

## 解答

| 第1問 (15) |      |    |
|----------|------|----|
| 解答欄      | 解答   | 配点 |
| ア        | 4    | 2  |
| イ        | 5    | 2  |
| ウ        | 8    | 2  |
| エ        | 4    | 2  |
| オ        | 0    | 2  |
| カ, キ     | 4, 3 | 2  |
| ク, ケ     | 8, 7 | 3  |

| 第2問 (15)         |                  |    |
|------------------|------------------|----|
| 解答欄              | 解答               | 配点 |
| ア, イ, ウ          | 3, 6, 6          | 3  |
| エ                | 0                | 2  |
| オ, カ             | 1, 2             | 2  |
| キ                | 1                | 2  |
| ク                | 2                | 3  |
| ケ                | 1                | 1  |
| コ, サ, シ, ス, セ, ソ | 2, 3, 2, 2, 3, 3 | 2  |

| 第3問 (22) |          |    |
|----------|----------|----|
| 解答欄      | 解答       | 配点 |
| ア        | 2        | 2  |
| イ, ウ     | 0, 0     | 2  |
| エ, オカ, キ | 2, -4, 3 | 2  |
| ク, ケ     | 2, 0     | 2  |
| コ, サ     | 2, 9     | 2  |
| シ, ス     | 0, 2     | 3  |
| セ        | 2        | 3  |
| ソ        | 3        | 3  |
| タ        | 2        | 3  |

| 第4問 (16) |                |    |
|----------|----------------|----|
| 解答欄      | 解答             | 配点 |
| ア        | 4              | 2  |
| イ        | 2              | 2  |
| ウ        | 3              | 2  |
| エ, オ     | 3, 2<br>(順序不問) | 2  |
| カ        | 6              | 2  |
| キ        | 8              | 3  |
| ク        | 1              | 3  |

| 第5問 (16) |     |    |
|----------|-----|----|
| 解答欄      | 解答  | 配点 |
| ア        | 1   | 1  |
| イウエ      | 889 | 1  |
| オカ       | 20  | 1  |
| キク       | 25  | 1  |
| ケ        | 1   | 1  |
| コ        | 0   | 2  |
| サ        | 5   | 2  |
| シ        | 0   | 3  |
| ス        | 1   | 1  |
| セ        | 2   | 3  |

| 第6問 (16)    |             |    |
|-------------|-------------|----|
| 解答欄         | 解答          | 配点 |
| アイ, ウエ, オ   | -3, -1, 2   | 2  |
| カ, キ        | 0, 2        | 2  |
| ク           | 6           | 1  |
| ケ, コサ, シ, ス | 3, -1, 2, 6 | 2  |
| セ           | 1           | 2  |
| ソ           | 0           | 2  |
| タ, チ        | 0, 4        | 2  |
| ツ           | 5           | 3  |

| 第7問 (16) |          |    |
|----------|----------|----|
| 解答欄      | 解答       | 配点 |
| ア        | 3        | 2  |
| イ, ウ, エ  | 3, 1, 5  | 2  |
| オカ, キク   | -1, -2   | 2  |
| ケ, コ, サシ | 0, 3, -1 | 2  |
| ス        | 7        | 1  |
| セソ, タ, チ | -1, 2, 0 | 2  |
| ツテ, トナニ  | 10, -10  | 1  |
| ヌ, ネ     | 0, 3     | 2  |
| ノ, ハ, ヒ  | 0, 1, 1  | 2  |

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとまって入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。  
(上記の場合、第1問はカに4、キに3を入れた場合のみ2点加わる)

## 解説

### 第1問

- (1) ア 正の整数  $N$  を正の整数  $m$  で割った商を  $q$ 、余りを  $r$  とおくと  $N = qm + r$  が成り立つことを数式にも適用できます。

これをふまえると  $4x^n = (x-2)Q(x) + k$  がわかります。

- イ  $x = 2$  を代入すると  $2^n = (2-2) \cdot Q(x) + k$  となりますので、 $(2-2) \cdot Q(x) = 0$  より  $5k = 2^n$  がわかります。

- ウ 同様に商を  $P(x)$ 、余りを  $l$  とおくと  $x^n = (2x-1)P(x) + l$  となります。この式に  $x = \frac{1}{2}$  を代入することで  $8l = \frac{1}{2^n}$  がわかります。

これを利用すると、整式  $P(x)$  を  $x - \alpha$  で割ったときの余りは  $P(\alpha)$  となることがわかります。(これを剰余定理とよぶ)

- (2) エ 二項定理により  $(X+a)^n$  を展開すると  $X^k$  の項の係数は  $a^{n-k} {}_n C_k$  となります。

これを利用すると  $X$  の項の係数は  $k=1$  のときの値ですので  $2^{n-1} \cdot {}_n C_1 = 4n \cdot 2^{n-1}$  となることがわかります。

- オ  $(X+a)^n$  を展開したときの定数項は  $a^n$  ですので、 $(X+2)^n$  を展開すると定数項は  $02^n$  となります。

- カ, キ  $(X+2)^n = A(X) \cdot X^2 + (n \cdot 2^{n-1})X + 2^n$  で  $X = x-2$  を代入すると

$x^n = A(x-2) \cdot (x-2)^2 + (n \cdot 2^{n-1})(x-2) + 2^n$  となります。 $A(x-2) \cdot (x-2)^2$  は  $(x-2)^2$  で割り切れますので、

$$R(x) = (n \cdot 2^{n-1})x - n \cdot 2^n + 2^n = 4n \cdot 2^{n-1}x + 3(-n+1) \cdot 2^n \text{ がわかります。}$$

- ク, ケ 同様に  $X = 2x-1$  とおくと  $x = \frac{X+1}{2}$  とできます。このとき  $x^n = \left(\frac{X+1}{2}\right)^n = \frac{(X+1)^n}{2^n}$  ですので、同様に展開すると

$$\frac{(X+1)^n}{2^n} = \frac{B(X) \cdot X^2 + nX + 1}{2^n} = \frac{B(X)}{2^n} X^2 + \frac{n}{2^n} X + \frac{1}{2^n} \text{ とできます。}$$

これに  $X = 2x-1$  を代入することで余りは

$$\frac{n}{2^n}(2x-1) + \frac{1}{2^n} = 8 \frac{n}{2^{n-1}}x + 7 \frac{-n+1}{2^n} \text{ となることがわかります。}$$

## 第2問

(1)

ア～ウ ①の式を平方完成により変形すると  $(x-s)^2 + (y-t)^2 - t^2 = 0$  より  $(x-s)^2 + (y-t)^2 = t^2$  と変形できます。

$t > 0$  ですのでこれにより  $C$  は中心  $(s, t)$  で半径  $t$  の円であることがわかります。

エ  $C$  は中心の  $y$  座標 (の絶対値) が半径に等しくなっていますので、 $x$  軸との距離が半径に等しいことになります。すなわち  $C$  はつねに  $x$  軸と接することがわかります。

(2) オ  $C$  は点  $(s, 0)$  を通ります。この点は  $-2 < s < 2$  であるならば  $C_0$  の内部にきます。なので  $C$  と  $C_0$  が接するならば  $C$  は  $C_0$  の内部にくることになり、ゆえに 1内接 することがわかります。

カ  $C_0$  と  $C$  が内接するならば半径の差  $|r_0 - r|$  が2つの円の中心の距離に等しくなります。

いま  $C$  が  $C_0$  の内部にくることから  $r < r_0$  がわかりますので、 $d = r_0 - r$  が成り立ちます。

キ  $r_0 = 2, r = t, d = \sqrt{s^2 + t^2}$  であることがわかります。したがって代入により  $\sqrt{s^2 + t^2} = 2 - t$  となります。

この両辺を2乗すると  $s^2 + t^2 = t^2 - 4t + 4$  となりますので、 $s^2 = -4t + 4$  より  $t = \frac{4 - s^2}{4}$  がわかります。

ク  $C$  の中心の座標は  $(s, t)$  でしたので中心座標  $(x, y)$  は  $y = \frac{4 - x^2}{4}$  をみます。

したがって中心の  $y$  座標は  $x$  の2次関数になりますので、そのグラフは放物線となります。また頂点が  $(0, 1)$  で上に凸であり、2点  $(\pm 2, 0)$  を通ることもわかります。

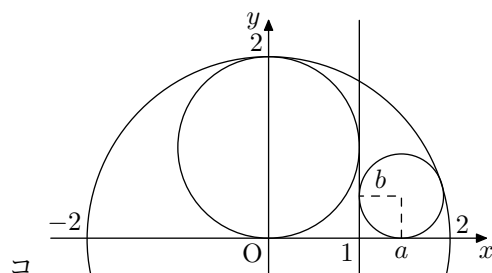
これより、 $-2 < x < 2$  の範囲で考えることであてはまるものは選択肢2の図形となります。

(3) ケ  $C$  は円の半径が  $y$  座標の絶対値に等しいので半径の最大値は  $s = 0, t = 1$  のときの1となります。これが  $C_1$  に一致するとき  $C_1$  の半径が最大となります。

この状態で  $C_1$  と  $x = k$  が接しているとき、 $k = \pm 1$  となります。

$C_1$  は  $x < k$  の領域に中心がくることになりますので、 $0 < k$  が必要です。

このことから、 $C_1$  の半径が最大となるのは  $k = 1$  のときとわかります。



$C_2$  の中心の座標を  $(a, b)$  とおくと半径は  $b$  であり、また中心が領域  $x > k$  にあること、 $C_2$  が直線  $x = 1$  に接していることから  $a = 1 + b$  がわかります。

また (2) より  $b = \frac{4 - a^2}{4}$  をみてもわかります。これに代入すると  $b = \frac{4 - (1 + b)^2}{4}$  となり、分母をはらって展開すると  $b^2 + 6b - 3 = 0$  がわかります。

さらに変形すると  $(b + 3)^2 = 12$  となりますので、 $b = -3 \pm 2\sqrt{3}$  となります。

条件は  $b > 0$  ですので、これをみても  $b = 2\sqrt{3} - 3$  であることがわかります。

このとき  $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$  より  $0 < b < 1$  が成り立ちますので、 $1 < a < 2$  も確かめられます。

したがって  $C_2$  の座標は  $(2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} - 3)$  となります。

### 第3問

- (1) ア 微積分の基本により、 $\int_0^x f(t)dt$  を  $x$  で微分すると  $f(x)$  が得られます。  
したがって  $F'(x) = x(x-2) = \underline{x^2 - 2x}$  となります。
- イ 導関数において値が正から負に変わるときに、元の関数は極大値をとります。  
 $F'(x) = x(x-2)$  よりその値は  $\underline{x=0}$  のときの値となります。
- ウ 任意の関数  $f(x)$ 、実数  $a$  において  $\int_a^a f(t)dt = 0$  が成り立ちます。  
したがって  $F(0) = \int_0^0 t(t-2)dt = \underline{0}$  がわかります。
- エ 導関数において値が負から正に変わるときに、元の関数は極小値をとります。  
同様に考えると  $\underline{x=2}$  のときにとることがわかります。
- オ～キ  $F(x) = \left[ \frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^x = \frac{1}{3}x^3 - x^2$  と計算できますので、 $F(2) = \frac{8}{3} - 4 = \underline{-\frac{4}{3}}$  がわかります。
- (2) ク  $0 \leq t \leq 2$  のときは  $t(t-2) \leq 0$  であり、実数  $r$  が  $r \leq 0$  をみたすならば  $|r| = -r$  となりますので、  
 $\underline{2|t(t-2)| = -t(t-2)}$  となります。
- ケ  $t \leq 0$  または  $2 \leq t$  のときは  $t(t-2) \geq 0$  であり、実数  $r$  が  $r \geq 0$  をみたすならば  $|r| = r$  となりますので、  
 $\underline{0|t(t-2)| = t(t-2)}$  となります。
- コ  $0 \leq t \leq 2$  のとき  $|t(t-2)| = -t(t-2)$  でしたので、 $0 \leq x \leq 2$  のときは  $G(x) = \underline{2\int_0^x \{-t(t-2)\}dt}$  とできます。
- サ さらに計算すると  $\int_0^x \{-t(t-2)\}dt = -\int_0^x t(t-2)dt = \underline{-F(x)}$  がわかります。
- シ  $2 \leq t$  のときは  $|t(t-2)| = t(t-2)$  でしたので  $2 \leq x$  のときは  $G(x) = \int_0^2 \{-t(t-2)\}dt + \underline{0\int_2^x t(t-2)dt}$  となります。
- ス さらに計算すると  $G(x) = G(2) + \int_0^x t(t-2)dt - \int_0^2 t(t-2)dt$   
 $= -F(2) + F(x) - F(2) = F(x) - 2F(2) = \underline{2F(x) + \frac{8}{3}}$  がわかります。
- セ  $y = G(x)$  の導関数  $y = G'(x) = |x(x-2)|$  は関数  $y = G(x)$  の  $x$  における変化の割合といえます。  
いま  $G'(x) \geq 0$  が  $0 \leq x$  でつねに成り立ちますので、 $G(x)$  は  $x$  が大きくなると減少しない変化をすることになり、すなわちグラフでは右下がりが存在しないことがわかります。  
また  $G'(2) = 0$  ですので  $(2, G(2))$  では変化が0になるといえます。  
これらから、あてはまるものは 選択肢2の図 となります。
- (3) ソ  $\alpha \leq x \leq \beta$  のとき  $(t-\alpha)(t-\beta) \leq 0$ 、 $\beta \leq x$  のとき  $(t-\alpha)(t-\beta) \geq 0$  となります。これより  $\alpha \leq x \leq \beta$  のときは  
 $H(x) = \int_\alpha^x \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt - \int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta)dt = -2\int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta)dt$  となり、 $\beta \leq x$  のときは  
 $H(x) = \int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt + \int_\beta^x (t-\alpha)(t-\beta)dt - \{\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)dt + \int_\beta^x (t-\alpha)(t-\beta)dt\}$   
 $= \int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt - \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)dt = H(\beta)$  となります。  
これより、 $\underline{3\beta \leq x}$  のときに  $H(x)$  の値が一定になることがわかります。
- タ このときの  $H(x) = H(\beta)$  であり、 $H(\beta) = 2\int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt = 2\int_\alpha^\beta |(t-\alpha)(t-\beta)|dt$  と変形できます。  
ここから、この値は 2関数  $y = (x-\alpha)(x-\beta)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた図形の面積の2倍 を表すことがわかります。

#### 第4問

- (1) ア  $\sin \frac{x+T}{2} = \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{T}{2} \right)$  と変形することで、問題文をあてはめることで  $\sin \frac{x+T}{2} = \sin \frac{x}{2}$  が成り立つのは  $\frac{T}{2} = 2\pi, 4\pi, \dots$  のとき、すなわち  $T = 4\pi, 8\pi, \dots$  のときであることがわかります。  
 $T$  の大小は  $\frac{T}{2}$  の大小に一致することから、それらのうち最小のものは  $4\pi$  であることがわかります。
- イ 実数  $x$  において  $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1$  であること、周期が  $4\pi$  であることから、選択肢2のグラフが適切です。
- (2) ウ  $\sin \frac{x}{2} = -1$  となるような正の実数  $x$  を考えると、 $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, \dots$  となることから  $x = 3\pi, 7\pi, 11\pi, \dots$  となります。  
 また、 $\cos \frac{x}{3} = -1$  となるような  $x$  は  $\frac{x}{3} = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$  から  $x = 3\pi, 9\pi, 15\pi, \dots$  となります。  
 これより、 $\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{3} = -1$  となるような正の実数  $x$  で最小のものは  $3\pi$  であることがわかります。
- エ, オ  $\sin \frac{3\pi + \alpha}{2} = \sin \left( \frac{3}{2}\pi + \frac{\alpha}{2} \right) = -\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{3\pi + \alpha}{3} = \cos \left( \pi + \frac{\alpha}{3} \right) = -\cos \frac{\alpha}{3}$  が成り立ちますので、  
 $f(3\pi + \alpha) = -3\cos \frac{\alpha}{2} - 2\cos \frac{\alpha}{3}$  がわかります。
- カ  $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$  となるような  $\alpha$  は  $\frac{\alpha}{2} = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  から  $\alpha = 4\pi, 8\pi, 12\pi, \dots$  となります。  
 また  $\cos \frac{\alpha}{3} = 1$  となるような  $\alpha$  を同様に求めると  $\alpha = 6\pi, 12\pi, 18\pi, \dots$  となります。  
 求めるものはこれらを同時にみたす正で最小のもので、その値は  $12\pi$  となります。
- キ  $y = f(x)$  のグラフと  $y = g(x)$  のグラフの共有点での  $x$  座標では、 $f(x) = g(x)$  が成り立ちます。  
 $f(x) = g(x)$  に代入すると  $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3} = \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{3}$  となりますので、整理すると  $\cos \frac{x}{3} = 0$  をみたす  $x$  座標が共有点となることがわかります。  
 したがって、共有点の  $x$  座標は  $n$  を整数とすると  $\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\pi + n\pi$  より  $\frac{3}{2}\pi + 3n\pi$  と表せることがわかります。
- ク  $T = 12\pi$  であるので、 $0 \leq x \leq T$  の範囲で  $f(x) = g(x)$  となる  $x$  の値は  $x = \frac{3}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \frac{15}{2}\pi, \frac{21}{2}\pi$  の4つです。  
 選択肢のグラフで  $0 \leq x \leq T$  における共有点の個数を数えると順に 3, 4, 5, 6, 2 となります。  
 したがってあてはまるものはその範囲で共有点が4点ある選択肢1のグラフであることがわかります。

## 第5問

- (1) ア 800 点が与えられるカードは番号が 022, 122,  $\dots$ , 922 の 10 枚ありますので、 $p_2 = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$  がわかります。

イ～エ  $X = 0$  となる場合は  $X = 2000, 800, 100$  いずれでもない場合です。したがって  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$  となりますので、

$$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - \frac{1}{1000} - \frac{10}{1000} - \frac{100}{1000} = \frac{889}{1000} \text{ となります。}$$

オカ 代入することで  $E(X) = 2000 \cdot \frac{1}{1000} + 800 \cdot \frac{1}{100} + 100 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{889}{1000} = 2 + 8 + 10 + 0 = 20$  となります。

なお、 $V(X)$  の式は  $V(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 - \{E(X)\}^2$  と変形できますので、これを利用すると確認しやすいです。

- (2) キク 得られる点はくじの得点から 25 点を引いたものとなりますので、 $Y = X - 25$  となります。

ケ  $E(Y) = (x_1 - c)p_1 + (x_2 - c)p_2 + (x_3 - c)p_3 + (x_4 - c)p_4 = (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4) - c(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$  と変形することで  $E(Y) = E(X) - c$  がわかります。

コ  $V(Y) = \{(x_1 - c) - E(Y)\}^2 p_1 + \{(x_2 - c) - E(Y)\}^2 p_2 + \{(x_3 - c) - E(Y)\}^2 p_3 + \{(x_4 - c) - E(Y)\}^2 p_4$   
 $= \{(x_1 - c) - (E(X) - c)\}^2 p_1 + \{(x_2 - c) - (E(X) - c)\}^2 p_2$   
 $+ \{(x_3 - c) - (E(X) - c)\}^2 p_3 + \{(x_4 - c) - (E(X) - c)\}^2 p_4$   
 $= \{x_1 - E(X)\}^2 p_1 + \{x_2 - E(X)\}^2 p_2 + \{x_3 - E(X)\}^2 p_3 + \{x_4 - E(X)\}^2 p_4$  と変形することで  $V(Y) = V(X)$  がわかります。

サ それぞれのくじ引きは独立な試行ですので、 $E(\bar{Y}) = \frac{1}{400} \{E(Y_1) + \dots + E(Y_{400})\} = \frac{400E(Y)}{400} = E(Y)$ 、  
 $V(\bar{Y}) = \frac{1}{400^2} V(Y_1 + \dots + Y_{400}) = \frac{1}{400^2} \{V(Y_1) + \dots + V(Y_{400})\} = \frac{400V(Y)}{400^2} = \frac{1}{400} V(Y)$  がわかります。

したがって標本平均は平均  $E(Y)$ 、分散  $\frac{V(Y)}{400}$  ですので、近似的に正規分布  ${}_5N\left(E(Y), \frac{V(Y)}{400}\right)$  に従います。

シ  $Y_1 + \dots + Y_{400} \geq 0$  は  $\bar{Y} \geq 0$  と変形できます。

$\bar{Y}$  の平均を  $m$ 、標準偏差を  $\sigma$  とおくと  $m = E(Y) = E(X) - c = -5$ 、 $\sigma = \sqrt{\frac{V(Y)}{400}} = \sqrt{\frac{V(X)}{400}} = \frac{\sqrt{110}}{2}$  となります。

$m + a\sigma = 0$  となるような  $a$  を求めると  $a = -\frac{m}{\sigma} = \frac{10}{\sqrt{110}}$  となりますので、

$\bar{Y} \geq 0$  はさらに  $\bar{Y} \geq m + \frac{10}{\sqrt{110}}\sigma$  と変形できます。

すなわち  $P(Y_1 + \dots + Y_{400} \geq 0)$  は標準正規分布のグラフにおいて  $z \geq \frac{10}{\sqrt{110}}$  の範囲にくる部分の面積となります。

問題文の近似を使うと  $\frac{10}{\sqrt{110}} = \frac{\sqrt{110}}{11} = 0.95\dots$  となり、この値で正規分布表をみると得られる値  $k$  は  $0.3289 < k < 0.3315$  をみたすことがわかります。

これより、求める確率を  $p$  とおくと  $p = 0.5 - k$  より  $0.1685 < p < 0.1711$  となりますので、選択肢では 0.17 が適当といえます。

- (3) ス 3 回くじを引いて得点が 1000 点になる場合を考えましょう。まず 3 回とも 100 点だと 1000 点に届きません。また 2000 点のくじを引いていないのも自明ですので、800 点のくじを 1 回引いていることがわかります。

すると残り 2 回で 200 点となりますが、これは 2 回とも 100 点のくじを引いた場合に限られることがわかります。

したがって 1000 点をとる確率は 800 点を 1 回、100 点を 2 回引く確率ですので、

$${}^3C_1 \cdot \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{3}{10000} = \underline{0.0003} \text{ となることがわかります。}$$

セ 信頼度 95%の信頼区間を求めるため、まずは正規分布表から  $\frac{0.95}{2} = 0.475$  となるような  $z_0$  を探しましょう。

すると  $z_0 = 1.96$  のときの値であることがわかります。

したがって、信頼区間の幅は標本の平均  $m'$ 、標本の標準偏差  $\sigma'$  を用いて

$$m' - 1.96 \cdot \frac{\sigma'}{\sqrt{400}} \leq m \leq m' + 1.96 \cdot \frac{\sigma'}{\sqrt{400}} \text{ と表せます。}$$

いま  $\sigma' = 75$  でしたので  $1.96 \cdot \frac{\sigma'}{\sqrt{400}} = \frac{1.96 \cdot 75}{20} = 7.35$  となり、 $m' = 16.75$  より信頼区間は  $\underline{29.40 \leq m \leq 24.10}$  となります。

## 第6問

(1)

ア～オ  $a_1$  は作り方から初項  $-3$ 、公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列ですので、 $a_n = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  であることがわかります。

カ  $n$  が奇数のとき  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  が  $-\frac{1}{2}$  の偶数乗になりますので、正の値になります。したがって  $a_1 < 0$  より  $a_n < 0$  が成り立ちます。

キ  $n$  が偶数のときは  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  が負の値をとります。同様にして  $a_n > 0$  がわかります。

(2) ク  $b_n + \alpha = -\frac{1}{2}(b_n + \alpha)$  となるような  $\alpha$  を求められれば数列  $\{b_n + \alpha\}$  が等比数列になります。なのでこの  $\alpha$  を求めましょう。  
 右辺を展開すると  $-\frac{1}{2}b_n - \frac{\alpha}{2}$  であり、左辺に元の漸化式を代入することで  $-\frac{1}{2}b_n - 9 + \alpha = -\frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}\alpha$  が成り立ちます。  
 したがって  $\alpha - 9 = -\frac{1}{2}\alpha$  より  $\alpha = 6$  とすればよいことがわかります。

ケ～ス これにより数列  $\{b_n + 6\}$  が初項  $-3 + 6$ 、公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列となりますので、 $b_n + 6 = (-3 + 6) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  となります。

よって  $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 6$  がわかります。

セ  $n$  が偶数のときは  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0$  となります。

$n$  が奇数のときは  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$  であり、 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  が成り立ちます。

したがって  $n$  が奇数のときは  $n$  が大きくなるほど  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  が小さくなりますので、

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 1$  が成り立ちます。(等号は  $n = 1$  で成立)

したがって  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq A$  がすべての正の整数  $n$  で成り立つような  $A$  で最小の値は  $A = 1$  となります。

ソ  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 1$  を利用すると  $b_n \leq 3 \cdot 1 - 6 = -3 < 0$  がわかります。

したがって  $b_n < 0$  がすべての正の整数  $n$  について成り立つことがわかります。

(3) タ すべての正の整数  $k$  について  $c_k$  は実数ですので  $c_k^2 \geq 0$ 、すなわち  $c_{k+1} \leq -\frac{1}{2} \cdot 0 + 4 = 4$  が成り立ちます。

したがって  $c_{k+1} \leq 4$  は  $c_k$  によらず成り立つことがわかります。

チ  $-4 \leq c_{k+1}$  であるならば  $-4 \leq -\frac{1}{2}c_k^2 + 4$  となります。整理すると  $c_k^2 \leq 16 = 4^2$  となりますので、 $-4 \leq c_{k+1}$  が成り立つならば  $-4 \leq c_k \leq 4$  であることがわかります。

したがって  $-4 \leq c_{k+1}$  は  $-4 \leq c_k \leq 4$  で成り立ち、それ以外で成り立たないことがわかります。

ツ それぞれみていきましょう。なお、「すべての自然数  $n$  について条件  $P$  が成り立つ」の否定は、「条件  $P$  が成り立たない自然数  $n$  が存在する」であることに注意です。

(I) 漸化式から  $\alpha$  の値に関係なく  $c_2 \leq 4$  でしたので、 $c_n > 4$  が成り立たない  $n$  が存在します。なので命題は偽となります。



- (II) 同様にして漸化式から  $c_{n-1}$  の値に関係なく  $c_n \leq 4$  が成立しますので、命題は真といえます。
- (III)  $\alpha = -2$  のときに計算すると  $c_2 = 2$  となり、この命題の反例ができます。なので命題は偽といえます。

以上より、あてはまるものは  $\text{\_5(I) 偽、(II) 真、(III) 偽}$  となります。

## 第7問

(1) ア  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ}$  と変形することで  $\overrightarrow{OQ} = \vec{m} + t\vec{b}$  がわかります。

イ～エ  $s\vec{a} = \vec{m} + t\vec{b}$  を成分で表すことで

$$(0, -3s, s) = (2, 3, 5) + (t, 0, 3t) = (2+t, 3, 5+3t) \text{ がわかります。}$$

オ～ク  $x$  成分の式から  $0 = 2 + t$ 、 $y$  成分の式から  $-3s = 3$  となるので、整理すると  $s = -1, t = -2$  がわかります。このとき  $s = 5 + 3t$  も成立していることがわかります。

ケ～シ 得られた値を代入すると交点の座標は  $(0, 3, -1)$  となることがわかります。

ス  $\vec{m} = (2, 3, -5)$  のときは  $\vec{m} + t\vec{b} = (2+t, 3, -5+3t)$  になります。

(2)

セ～チ  $\vec{m} = (2, 3, 5)$  であるとき、(1) より  $(-1) \cdot \vec{a} = \vec{m} - 2\vec{b}$  でしたので  $\vec{m} = (-1) \cdot \vec{a} + 2\vec{b} + 0 \cdot \vec{e}$  と変形できます。すなわち  $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 0$  がわかります。

ツテ  $(2, 3, -5) = (2, 3, 5) + (0, 0, -10)$  ですので、 $\vec{m} = (2, 3, 5) - 10\vec{e}$  となります。

ト～ニ  $(2, 3, 5) = (-1) \cdot \vec{a} + 2\vec{b}$  でしたので  $\vec{m} = (-1) \cdot \vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{e}$ 、すなわち  $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = -10$  がわかります。

ヌ、ネ 直線 OA と  $l$  が交わるならば  $s\vec{a} = \vec{m} + t\vec{b}$  をみたす  $s, t$  がありますので、

$$\vec{m} = 0s\vec{a} + 3(-t)\vec{b} \text{ が成り立つことがわかります。}$$

(ちなみに 1 通りになるのは零ベクトル  $(0, 0, 0)$  を  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{e}$  の形式にしようすると  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  が必要であることからわかる)

(3) ノ  $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$  で表せますので、 $13\vec{c} = -13\vec{a} + 26\vec{b}$  となります。したがって  $\vec{m} = 13\vec{c}$  ならば  $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$  となる実数  $\alpha, \beta$  が存在しますので、直線 OA と  $l$  が  $_0$  交わる ことがわかります。

ハ  $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{e}$  でしたので、 $\vec{m} = -9\vec{a} + 19\vec{b} - 90\vec{e}$  となります。 $\vec{e}$  の係数が 0 でないことから  $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$  と表せませんので、直線 OA と  $l$  が  $_1$  交わらない ことがわかります。

ヒ  $\vec{m} = 19\vec{a} - 22\vec{b} + 110\vec{e}$  となります。 $\vec{e}$  の係数が 0 になりませんので、直線 OA と  $l$  が  $_1$  交わらない ことがわかります。

## 所感

本試験に比べてマーク数は少なくなっています。共通問題の割り当ては本試験と異なることには注意です。

### 第1問

数と式に関する問題です。(2)の変形はなかなか見かけない形式だと思いますが、解き方は単純です。

### 第2問

図形と式に関する問題です。(1)で直線と点との距離の公式を持ち出そうものならはまります。図形で考えて進めていきましょう。

### 第3問

積分を利用した問題です。面倒な計算はないですので確実に得点したいです。

### 第4問

三角関数の問題です。値の計算は比較的楽ですが、グラフの選択は増減とかを考えようとすると大変なことになります。

### 第5問

統計処理に関する問題です。原則と定義に従って解き進めていきましょう。

### 第6問

数列の問題です。(1)(2)は教科書で扱う程度のもので、確実に解答したいです。(3)は代入や式の形からうまく使えるものを探していきましょう。

### 第7問

ベクトルを利用した問題です。難しさは控え目ですがマーク数が多いので腕が疲れそうです。