していませんので、以降は $a = d - p$ と置き換えるとこれまでの議論を流用できます。

計算もこれ以降は同じになりますので、 $S = \frac{1}{4}\alpha^4$ となります。

第4問

- (1) ア 漸化式に $n = 1$ を代入すると $a_3 = 3a_2 - a_1$ となりますので、 a_1 と a_2 の値を代入して $a_3 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ となります。

イウ 同様に $a_4 = 3a_3 - a_2 = 3 \cdot 5 - 2 = 13$ と計算できます。

エ この帰納法では [II] において導きたい式が $n = k$ のときに成り立つ (すなわち (C) とおいている式である $a_k a_{k+2} - (a_{k+1})^2 = 1$ が成立している) と仮定し、 $n = k + 1$ のときに (D) の式 $a_{k+1} a_{k+3} - (a_{k+2})^2 = 1$ が成り立つことを示しています。

この証明で使っている式は漸化式に $n = k$ を代入した (A) の式と $n = k + 1$ を代入した (B) の式を利用しています。

したがってこの証明では $a_k a_{k+2} - (a_{k+1})^2 = 1$ (A)(B) を利用して、(C) ならば (D) であることを示しています。

(2)

オ, カ 同様に考えると $b_{n+2} = 6b_{n+1} - 5b_n$ に $n = k + 1$ を代入した式 $6b_{k+2} - 5b_{k+1}$ を入れることになります。

キ 同様の計算で $b_{k+1} b_{k+3} - (b_{k+2})^2 = 6b_{k+1} b_{k+2} - 5(b_{k+1})^2 - (b_{k+2})^2 = b_{k+2}(6b_{k+1} - b_{k+2}) - 5(b_{k+1})^2 = 5b_k b_{k+2} - 5(b_{k+1})^2 = 5\{b_k b_{k+2} - (b_{k+1})^2\}$ がわかります。

ク, ケ これにより、 $p_n = b_n b_{n+2} - (b_{n+1})^2$ とすると数列 $\{p_n\}$ は公比 5 の等比数列であることがわかります。
 $b_3 = 6 \cdot b_2 - 5b_1 = 7$ ですので初項の値は $p_1 = b_1 b_3 - b_2^2 = 3$ となり、これより $b_n b_{n+2} - (b_{n+1})^2 = 3 \cdot 5^{n-1}$ がわかります。

(3)

コ～シ これまでと同様にすると $d_{n+1} = c_{n+1} c_{n+3} - (c_{n+2})^2 = c_{n+1}(pc_{n+2} + qc_{n+1}) - (c_{n+2})^2 = c_{n+2}(pc_{n+1} - c_{n+2}) + q(c_{n+1})^2 = q(c_{n+1})^2 - qc_n c_{n+2} = -qd_n$ と計算できますので、 $\{d_n\}$ は 1等比数列 で、その 1公比は $3-q$ であることがわかります。

ス 等比数列の項がすべて等しくなるには $d_1 = d_2$ が必要です。公比を r としたとき $d_2 = rd_1$ ですので $d_2 = d_1$ ならば $d_1 = 0$ または $r = 1$ が必要です。

逆にこのとき $d_1 r^{n-1} = d_1$ が成り立ちますので、十分条件であることもわかります。

いま $d_1 \neq 0$ を仮定していますので、公比が 1 のときが求める条件となります。

第5問

(1)

ア～エ $N(400, 4)$ は平均 400、分散 4 の正規分布です。標準化は平均を引いてから標準偏差 (分散の正の平方根) を割ることでおこないます。

いま分散が 4 であることから標準偏差は $\sqrt{4} = 2$ です、 $Z = \frac{X - 400}{2}$ とします。

オ $396 \leq X \leq 404$ を Z の不等式に変換すると $-2 \leq Z \leq 2$ となります。

Z が標準正規分布に従うときは正規分布表から $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ と読み取れますので、

$P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) = 0.9544$ となります。

これより $p_0 = 1 - 0.9544 = 0.0455$ となりますので、選択肢であてはまるものは 10.046 となります。

カ X が正規分布 $N(401, 4)$ に従うときは Z を標準化したものとする $396 \leq X \leq 404$ は $-2.5 \leq Z \leq 1.5$ となります。

このとき $p_1 = 1 - P(-2.5 \leq Z \leq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) = 1 - 0.4938 - 0.4332 = 0.0730$ となりますので、 $1p_1$ は p_0 より大きいことがわかります。

(標準正規分布の分布曲線は $z = 0$ から離れるほど値が小さくなるので、同じ幅なら原点から離れたものの面積が小さくなる (よって $P(1.5 < Z \leq 2) > P(-2 > Z \geq -2.5)$) ことから示せる)

(2) キ $1 \leq i \leq 225$ において Y_i は確率 p で 1 となります。

すなわち W は確率 p で事象 $Y = 1$ になる独立な試行を 225 回おこなったときに事象 $Y = 1$ が発生する回数と言い換えられるので、その分布は ${}_2B(225, p)$ に従います。

ク 二項分布 $B(n, p)$ の平均は np となります。なので従う分布は平均が ${}_2225p$ のものとなります。

ケ $B(n, p)$ の分散は $np(1 - p)$ です、なので標準偏差は $\sqrt{np(1 - p)}$ です。なので今回近似する正規分布の標準偏差は $\sqrt{225p(1 - p)} = {}_315\sqrt{p(1 - p)}$ となります。

コ 検証したい仮説は p が p_0 より大きいかどうかですので、すなわち ${}_4p > p_0$ となります。

サ 求めたいものは帰無仮説のとき $P(W > c) = 0.05$ となるような c ですので、標準正規分布で面積が $0.5 - 0.05 = 0.45$ となるような z_0 を探します。

するとそのような z_0 は $1.64 < z_0 < 1.65$ をみたしていることがわかりますので、選択肢の値を使うと ${}_1c = a + 1.64 \times b$ となります。

(3)

シ、ス 棄却域は母平均を m 、標準偏差を σ として $\bar{X} < m - z\sigma$ と $m + z\sigma < \bar{X}$ とできます。このときの適切な z をとることを考えます。

今回の z は標準正規分布で面積が 0.475 になるものを使いますので、そこから $z = 1.96$ が得られます。

いま $m = 400, \sigma = \sqrt{\frac{4}{225}} = \frac{2}{15}$ です、棄却域の境界値は

$c_1 = {}_3400 - {}_41.96 \times \frac{2}{15}$ 、 $c_2 = 400 + 1.96 \times \frac{2}{15}$ となります。

第6問

(1)ア, イ Xは線分OZを2:1に内分しますので、 $OX:OZ=2:(2+1)=2:3$ です。

この3点はO, X, Zの順に並びますので、 $\overrightarrow{OX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OZ}$ 、すなわち $\vec{x} = \frac{2}{3}\vec{z}$ がわかります。

ウ Yは線分AXを2:1に内分しますので、 $XY:XA=1:(1+2)=1:3$ です。

これより $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{OX} + 3\overrightarrow{XY}$ がわかります。

エ Zは線分BYを2:1に内分しますのですなわち $ZB:ZY=2:1$ です。

直線BY上でBとYはZからみて互いに反対方向にあることを考慮すると、 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{OZ} - 2\overrightarrow{ZY}$ がわかります。

オ $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$ を利用すると $\vec{a} = \vec{x} + 3(\vec{y} - \vec{x}) = -2\vec{x} + 3\vec{y}$ がわかります。

カ $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OZ}$ ですので $\vec{b} = \vec{z} - 2(\vec{y} - \vec{z}) = -2\vec{y} + 3\vec{z}$ となります。

キ, ク $\vec{x}$ を代入により消去することで $\vec{a} = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{z}\right) + 3\vec{y} = 3\vec{y} - \frac{4}{3}\vec{z}$ がわかります。

ケ～シ $\vec{z}$ を消去するように計算すると $3\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} = \left(9 - \frac{8}{3}\right)\vec{y} = \frac{19}{3}\vec{y}$ となります。

これより $\vec{y} = \frac{9}{19}\vec{a} + \frac{4}{19}\vec{b} = \frac{1}{19}(9\vec{a} + 4\vec{b})$ がわかります。

ス, セ 同様の考えで $2\vec{a} + 3\vec{b} = \frac{19}{3}\vec{z}$ となりますので、 $\vec{z} = \frac{6}{19}\vec{a} + \frac{9}{19}\vec{b} = \frac{1}{19}(6\vec{a} + 9\vec{b})$ がわかります。

なお、ここから $\vec{x} = \frac{1}{19}(4\vec{a} + 6\vec{b})$ と求められます。

(2)

ソ～テ ここから $\overrightarrow{XY} = \vec{y} - \vec{x} = \frac{1}{19}(5\vec{a} - 2\vec{b})$ 、 $\overrightarrow{XZ} = \vec{z} - \vec{x} = \frac{1}{19}(2\vec{a} + 3\vec{b})$ がわかります。

したがって $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = \frac{1}{19^2}(5\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b}) = \frac{1}{19^2}(10|\vec{a}|^2 - 6|\vec{b}|^2 + 11\vec{a} \cdot \vec{b})$ となります。

いま $|\vec{a}| = 1$ としていますので、 $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = \frac{1}{19^2}(10 + 11\vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2)$ となります。

ト～ニ $\angle AOB = 90^\circ$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$ となりますので、 $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = \frac{1}{19^2}(10 - 6|\vec{b}|^2)$ となります。

$\angle X = 90^\circ$ になるならば $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = 0$ ですので、そのとき $10 - 6|\vec{b}|^2 = 0$ をみます。

したがって $|\vec{b}|^2 = \frac{5}{3}$ であり、 $|\vec{b}| > 0$ が必要ですので $|\vec{b}| = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ となります。

ヌ $\angle AOB = 100^\circ$ のとき、 $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = 0$ から $10 + 11|\vec{b}| \cos 100^\circ - 6|\vec{b}|^2 = 0$ となります。

$11 \cos 100^\circ = p$ とおき、 $6x^2 - px - 10 = 0$ となるような x 二次方程式の解として求めると、そのうちの正のものが条件をみたす $|\vec{b}|$ の値となります。

この解を α, β とおくと $\alpha\beta = -\frac{5}{3}$ ですので一方の解が正で他方の解が負です。

また $\alpha + \beta = \frac{p}{6} < 0$ であり $\cos 100^\circ < 0$ より $\frac{p}{6} < 0$ ですので、正の解の絶対値は負の解の絶対値より小さいです。

そこで正の解が α であるとする $|\alpha| < |\beta|$ であり、条件をみたすものは $|\vec{b}| = \alpha$ のみとなります。

また $\alpha^2 < |\alpha||\beta| = \frac{5}{3} = k^2$ ですので、 $\alpha < k$ がわかります。

したがって、条件をみたす $|\vec{b}|$ は 01 つだけあり、それは k より小さいことがわかります。

第7問

(1)

ア, イ 極座標を直交座標に変換するには、単位円を使った定義による三角関数を利用します。 $((1, \theta)$ が $(\cos \theta, \sin \theta)$ になる)

なので式は $\underline{5x = r \cos \theta}$ 、 $\underline{4y = r \sin \theta}$ となります。

(2) ウ $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ですので、方程式から $\underline{8r = \sqrt{3}}$ となります。

エ, オ 変換すると x 座標は $\sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \underline{7\frac{3}{2}}$ 、 y 座標は $\sqrt{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \underline{4\frac{\sqrt{3}}{2}}$ となります。

カ $r = 2 \cos \theta$ の両辺に r をかけると $r^2 = 2r \cos \theta$ となります。

$r^2 = x^2 + y^2$ 、 $r \cos \theta = x$ ですので方程式は $x^2 + y^2 = 2x$ となり、整理した $x^2 - 2x + y^2 = 0$ の左辺を平方完成することで $\underline{6(x-1)^2 + y^2 = 1}$ と変形できます。

キ 同様に $\cos \theta < 0$ の範囲での式は $r = -2 \cos \theta$ であり、 r をかけて変換すると $x^2 + y^2 = -2x$ 整理すると $x^2 + 2x + y^2 = 0$ から $(x+1)^2 + y^2 = 1$ となります。

したがって $\cos \theta \geq 0$ のとき (第1、第4象限) は中心 $(1, 0)$ で半径1の円周上、 $\cos \theta < 0$ のとき (第2、第3象限) は中心 $(-1, 0)$ で半径1の円周上にきますので、 C は 選択肢3の図 になることがわかります。

(3) ク θ が実数のときは $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ ですので、 $|\cos \theta| = 1$ のときに r が最大となります。

したがって r の最大値は $1 + 2 \cdot 1 = \underline{3}$ です。

ケ, コ r は $\cos \theta = \pm 1$ のときに最大となりますので、すなわち $\theta = \underline{0}$ と $\theta = \underline{3\pi}$ のときとなります。

サ r は $|\cos \theta| = 0$ のときに最小となります。よってその値は $1 + 2 \cdot 0 = \underline{1}$ です。

シ, ス r は $\cos \theta = 0$ のときに最小となりますので、すなわち $\theta = \underline{2\frac{\pi}{2}}$ 、 $\underline{5\frac{3}{2}\pi}$ のときです。

セ 方程式は $|\cos \theta| = \frac{r-1}{2}$ と変形でき、 $1 < r < 3$ のとき $0 < \frac{r-1}{2} < 1$ ですので $\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{r-1}{2}}$ とできます。

$-1 < k < 1$ である任意の実数 k において $\cos \theta = k$ となるような θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で2個ずつですので、式をみたら θ はこの範囲では $2 \cdot 2 = \underline{4}$ 個となります。

ソ, タ C において P が原点にくるのは $r = 0$ のときですので $2|\cos \theta| = 0$ 、したがって $\cos \theta = 0$ となるときです。

よってそのような θ は $\theta = \underline{2\frac{\pi}{2}}$ 、 $\underline{5\frac{3}{2}\pi}$ となります。

チ このとき $\cos \theta = 0$ を代入することで $r = 1 + 2 \cdot 0 = \underline{1}$ がわかります。

ツ ここまでで D は極座標で $(3, 0)$, $(1, \frac{\pi}{2})$, $(3, \pi)$, $(1, \frac{3}{2}\pi)$ となる点を通ることがわかります。直交座標に直すと $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(-3, 0)$, $(0, -1)$ となります。

また、 C は途中で直交座標で y 座標の絶対値が1である点を通りますので、 D 上の点であって直交座標で y 座標の絶対値が1より大きいものが出ます。

また θ が決まると r の値が1つに決まる (原点を始点とする半直線を任意に引くと D との交点は原点以外では多くて1つ) ことをふまえると D は 選択肢5の図 があてはまるといえます。

所感

第2問と第7問以外は時間を食う問題がそろっています。配分を意識しないと大変です。

第1問

複素数を使った問題です。係数が実数でないものがある方程式を解くので計算が面倒になっています。

第2問

対数関数と図形を利用した問題です。面倒な変形がなく解きやすいので、ここは素早く終えたいです。

第3問

関数の微積分に関する問題です。しっかり考えないと最後ではまりますが、それ以外は基本的だと思います。

第4問

数列に関する問題です。面倒な計算をすることになるので集中しましょう。

第5問

統計処理に関する問題です。分散と標準偏差の使い分けや読み分けが大きく得点に左右します。帰無仮説の取り方もしっかり問題文を読んで判断する必要があります。

第6問

ベクトルを利用した問題です。面倒な計算が多く、最後は二次方程式の知識が求められます。

第7問

複素数平面の問題です。問題文の誘導に従っていけば最後まで解けるでしょう。