

解答

第1問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ, エ	3,1,2,1	3
オ	3	3
カ, キ, ク	2,0,2	2
ケ, コ	3,2	2
サ, シ	2,0	2
ス, セ	5,7	2*
ソ	9	2
タ, チ	1,5	2*
ツ, テ	5,4	2

第2問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	3	2
イ, ウ, エ	6,4,4	2
オ	3	2@
カ, キ	1,0	2#
ク, ケ, コ, サ	3, 17,6	2
シ, ス	7,9	3
セ, ソ, タ	4,2,9	2
チツ, テ	10,2	2
ト, ナ	1,0	2
ニ	7	2
ヌ	6	2
ネ	4	3
ノ, ハ	4,6	4

第3問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	1	2
イ, ウ	2,3	2
エ, オ, カ, キ	0,0,2,1	3
ク, ケ, コ, サ	3,2,5,2	2
シ	3	2
ス	6	2
セ, ソ	1,2	2
タチ, ツテト	-2,360	2
ナ	5	2
ニヌ, ネ	90,3	3
ノ	6	2
ハ, ヒ	4,4	3
フヘ	80	3

第4問 (20)		
解答欄	解答	配点
アイ, ウ	15,1	3
エ, オ	4,3	2
カ, キク	1,17	2
ケ	4	2
コ	5	3
サ	2	2
シ	6	3
ス, セ	0,2	3

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとまって入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。
(上記の場合、第1問はアに3、イに1、ウに2、エに1を入れた場合のみ3点が加わる)
- 配点に*が付いているものは順序不問で判定します。(第1問でスに7、セに5を入れた場合でも正解となり2点が加わる)
- 配点に#のついたものを得点するためには、配点欄に@が付いている問題を正解していることが必要です。
(第2問でオに4、カに1、キに0を入れた場合、オが誤答となるためカ、キの得点も入らない)

解説

第1問

[1]

(1)

ア～ウ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を利用して根号を消去できます。これを利用すると

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ と変形できます。}$$

エ $2^2 = 4$ なので $1 < \sqrt{3} < 2$ です。したがって $\frac{1+1}{2} < \frac{\sqrt{3}+1}{1} < \frac{2+1}{2}$ より $1 < \frac{1}{\sqrt{3}-1} < \frac{3}{2} < 2$ がわかるので、 $a=1$ が得られます。

(2) オ 同様の変形をすると $\frac{1}{\sqrt{k^2+1}-k} = \frac{\sqrt{k^2+1}+k}{(k^2+1)-k^2} = \sqrt{k^2+1}+k$ となります。

$(k+1)^2 - (k^2+1) = 2k > 0$ より $k^2 < k^2+1 < (k+1)^2$ がわかりますので、すなわち $k < \sqrt{k^2+1} < k+1$ です。

これより $2k < \frac{1}{\sqrt{k^2+1}-k} < 2k+1$ となりますので、 $3a=2k$ がわかります。

(3) カ 整数部分の定義から $a \leq \frac{1}{\sqrt{n}-k}$ ですので、 $\frac{1}{\sqrt{n}-k} \geq k$ が必要とわかります。

また $\frac{1}{\sqrt{n}-k} \geq k$ であるならば k は整数であることから整数部分は k 以上の値をとることがわかります。

よって $2\frac{1}{\sqrt{n}-k} \geq k$ であることが必要十分となります。

キ この両辺はどちらも正、すなわち同符号ですので逆数をとると不等号が反転します。

すなわち $0\sqrt{n}-k \leq \frac{1}{k}$ となります。

ク 両辺に k を加えると $\sqrt{n} \leq k + \frac{1}{k}$ となります。この両辺はどちらも正ですので二乗しても不等号が保持されます。

したがって $n \leq \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = k^2 + 2 + \frac{1}{k^2}$ と変形できますので、 $m=2$ がわかります。

ケ 仮定の $n > k^2$ から $k^2 < n \leq k^2 + \frac{1}{k^2} + 2$ となります。

$k=1$ のときは $1 < n \leq 4$ と変形できますので、 $k=1$ のときは $a \geq k$ となる n は 2, 3, 4 の3個であることがわかります。

コ k が2以上のときは $0 < \frac{1}{k^2} < 1$ ですので $a \geq k$ となる n は k^2+1, k^2+2 の 2個であることがわかります。

[2]

- (1) サ 集合 S, T に対して $S \cap T$ は S と T の両方に属する集合を表します。(少なくとも一方に属する集合は $S \cup T$)

$\bar{A}$ は U のうち A に属さない要素の集合のことですので、 $\bar{A} \cap B$ は A に属さず B に属する要素の集合となり、図では選択肢 2が該当します。

シ $\bar{A} \cap \bar{B}$ は A にも B にも属さない要素の集合ですので、選択肢 0の図が該当します。

- (2) ス, セ U の要素は A の要素であるかないか、また B の要素であるかないかに分けられますので、 $A \cap B$ と $\bar{A} \cap B$ の和集合は B に一致し、また $\bar{A} \cap B$ と $\bar{A} \cap \bar{B}$ の和集合は $\bar{A}$ に一致します。

したがって $\bar{A} = \{1, 4, 6, 8, 9\}$ 、 $B = \{1, 2, 3, 8\}$ となりますので、 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 、 $\bar{B} = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ となり、 $A \cap \bar{B} = \{5, 7\}$ がわかります。

($A \cap B$ と $\bar{A} \cap B$ と $\bar{A} \cap \bar{B}$ と $A \cap \bar{B}$ の 4 つの和集合が U に一致することからも導ける)

ソ $C \cap \bar{D}$ は C に含まれますので、まず 9 が C の要素であることが必要です。したがって $a + b = 9$ であることが必要となります。

タ, チ $C \cap D$ は C に属するが $C \cap \bar{D}$ に属さない要素の集合と言い換えられます。

$C = \{1, 5, 7, 9\}$ と $C \cap \bar{D} = \{7, 9\}$ より $C \cap D = \{1, 5\}$ がわかります。

ツ, テ 5 は D の要素になっていますので、あとは 1 が D の要素になるように a, b を考えます。

$a - b = 1$ と仮定すると $a + b = 9$ と $a - b = 1$ より $a = 5, b = 4$ が得られ、条件をみたすことがわかります。

$b = 1$ と仮定すると $a + b = 9$ より $a = 8$ となりますが、このとき $D = \{1, 5, 7, 8\}$ となり $C \cap D = \{1, 5, 7\}$ となってしまうので条件を満たしません。

したがって $a = 5, b = 4$ であることがわかります。

第2問

[1]

- (1) ア 三角形 OPQ と APQ は $OP = AP$ 、 $OQ = AQ$ で辺 PQ を共有していますので合同であることがわかります。

したがって四角形 OPAQ の面積は三角形 OPQ の面積の 2 倍となり、すなわち $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ$ と表せます。

代入すると $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \angle POQ = 2 \sin \angle POQ$ となります。

- (2) イ 四角形 OPAQ は 1 辺が $\sqrt{2}$ のひし形ですので、特に平行四辺形です。

したがって隣り合う 2 つの角の和は 180° となりますので、 $\angle OPA = 180^\circ - \angle POQ$ がわかります。

ウ, エ 余弦定理により $OA^2 = PO^2 + PA^2 - 2 \cdot PO \cdot PA \cdot \cos \angle OPA$ となります。

$PO = PA = \sqrt{2}$ と $\cos \angle OPA = \cos \angle (180^\circ - \angle POQ) = -\cos \angle POQ$ を利用すると $OA^2 = 4 + 4 \cos \angle POQ$ がわかります。

オ A が O の周上にくるということは OA の大きさが円 O の半径に等しいということです。

したがって $OA^2 = 2$ すなわち $4 + 4 \cos \angle POQ = 2$ となるような $\angle POQ$ を求めることになります。

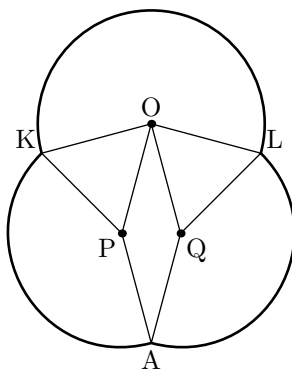
変形すると $\cos \angle POQ = -\frac{1}{2}$ となりますので、 $\angle POQ = 120^\circ$ となります。

カ $0^\circ < \angle POQ < 120^\circ$ であるとき $\cos \angle POQ > -\frac{1}{2}$ ですので、 $OA^2 > 2$ となります。

このため A は円 O の外部にくることがわかります。

キ $120^\circ < \angle POQ < 180^\circ$ であるときは $OA^2 < 2$ となりますので、A は円 O の内部にきます。

(3)



ク～サ 円 O と P の交点で図形の外周にくる点を K、円 O と Q の交点で図形の外周にくる点を L とすると、図形は上記のように 3 つの扇形と正三角形 OPK と正三角形 OQL と四角形 OPAQ に分けられます。

いま四角形 OPAQ の面積を 1 としていますので $2 \sin \angle POQ = 1$ より $\sin \angle POQ = \frac{1}{2}$ です。

また A は O の外部にくるとしていますので $0^\circ < \angle POQ < 120^\circ$ がわかります。

これらより $\angle POQ = 30^\circ$ となり、 $\angle OPA = \angle OQA = 150^\circ$ がわかります。

したがってそれぞれの扇形の中心角は $\angle KOL = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 210^\circ$ 、

$\angle KPA = \angle LQA = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$ となりますので、

$S = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ + (\sqrt{2})^2 \pi \cdot \frac{210^\circ + 150^\circ + 150^\circ}{360^\circ} = 1 + \sqrt{3} + \frac{17}{6} \pi$ がわかります。

[2]

(1) シ, ス 余弦定理 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos B$ より $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot AC}$ となります。代入により $\cos B = \frac{9^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{70}{90} = \frac{7}{9}$ がわかります。

セ～タ $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ であり、 $0^\circ < B < 180^\circ$ のとき $\sin B > 0$ です、
 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{9^2 - 7^2}{9^2}} = \frac{\sqrt{81 - 49}}{9} = \frac{\sqrt{32}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ となります。

チ～テ 面積は $\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B$ で計算できますので、代入すると $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 5 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = 10\sqrt{2}$ となります。

ト 三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{45}{2} \sin B$ ですので $\sin B$ が 1 最大 のときに面積が最大になります。

ナ $|\cos B| = \sqrt{1 - \sin^2 B}$ ですので、 $\sin B$ が最大ときは $|\cos B|$ が 0 最小 になります。

ニ 余弦定理により $\cos B = \frac{9^2 + 5^2 - n^2}{2 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{106 - n^2}{90}$ ですので、 $\cos B < 0$ となるのは $106 - n^2 < 0$ のとき、すなわち $|n| > \sqrt{106}$ のときです。

$10 < \sqrt{106} < 11$ ですので、 $5 \leq n \leq 13$ の範囲では 7 $n = 11, 12, 13$ が該当します。

ヌ $\cos B < 0$ のときは $|\cos B| = -\cos B$ なので最大になるものを考えます。

いま $\cos B = \frac{106 - n^2}{90}$ ですので $106 - n^2$ の大小だけで考えればよいことがわかります。

したがって最大になるものは $n = 11$ であり、このとき $\cos B = -\frac{15}{90} = -\frac{1}{6}$ より $|\cos B| = \frac{1}{6}$ となります。

$\cos B > 0$ のときは $|\cos B| = \cos B$ ですので最小の場合を考えます。このときの値は $n = 10$ のときが最小で、このとき $\cos B = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ となります。

したがって $\frac{1}{6} > \frac{1}{15}$ ですので三角形 ABC の面積が最大となるのは 6 $n = 10$ の場合とわかります。

ネ 正弦定理から $\frac{AB}{\sin C} = 2R$ すなわち $R = \frac{9}{2\sin C}$ ですので、 R が最大となる場合は $\sin C$ が最小となる場合です。

これは $|\cos C|$ が最大となる場合ですので、これを計算しましょう。

$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{n^2 - 56}{10n} = \frac{n}{10} - \frac{28}{5n}$ であり、 $\frac{n}{10}, -\frac{28}{5n}$ はいずれも n が大きくなると大きくなる値ですので、この値が 0 になる n の値 $\sqrt{56}$ の前後である $n = 7, 8$ の場合を考えればよいことがわかります。

$n = 7$ のとき $\cos C = -\frac{1}{10}$ より $|\cos C| = \frac{1}{10}$ 、 $n = 8$ のとき $\cos C = \frac{1}{10}$ より $|\cos C| = \frac{1}{10}$ です。

双方の値が等しくなりましたので、両方で R が最小値をとることがわかります。なのであてはまるものは 4 $n = 7, 8$ となります。

(2) ノ, ハ 2 つの三角形の外接円の半径が等しいことから正弦定理により $\frac{BC}{\sin \angle BA'C} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$ がわかります。

これを变形すると $\sin \angle BA'C = \sin \angle BAC$ となります。

ここから $|\cos \angle BA'C| = |\cos \angle BAC|$ すなわち $\cos \angle BA'C = \pm \cos \angle BAC$ が得られます。

余弦定理によりそれぞれ a, c で表すと

$\cos \angle BA'C = \frac{c^2 + 5^2 - a^2}{2 \cdot c \cdot 5} = \frac{c^2 - a^2 + 25}{10c}$ 、 $\cos \angle BAC = \frac{c^2 + 4^2 - a^2}{2 \cdot c \cdot 4} = \frac{c^2 - a^2 + 16}{8c}$ となります。

いま $0 < a \leq c$ で考えていますので $c^2 - a^2 > 0$ となり、したがって両方の余弦値が正になることから考えるものは $\cos \angle BA'C = \cos \angle BAC$ の場合だけでよいことがわかります。

代入すると $\frac{c^2 - a^2 + 25}{4(c^2 - a^2 + 25)} = \frac{c^2 - a^2 + 16}{5(c^2 - a^2 + 16)}$ となりますので、分母をはらうと
 $\frac{10c}{8c}$ 、したがって $c^2 - a^2 = 20$ がわかります。
 $c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$ を利用すると $(c + a, c - a) = (20, 1)(10, 2)(5, 4)$ の場合だけ考えればよく、そ
 れぞれ $(c + a) + (c - a), (c + a) - (c - a)$ を考えることで $(2c, 2a) = (21, 19)(12, 8)(9, 1)$ となります。
 このうち a, c がともに整数となるものは $a = 4, c = 6$ のみとなります。

第3問

[1]

- (1) ア 平方完成を利用すると $f(x) = (x^2 - 2ax + a^2) + a^2 - a - 6 = (x - a)^2 + a^2 - a - 6$ となりますので、頂点の座標は $(a, \underline{a^2 - a - 6})$ となります。

イ, ウ $f(x)$ の最小値が $a^2 - a - 6$ となりますので、 $f(x) = 0$ が実数解をもたないのは $a^2 - a - 6 > 0$ のときです。

$a^2 - a - 6 = (a + 2)(a - 3)$ ですので、求める範囲は $\underline{a < -2, 3 < a}$ となります。

- (2) エ 関数 $f(x)$ において x^2 の係数が正ですので、 $y = f(x)$ のグラフは $\underline{0}$ 下に凸の放物線となります。

オ $a < 0$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲では $x - a > 0$ となりますので、 x が大きくなるほど $(x - a)^2$ も大きくなります。したがって $x = 0$ のときに $f(x)$ は最小となりますので $\underline{0m = f(0)}$ となります。

カ $0 \leq a \leq 1$ のときは $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $x = a$ とできますので、このときに $f(x)$ が最小となります。すなわち $\underline{2m = f(a)}$ です。

キ $a > 1$ のときは $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $x - a < 0$ ですので、 x が大きくなるほど $(x - a)^2$ は小さくなります。なので $\underline{1m = f(1)}$ がわかります。

ク～サ まず $a < 0$ のとき $m = f(0) = 2a^2 - a - 6 = (2a + 3)(a - 2)$ となりますので、 $m > 0$ のとき $\underline{a < -\frac{3}{2}, 2 < a}$ となります。 $a < 0$ の範囲では $\underline{a < -\frac{3}{2}}$ となります。

$0 \leq a \leq 1$ のときは $m = f(a) = a^2 - a - 6$ ですが (1) よりこの範囲では $f(a) \leq 0$ ですので $m > 0$ となることはありません。

$a > 1$ のときは $m = f(1) = 2a^2 - 3a - 5 = (a + 1)(2a - 5)$ となりますので、 $m > 0$ のとき $\underline{a < -1, \frac{5}{2} < a}$ となります。 $a > 1$ の範囲では $\underline{a > \frac{5}{2}}$ となります。

これらより、求める範囲は $\underline{a < -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} < a}$ となります。

シ $a < 0$ のときは $M = f(1)$ 、 $1 < a$ のときは $M = f(0)$ がわかります。

$0 \leq a \leq 1$ の場合でも x が a から離れる ($|x - a|$ が大きくなる) ほど $f(x)$ は大きくなりますので、 M は $f(0)$ か $f(1)$ に等しくなります。

これらより、 $\underline{3M}$ は $f(0)$ または $f(1)$ となります。

ス $0 \leq x \leq 1$ のときつねに $f(x)$ が負であるためには $f(0) < 0$ と $f(1) < 0$ であることが必要です。

またこのとき M が $f(0)$ または $f(1)$ に等しくなりますので $M < 0$ が成立し、すなわち $f(x)$ がこの範囲で負になる十分条件であることがわかります。

よって求める条件は $\underline{6f(0) < 0}$ かつ $\underline{f(1) < 0}$ となります。

セ, ソ $f(0) = (2a + 3)(a - 2)$ ですので $f(0) < 0$ となるのは $\underline{-\frac{3}{2} < a < 2}$ のときです。

また $f(1) = (a + 1)(2a - 5)$ ですので $f(1) < 0$ となるのは $\underline{-1 < a < \frac{5}{2}}$ のときです。

求める範囲は両方をみたすものですので $\underline{-1 < a < 2}$ となります。

[2]

(1)

タ～ト 価格を 10 円上げると売上は 20 個下がると仮定していますので x の係数は $\frac{-20}{10} = -2$ となります。
関数の y 切片を k とすると $x = 100$ のときの値を考えて $-2 \cdot 100 + k = 160$ となりますので $k = 360$ となります。

したがって売上数は $-2x + 360$ となります。

ナ $-2x + 360 \geq 0$ を解くと $360 \geq 2x$ より $5x \leq 180$ となります。

ニ～ネ 売上の式は $y = -2x^2 + 360x = -2(x^2 - 180x) = -2(x - 90)^2 + 2 \cdot 90^2 = -2(x - 90)^2 + 16200$ と変形できます。

これより y は $x = 90$ のときに最大値 316200 をとります。

(2) ノ 1 個あたりの利益は価格から原価を引いた金額ということで、 $z = 6(x - 60)(-2x + 360)$ と表せることがわかります。

ハ、ヒ 計算すると $z = -2x^2 + 480x - 21600 = -2(x^2 - 240x) - 21600 = -2(x - 120)^2 + 2 \cdot 120^2 - 21600$
 $= -2(x - 120)^2 + 7200$ となりますので、

$4x = 120$ のときに z は最大値 47200 をとることがわかります。

(3) フヘ クリームパンの原価を t 円とおくと利益 w は x と t を用いて

$w = (x - t)(-2x + 360) = -2x^2 + (360 + 2t)x - 360t$ と表せます。平方完成すると

$w = -2\{x^2 - (180 + t)x\} - 360t = -2\left(x - \frac{180 + t}{2}\right)^2 + 2\left(90 + \frac{t}{2}\right)^2 - 360t$ となります。

したがって価格の範囲を無視して計算すると利益の最大値は $2\left(90 + \frac{t}{2}\right)^2 - 360t = \frac{t^2}{2} - 180t + 16200$ となります。

これが 5000 以上ならば利益を 5000 円以上にできますので、 $\frac{1}{2}t^2 - 180t + 16200 \geq 5000$ を考えます。
整理すると $t^2 - 360t + 22400 \geq 0$ であり、 $t^2 - 360t + 22400 = (t - 180)^2 - 10000 = (t - 280)(t - 80)$ とできますので、これより求める範囲は $t \leq 80, 240 \leq t$ です。

(あるいは $t^2 - 9 \cdot 40t + 14 \cdot 40^2 = (t - 2 \cdot 40)(t - 7 \cdot 40)$ と変形する手法もある)

(1) から $x \leq 180$ が必要とわかっていますので $t \geq 240$ だと利益が出ません。また $t = 80$ のときは $x = 130$ と設定することで利益を 5000 円にできます。

よって求める原価は 80 円 となります。

第4問

- (1) アイ データは全部で18個ありますので、中央値は9番目と10番目の平均です。
したがって第1四分位数は小さい側9個の中央値である5番目の値32、第3四分位数は大きい側9個の中央値である14番目の値47となります。
これより四分位範囲は $47 - 32 = 15$ となります。

ウ 外れ値の基準は問題文冒頭にありますのでここで確認しましょう。今回は外れ値にしない範囲は下限が $32 - 15 \cdot 1.5 = 9.5$ 、上限が $47 + 15 \cdot 1.5 = 69.5$ となりますので、外れ値になるものは 170の1つ となります。

- (2) エ データAの中央値は(1)にあるように9番目と10番目の平均ですので $m_A = \frac{44 + 45}{2} = 44.5$ となります。

オ データBは最大値70を外れ値とした17個からなりますので中央値は9番目の値となります。すなわち ${}_3m_B = 44$ です。

カ データAの合計からデータBの合計を引くとデータAにあってデータBにないデータの合計が得られます。

すなわち外れ値の合計となりますのでその値は 170 となります。

キク 平均は合計をデータの数で割った値ですので、合計は平均にデータ数をかけた値と言い換えられます。
したがって $18\bar{a} - 17\bar{b} = 70$ ですので $18\bar{a} = 17\bar{b} + 70$ となります。

ケ まず $|m_A - m_B| = |44.5 - 44| = 0.5$ です。

$Q_A = 32$ であり、データBの第1四分位は中央値に使った9番目より前である8個の中央値ですので、4番目と5番目の平均となります。すなわち $Q_B = \frac{31 + 32}{2} = 31.5$ 、したがって $|Q_A - Q_B| = 0.5$ がわかります。

したがって $T_2 = T_3$ がわかります。

また $\bar{a} = \frac{17\bar{b} + 70}{18}$ より $\bar{a} - \bar{b} = \frac{70 - \bar{b}}{18}$ がわかります。

外れ値以外は2番目が65、それ以外が62以下ですので $17\bar{b} \leq 65 + 16 \cdot 62 = 3 + 17 \cdot 62 < 17 \cdot 63$ がわかり、すなわち $\bar{a} - \bar{b} > \frac{70 - 63}{18} = 0.5$ より $T_1 > 0.5$ となります。

(問題文から $\bar{a} = \frac{771}{18} = 42 + \frac{15}{18}$, $\bar{b} = \frac{701}{17} = 41 + \frac{4}{17}$ と読み取って $\bar{a} - \bar{b} > 1$ を導いてもよい)
これらより、あてはまるものは ${}_4T_2 = T_3 < T_1$ となります。

- (3) コ それぞれ検証しましょう。

(a) 図1から、得点総数が最も小さいチーム(散布図で最も左に位置する点のチーム)は勝点が38あたりのチームと読み取れます。このチームの失点を図2で確認すると38程度で、図で最も右にきている(失点総数が最大である)点ではありません。なのでこれは誤りといえます。

(b) 得点総数の範囲は最大が70、最小が29程度なので範囲は $70 - 29 = 41$ 、失点総数は最大が57、最小が35なので範囲は $57 - 35 = 22$ と読み取れます。ここまで細かく見なくても得点総数の範囲が失点総数の範囲を含むことが読み取れますので、これは正しいといえます。

(c) 図1からは得点総数が大きくなると勝点が大きくなる傾向から正の相関、失点総数が大きくなると勝点が小さくなる傾向から負の相関があるとみられます。なのでこれは誤りといえます。

したがって、あてはまるものは ${}_5(a)$ 誤、(b) 正、(c) 誤 となります。

サ それぞれみてみます。

(a) 外れ値が 1 個ありますので箱ひげには 17 個のデータが使われています。なので第 1 四分位数は 4 番目と 5 番目の間、中央値は 9 番目、第 3 四分位数は 13 番目と 14 番目の間にきます。

いま同じデータは複数ないということです、第 1 四分位数以上で中央値より小さいデータは 4 個、中央値より大きく第 3 四分位数以下のデータは 4 個あります。なので誤りといえます。

(具体的な個数をみなくても第 1 四分位数と第 3 四分位数は対称的に定義されているので、同じ値がないとわかっていれば同数と判定できる)

(b) 失点総数が得点総数より大きいということは得点総数を失点総数で割った値が 1 未満である、と言い換えられます。この値から小さい方から 9 番目 (中央値) が 1 より小さいですので、少なくとも 9 チームはこれに該当することがわかります。なので正しいといえます。

これらより、あてはまるものは 2(a) 誤、(b) 正 となります。

シ 相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差両方で割ることで得られます。

すなわちその値は $\frac{125.1}{13.4 \cdot 10.0} = .125.1134 = 0.93 + 0.01 \cdot \frac{48}{134} < 0.935$ となりますので、あてはまるものは 60.93 となります。

(4) ス s_{uz} は $(u_i - \bar{u})(z_i - \bar{z})$ の平均で表せます。 $u_i - \bar{u} = (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})$ ですので

$(u_i - \bar{u})(z_i - \bar{z}) = (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) - (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$ とできます。

よって s_{uz} は $(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$ の平均から $(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$ の平均を引くことで表せますので、すなわち $s_{uz} = s_{xz} - s_{yz}$ が成り立ちます。

セ $r_{uz} = \frac{s_{uz}}{s_u s_z}$ であり、 $s_u \geq 0, s_z \geq 0$ が成り立ちますので、 $s_u \neq 0, s_z \neq 0$ であれば $r_{uz} < 0$ となる必要十分条件は $s_{uz} < 0$ となります。

したがって $s_{xz} - s_{yz} < 0$ と同値となりますので、求める条件は $s_{xz} < s_{yz}$ となります。

所感

時間を食う問題が各所に用意されています。時間配分の意識が重要になってくるでしょう。

第 1 問

[1]

式変形に関する問題です。全体的に見て解きやすいのはここだと思います。

[2]

集合に関する問題です。集合の基本を理解していればよいでしょう。

第 2 問

[1]

三角比と円を利用した問題です。面倒な計算が多いので計算に苦手意識があると大変です。

[2]

三角形と正弦余弦を利用した問題です。下手すると検証に時間がかかるので、速度が求められます。

第 3 問

[1]

二次関数の値域を考える問題です。場合分けは数学の基本ですので考え方で落としたいところです。

[2]

二次関数へのモデル化を利用した問題です。面倒な計算が連続するので難しいといえます。

第 4 問

データの分析の問題です。箱ひげ図で使う値の意味を理解していると得点しやすいです。