

解答

第1問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア	4	2
イ	5	2
ウ	8	2
エ	4	2
オ	0	2
カ, キ	4, 3	2
ク, ケ	8, 7	3

第2問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ	3, 6, 6	3
エ	0	2
オ, カ	1, 2	2
キ	1	2
ク	2	3
ケ	1	1
コ, サ, シ, ス, セ, ソ	2, 3, 2, 2, 3, 3	2

第3問 (22)		
解答欄	解答	配点
ア	2	2
イ, ウ	0, 0	2
エ, オカ, キ	2, -4, 3	2
ク, ケ	2, 0	2
コ, サ	2, 9	2
シ, ス	0, 2	3
セ	2	3
ソ	3	3
タ	2	3

第4問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア	1	2
イ, ウ	1, 2	2
エ	3	2
オ	2	2
カ	5	2
キ	3	1
ク	5	3
ケ, コ	1, 2	2

第5問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア	4	2
イ	2	2
ウ	3	2
エ, オ	3, 2(順序不問)	2
カ	6	2
キ	8	3
ク	1	3

第6問 (16)		
解答欄	解答	配点
アイ	16	1
ウエ	-2	1
オカ	16	1
キ	2	2
ク	4	3
ケ	0	2
コ	4	2
サ	2	1
シ	1	1
スセ	-1	2

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとめて入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。
(上記の場合、第1問はカに4、キに3を入れた場合のみ2点加わる)

解説

第1問

- (1) ア 正の整数 N を正の整数 m で割った商を q 、余りを r とおくと $N = qm + r$ が成り立つことを数式にも適用できます。

これをふまえると $4x^n = (x-2)Q(x) + k$ がわかります。

- イ $x = 2$ を代入すると $2^n = (2-2) \cdot Q(x) + k$ となりますので、 $(2-2) \cdot Q(x) = 0$ より $5k = 2^n$ がわかります。

- ウ 同様に商を $P(x)$ 、余りを l とおくと $x^n = (2x-1)P(x) + l$ となります。この式に $x = \frac{1}{2}$ を代入することで $8l = \frac{1}{2^n}$ がわかります。

これを利用すると、整式 $P(x)$ を $x - \alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ となることがわかります。(これを剰余定理とよぶ)

- (2) エ 二項定理により $(X+a)^n$ を展開すると X^k の項の係数は $a^{n-k} {}_nC_k$ となります。

これを利用すると X の項の係数は $k=1$ のときの値ですので $2^{n-1} \cdot {}_nC_1 = 4n \cdot 2^{n-1}$ となることがわかります。

- オ $(X+a)^n$ を展開したときの定数項は a^n ですので、 $(X+2)^n$ を展開すると定数項は 02^n となります。

- カ、キ $(X+2)^n = A(X) \cdot X^2 + (n \cdot 2^{n-1})X + 2^n$ で $X = x-2$ を代入すると

$x^n = A(x-2) \cdot (x-2)^2 + (n \cdot 2^{n-1})(x-2) + 2^n$ となります。 $A(x-2) \cdot (x-2)^2$ は $(x-2)^2$ で割り切れますので、

$$R(x) = (n \cdot 2^{n-1})x - n \cdot 2^n + 2^n = 4n \cdot 2^{n-1}x + 3(-n+1) \cdot 2^n \text{ がわかります。}$$

- ク、ケ 同様に $X = 2x-1$ とおくと $x = \frac{X+1}{2}$ とできます。このとき $x^n = \left(\frac{X+1}{2}\right)^n = \frac{(X+1)^n}{2^n}$ ですので、同様に展開すると

$$\frac{(X+1)^n}{2^n} = \frac{B(X) \cdot X^2 + nX + 1}{2^n} = \frac{B(X)}{2^n}X^2 + \frac{n}{2^n}X + \frac{1}{2^n} \text{ とできます。}$$

これに $X = 2x-1$ を代入することで余りは

$$\frac{n}{2^n}(2x-1) + \frac{1}{2^n} = 8\frac{n}{2^{n-1}}x + 7\frac{-n+1}{2^n} \text{ となることがわかります。}$$

第2問

(1)

ア～ウ ①の式を平方完成により変形すると $(x-s)^2 + (y-t)^2 - t^2 = 0$ より $(x-s)^2 + (y-t)^2 = t^2$ と変形できます。

$t > 0$ ですのでこれにより C は中心 (s, t) で半径 t の円であることがわかります。

エ C は中心の y 座標 (の絶対値) が半径に等しくなっていますので、 x 軸との距離が半径に等しいことになります。すなわち C はつねに x 軸と接することがわかります。

(2) オ C は点 $(s, 0)$ を通ります。この点は $-2 < s < 2$ であるならば C_0 の内部にきます。なので C と C_0 が接するならば C は C_0 の内部にくることになり、ゆえに 1内接 することがわかります。

カ C_0 と C が内接するならば半径の差 $|r_0 - r|$ が2つの円の中心の距離に等しくなります。

いま C が C_0 の内部にくることから $r < r_0$ がわかりますので、 $d = r_0 - r$ が成り立ちます。

キ $r_0 = 2, r = t, d = \sqrt{s^2 + t^2}$ であることがわかります。したがって代入により $\sqrt{s^2 + t^2} = 2 - t$ となります。

この両辺を2乗すると $s^2 + t^2 = t^2 - 4t + 4$ となりますので、 $s^2 = -4t + 4$ より $t = \frac{4 - s^2}{4}$ がわかります。

ク C の中心の座標は (s, t) でしたので中心座標 (x, y) は $y = \frac{4 - x^2}{4}$ をみます。

したがって中心の y 座標は x の2次関数になりますので、そのグラフは放物線となります。また頂点が $(0, 1)$ で上に凸であり、2点 $(\pm 2, 0)$ を通ることもわかります。

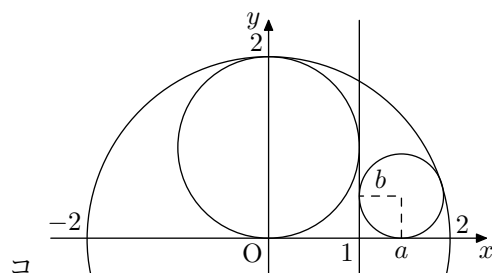
これより、 $-2 < x < 2$ の範囲で考えることであてはまるものは選択肢2の図形となります。

(3) ケ C は円の半径が y 座標の絶対値に等しいので半径の最大値は $s = 0, t = 1$ のときの1となります。これが C_1 に一致するとき C_1 の半径が最大となります。

この状態で C_1 と $x = k$ が接しているとき、 $k = \pm 1$ となります。

C_1 は $x < k$ の領域に中心がくることになりますので、 $0 < k$ が必要です。

このことから、 C_1 の半径が最大となるのは $k = 1$ のときとわかります。



C_2 の中心の座標を (a, b) とおくと半径は b であり、また中心が領域 $x > k$ にあること、 C_2 が直線 $x = 1$ に接していることから $a = 1 + b$ がわかります。

また (2) より $b = \frac{4 - a^2}{4}$ をみてもわかります。これに代入すると $b = \frac{4 - (1 + b)^2}{4}$ となり、分母をはらって展開すると $b^2 + 6b - 3 = 0$ がわかります。

さらに変形すると $(b + 3)^2 = 12$ となりますので、 $b = -3 \pm 2\sqrt{3}$ となります。

条件は $b > 0$ ですので、これをみても $b = 2\sqrt{3} - 3$ であることがわかります。

このとき $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ より $0 < b < 1$ が成り立ちますので、 $1 < a < 2$ も確かめられます。

したがって C_2 の座標は $(2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} - 3)$ となります。

第3問

- (1) ア 微積分の基本により、 $\int_0^x f(t)dt$ を x で微分すると $f(x)$ が得られます。
したがって $F'(x) = x(x-2) = \underline{x^2 - 2x}$ となります。
- イ 導関数において値が正から負に変わるときに、元の関数は極大値をとります。
 $F'(x) = x(x-2)$ よりその値は $\underline{x=0}$ のときの値となります。
- ウ 任意の関数 $f(x)$ 、実数 a において $\int_a^a f(t)dt = 0$ が成り立ちます。
したがって $F(0) = \int_0^0 t(t-2)dt = \underline{0}$ がわかります。
- エ 導関数において値が負から正に変わるときに、元の関数は極小値をとります。
同様に考えると $\underline{x=2}$ のときにとることがわかります。
- オ～キ $F(x) = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^x = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ と計算できますので、 $F(2) = \frac{8}{3} - 4 = \underline{-\frac{4}{3}}$ がわかります。
- (2) ク $0 \leq t \leq 2$ のときは $t(t-2) \leq 0$ であり、実数 r が $r \leq 0$ をみたすならば $|r| = -r$ となりますので、
 $\underline{2|t(t-2)| = -t(t-2)}$ となります。
- ケ $t \leq 0$ または $2 \leq t$ のときは $t(t-2) \geq 0$ であり、実数 r が $r \geq 0$ をみたすならば $|r| = r$ となりますので、
 $\underline{0|t(t-2)| = t(t-2)}$ となります。
- コ $0 \leq t \leq 2$ のとき $|t(t-2)| = -t(t-2)$ でしたので、 $0 \leq x \leq 2$ のときは $G(x) = \underline{2\int_0^x \{-t(t-2)\}dt}$ とできます。
- サ さらに計算すると $\int_0^x \{-t(t-2)\}dt = -\int_0^x t(t-2)dt = \underline{-F(x)}$ がわかります。
- シ $2 \leq t$ のときは $|t(t-2)| = t(t-2)$ でしたので $2 \leq x$ のときは $G(x) = \int_0^2 \{-t(t-2)\}dt + \underline{0\int_2^x t(t-2)dt}$ となります。
- ス さらに計算すると $G(x) = G(2) + \int_0^x t(t-2)dt - \int_0^2 t(t-2)dt$
 $= -F(2) + F(x) - F(2) = F(x) - 2F(2) = \underline{2F(x) + \frac{8}{3}}$ がわかります。
- セ $y = G(x)$ の導関数 $y = G'(x) = |x(x-2)|$ は関数 $y = G(x)$ の x における変化の割合といえます。
いま $G'(x) \geq 0$ が $0 \leq x$ でつねに成り立ちますので、 $G(x)$ は x が大きくなると減少しない変化をすることになり、すなわちグラフでは右下がりが存在しないことがわかります。
また $G'(2) = 0$ ですので $(2, G(2))$ では変化が0になるといえます。
これらから、あてはまるものは 選択肢2の図 となります。
- (3) ソ $\alpha \leq x \leq \beta$ のとき $(t-\alpha)(t-\beta) \leq 0$ 、 $\beta \leq x$ のとき $(t-\alpha)(t-\beta) \geq 0$ となります。これより $\alpha \leq x \leq \beta$ のときは
 $H(x) = \int_\alpha^x \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt - \int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta)dt = -2\int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta)dt$ となり、 $\beta \leq x$ のときは
 $H(x) = \int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt + \int_\beta^x (t-\alpha)(t-\beta)dt - \{\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)dt + \int_\beta^x (t-\alpha)(t-\beta)dt\}$
 $= \int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt - \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)dt = H(\beta)$ となります。
これより、 $\underline{3\beta \leq x}$ のときに $H(x)$ の値が一定になることがわかります。
- タ このときの $H(x) = H(\beta)$ であり、 $H(\beta) = 2\int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt = 2\int_\alpha^\beta |(t-\alpha)(t-\beta)|dt$ と変形できます。
ここから、この値は $\underline{2\text{関数 } y = (x-\alpha)(x-\beta) \text{ のグラフと } x \text{ 軸で囲まれた図形の面積の } 2 \text{ 倍}}$ を表すことがわかります。

第4問

- (1) ア x^2 を x で微分するとき、 $h \neq 0$ で計算できる変化率 $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$ を考え、これを $h = 0$ に拡張して考えられることを利用して求めます。

これより ${}_1y' = 2x$ と求められます。

イ, ウ 導関数はグラフにおいては、指定された x 座標において接線があるならばその傾きになるといえます。この直線が点 $A(a, a^2)$ を通りますので、 l の式は $y = 2a(x - a) + a^2$ より $y = {}_12ax - {}_2a^2$ となります。

エ l と x 軸との交点の座標を $B(b, 0)$ とおくと $0 = 2ab - a^2$ がわかります。したがって $b = \frac{a}{2}$ がわかります。

P の座標は $(a, 0)$ であるので、 l と線分 AP と x 軸で囲まれた図形は $AP = a^2, BP = \left| \frac{a}{2} - a \right| = \frac{a}{2}$ の直角三角形となります。

したがって $T = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = {}_3\frac{1}{4}a^3$ がわかります。

オ C と x 軸と線分 AP で囲まれた部分の面積は積分することで得られます。 C は x 軸上の点 $(0, 0)$ を通り、 $x \geq 0$ で $x^2 \geq 0$ ですので計算すると

$$\int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = {}_2\frac{1}{3}a^3 \text{ となります。}$$

カ これより、 $S = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3 = {}_5\frac{1}{12}a^3$ がわかります。

キ $S = \frac{1}{12}a^3, T = \frac{1}{4}a^3$ がわかりましたので、 $\frac{S}{T} = \frac{\frac{1}{12}a^3}{\frac{1}{4}a^3} = \frac{4}{12} = {}_3\frac{1}{3}$ が得られます。

ク 同様に計算していきましょう。まず微分すると $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$ から $y' = 3x^2$ がわかります。

ここから接線の式は $y = 3a^2(x - a) + a^3$ すなわち $y = 3a^2x - 2a^3$ が得られます。

この直線と x 軸との交点を $C(c, 0)$ とおくと $0 = 3a^2c - 2a^3$ より $c = \frac{2}{3}a$ 、したがって $CP = \frac{a}{3}$ となり、

$$T = \frac{1}{2} \cdot a^3 \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^4}{6} \text{ がわかります。}$$

C と x 軸と線分 AP で囲まれた部分の面積は $\int_0^a x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^4}{4}$ となりますので、ここから

$$S = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{6} = \frac{a^4}{12} \text{ がわかります。}$$

したがって、 $\frac{S}{T} = \frac{\frac{1}{12}a^4}{\frac{1}{6}a^4} = {}_5\frac{1}{2}$ がわかります。

(ちなみに $n \geq 4$ でも同様の計算ができ、 $\frac{S}{T} = \frac{n-1}{n+1}$ が得られる)

- (2) ケ $n = 2$ のとき直線 OA は原点と点 $A(a, a^2)$ を通ることから $y = ax$ となります。

線分 OA, AP, OP で囲まれる図形は P が直角の三角形ですので、その面積は $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a = \frac{1}{2}a^3$ となります。

また $0 \leq x \leq a$ のとき $ax - x^2 = (a - x)x \geq 0$ ですので C の $0 \leq x \leq a$ における部分は三角形 OAP の内部にきます。

したがって C と線分 AP と OP で囲まれる図形は三角形 OAP に含まれますので、 $U = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{6}a^3$ となります。

よって $T = \frac{1}{4}a^3$ と $a > 0$ より $\frac{1}{4}a^3 > \frac{1}{6}a^3$ 、すなわち ${}_1A$ によらず T が U より大きくなることがわかります。

コ 同様に計算すると直線 OA の式は $y = a^2x$ 、 $0 \leq x \leq a$ のとき $a^2x - x^3 = (a - x)(a + x)x \geq 0$ となり、
 $U = \frac{1}{2} \cdot a^3 \cdot a - \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{4}a^4$ がわかります。

$T = \frac{1}{6}a^4$ ですので ${}_2A$ によらず T が U より小さいことがわかります。

($S + T + U = \frac{1}{2}a^4$ と $U = \frac{1}{4}a^4$ から $S + T = U$ を示して導くこともできる)

第5問

- (1) ア $\sin \frac{x+T}{2} = \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{T}{2} \right)$ と変形することで、問題文をあてはめることで $\sin \frac{x+T}{2} = \sin \frac{x}{2}$ が成り立つのは $\frac{T}{2} = 2\pi, 4\pi, \dots$ のとき、すなわち $T = 4\pi, 8\pi, \dots$ のときであることがわかります。
 T の大小は $\frac{T}{2}$ の大小に一致することから、それらのうち最小のものは 4π であることがわかります。
- イ 実数 x において $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1$ であること、周期が 4π であることから、選択肢 2 のグラフ が適切です。
- (2) ウ $\sin \frac{x}{2} = -1$ となるような正の実数 x を考えると、 $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, \dots$ となることから $x = 3\pi, 7\pi, 11\pi, \dots$ となります。
 また、 $\cos \frac{x}{3} = -1$ となるような x は $\frac{x}{3} = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ から $x = 3\pi, 9\pi, 15\pi, \dots$ となります。
 これより、 $\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{3} = -1$ となるような正の実数 x で最小のものは 3π であることがわかります。
- エ, オ $\sin \frac{3\pi+\alpha}{2} = \sin \left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\alpha}{2} \right) = -\cos \frac{\alpha}{2}$ 、 $\cos \frac{3\pi+\alpha}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\alpha}{3} \right) = -\cos \frac{\alpha}{3}$ が成り立ちますので、
 $f(3\pi+\alpha) = -3\cos \frac{\alpha}{2} - 2\cos \frac{\alpha}{3}$ がわかります。
- カ $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$ となるような α は $\frac{\alpha}{2} = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ から $\alpha = 4\pi, 8\pi, 12\pi, \dots$ となります。
 また $\cos \frac{\alpha}{3} = 1$ となるような α を同様に求めると $\alpha = 6\pi, 12\pi, 18\pi, \dots$ となります。
 求めるものはこれらを同時にみたす正で最小のもので、その値は 6π となります。
- キ $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点での x 座標では、 $f(x) = g(x)$ が成り立ちます。
 $f(x) = g(x)$ に代入すると $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3} = \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{3}$ となりますので、整理すると $\cos \frac{x}{3} = 0$ をみたす x 座標が共有点となることがわかります。
 したがって、共有点の x 座標は n を整数とすると $\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ より $\frac{3}{2}\pi + 3n\pi$ と表せることがわかります。
- ク $T = 12\pi$ であるので、 $0 \leq x \leq T$ の範囲で $f(x) = g(x)$ となる x の値は $x = \frac{3}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \frac{15}{2}\pi, \frac{21}{2}\pi$ の 4 つです。
 選択肢のグラフで $0 \leq x \leq T$ における共有点の個数を数えると順に 3, 4, 5, 6, 2 となります。
 したがってあてはまるものはその範囲で共有点が 4 点ある 選択肢 1 のグラフ であることがわかります。

第6問

(1) アイ $2^2 = 4$ より $\log_2 4 = 2$ ですので、 $4^{\log_2 4} = 4^2 = 16$ です。

ウエ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$ ですので、 $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ がわかります。

オカ $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 \frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{16}\right)} = 16$ と計算できます。

キ $\log_s t^k = k \log_s t$ と変形できますので、 $\log_2 a^{\log_2 a} = (\log_2 a) \cdot (\log_2 a) = 2(\log_2 a)^2$ が成り立ちます。

ク 両辺で 2 を底とする対数をとることで、 $\log_2 a^{\log_2 a} = \log_2 b^{\log_2 b}$ となります。 $(s, t$ が実数で $s > 0$ なら $s^t > 0$ なので、真数条件は気にしなくてよい)

これを変形すると $(\log_2 a)^2 = (\log_2 b)^2$ となりますので、これをみたす必要十分条件は $\log_2 a = \log_2 b$ または $\log_2 a = -\log_2 b$ となります。

$\log_2 a = \log_2 b$ は $a = b$ 、 $\log_2 a = -\log_2 b$ は $a = \frac{1}{b}$ となりますので、必要十分条件は $a = b$ または $ab = 1$ となることがわかります。

(2) ケ 真数条件から $2^{x+1} + 1 > 0$ が必要ですので、 $2^{x+1} > -1$ となります。

ただ x が実数ならば $2^x > 0$ がつねに成り立ちますので、 $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x > 0 > -1$ がつねに成り立ちます。

したがって x のとりうる値の範囲は 実数全体 となります。

コ こちらは真数条件が $3 \cdot 2^x - 1 > 0$ となりますので、 $2^x > \frac{1}{3}$ と変形できます。

したがって $x > \log_2 \frac{1}{3}$ より、とりうる値の範囲は $x > -\log_2 3$ となります。

サ $t = 2^x$ とおくと $f(x) = 2t + 1, g(x) = 3t - 1$ となります。したがって $f(x) = g(x)$ は $2t + 1 = 3t - 1$ となり、これをみたす t は $t = 2$ であることがわかります。

シ $t = 2$ のとき $2 = 2^1$ と変形することで $x = 1$ が得られます。

スセ $f(x) = g(x)$ であるような x は $x = 1$ のみでしたので、ほかの可能性として $f(x)g(x) = 1$ となるような x を調べます。

同様に $t = 2^x$ とおくと $(2t + 1)(3t - 1) = 1$ より展開して $6t^2 + t - 2 = 0$ となります。

$6t^2 + t - 2 = (2t - 1)(3t + 2)$ と変形できますので、 $g(x)$ の真数条件から $t > \frac{1}{3}$ より $t = \frac{1}{2}$ となります。

$\frac{1}{2} = 2^{-1}$ ですので、残りの解は $x = -1$ であることがわかります。

所感

本試験に比べてマークの数は減っていますが、ひとつとびに解く必要があるものが増えている気がします。

第1問

数と式に関する問題です。(2)の変形はなかなか見かけない形式だと思いますが、解き方は単純です。

第2問

図形と式に関する問題です。(1)で直線と点との距離の公式を持ち出そうものならはまります。図形で考えて進めていきましょう。

第3問

積分を利用した問題です。面倒な計算はないですので確実に得点したいです。

第4問

関数の微積分を利用した問題です。後半は途中の値を解答することがありませんので、手数がかかります。

第5問

三角関数の問題です。値の計算は比較的楽ですが、グラフの選択は増減とかを考えようとする大変なことになります。

第6問

指数対数関数の問題です。最後は少々計算がいりますが、それ以外は素直に進められるでしょう。