

解答

第1問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア	4	2
イ	5	2
ウ	8	2
エ	4	2
オ	0	2
カ, キ	4, 3	2
ク, ケ	8, 7	3

第2問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ	3, 6, 6	3
エ	0	2
オ, カ	1, 2	2
キ	1	2
ク	2	3
ケ	1	1
コ, サ, シ, ス, セ, ソ	2, 3, 2, 2, 3, 3	2

第3問 (22)		
解答欄	解答	配点
ア	2	2
イ, ウ	0, 0	2
エ, オカ, キ	2, -4, 3	2
ク, ケ	2, 0	2
コ, サ	2, 9	2
シ, ス	0, 2	3
セ	2	3
ソ	3	3
タ	2	3

第4問 (16)		
解答欄	解答	配点
アイ, ウエ, オ	-3, -1, 2	2
カ, キ	0, 2	2
ク	6	1
ケ, コサ, シ, ス	3, -1, 2, 6	2
セ	1	2
ソ	0	2
タ, チ	0, 4	2
ツ	5	3

第5問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア	1	1
イウエ	889	1
オカ	20	1
キク	25	1
ケ	1	1
コ	0	2
サ	5	2
シ	0	3
ス	1	1
セ	2	3

第6問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア	3	2
イ, ウ, エ	3, 1, 5	2
オカ, キク	-1, -2	2
ケ, コ, サシ	0, 3, -1	2
ス	7	1
セソ, タ, チ	-1, 2, 0	2
ツテ, トナニ	10, -10	1
ヌ, ネ	0, 3	2
ノ, ハ, ヒ	0, 1, 1	2

第7問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア	1	2
イ, ウ	4, 2	1
エ	3	2
オ	1	2
カ	2	2
キ	7	2
ク	4	3
ケ	5	3

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとまって入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。
(上記の場合、第1問はカに4、キに3を入れた場合のみ2点が加わる)

解説

第1問

- (1) ア 正の整数 N を正の整数 m で割った商を q 、余りを r とおくと $N = qm + r$ が成り立つことを数式にも適用できます。

これをふまえると $4x^n = (x-2)Q(x) + k$ がわかります。

- イ $x = 2$ を代入すると $2^n = (2-2) \cdot Q(x) + k$ となりますので、 $(2-2) \cdot Q(x) = 0$ より $5k = 2^n$ がわかります。

- ウ 同様に商を $P(x)$ 、余りを l とおくと $x^n = (2x-1)P(x) + l$ となります。この式に $x = \frac{1}{2}$ を代入することで $8l = \frac{1}{2^n}$ がわかります。

これを利用すると、整式 $P(x)$ を $x - \alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ となることがわかります。(これを剰余定理とよぶ)

- (2) エ 二項定理により $(X+a)^n$ を展開すると X^k の項の係数は $a^{n-k} {}_n C_k$ となります。

これを利用すると X の項の係数は $k=1$ のときの値ですので $2^{n-1} \cdot {}_n C_1 = 4n \cdot 2^{n-1}$ となることがわかります。

- オ $(X+a)^n$ を展開したときの定数項は a^n ですので、 $(X+2)^n$ を展開すると定数項は 02^n となります。

- カ、キ $(X+2)^n = A(X) \cdot X^2 + (n \cdot 2^{n-1})X + 2^n$ で $X = x-2$ を代入すると

$x^n = A(x-2) \cdot (x-2)^2 + (n \cdot 2^{n-1})(x-2) + 2^n$ となります。 $A(x-2) \cdot (x-2)^2$ は $(x-2)^2$ で割り切れますので、

$R(x) = (n \cdot 2^{n-1})x - n \cdot 2^n + 2^n = 4n \cdot 2^{n-1}x + 3(-n+1) \cdot 2^n$ がわかります。

- ク、ケ 同様に $X = 2x-1$ とおくと $x = \frac{X+1}{2}$ とできます。このとき $x^n = \left(\frac{X+1}{2}\right)^n = \frac{(X+1)^n}{2^n}$ ですので、同様に展開すると

$\frac{(X+1)^n}{2^n} = \frac{B(X) \cdot X^2 + nX + 1}{2^n} = \frac{B(X)}{2^n} X^2 + \frac{n}{2^n} X + \frac{1}{2^n}$ とできます。

これに $X = 2x-1$ を代入することで余りは

$\frac{n}{2^n}(2x-1) + \frac{1}{2^n} = 8 \frac{n}{2^{n-1}}x + 7 \frac{-n+1}{2^n}$ となることがわかります。

第2問

(1)

ア～ウ ①の式を平方完成により変形すると $(x-s)^2 + (y-t)^2 - t^2 = 0$ より $(x-s)^2 + (y-t)^2 = t^2$ と変形できます。

$t > 0$ ですのでこれにより C は中心 (s, t) で半径 t の円であることがわかります。

エ C は中心の y 座標 (の絶対値) が半径に等しくなっていますので、 x 軸との距離が半径に等しいことになります。すなわち C はつねに x 軸と接することがわかります。

(2) オ C は点 $(s, 0)$ を通ります。この点は $-2 < s < 2$ であるならば C_0 の内部にきます。なので C と C_0 が接するならば C は C_0 の内部にくることになり、ゆえに 1内接 することがわかります。

カ C_0 と C が内接するならば半径の差 $|r_0 - r|$ が2つの円の中心の距離に等しくなります。

いま C が C_0 の内部にくることから $r < r_0$ がわかりますので、 $d = r_0 - r$ が成り立ちます。

キ $r_0 = 2, r = t, d = \sqrt{s^2 + t^2}$ であることがわかります。したがって代入により $\sqrt{s^2 + t^2} = 2 - t$ となります。

この両辺を2乗すると $s^2 + t^2 = t^2 - 4t + 4$ となりますので、 $s^2 = -4t + 4$ より $t = \frac{4 - s^2}{4}$ がわかります。

ク C の中心の座標は (s, t) でしたので中心座標 (x, y) は $y = \frac{4 - x^2}{4}$ をみます。

したがって中心の y 座標は x の2次関数になりますので、そのグラフは放物線となります。また頂点が $(0, 1)$ で上に凸であり、2点 $(\pm 2, 0)$ を通ることもわかります。

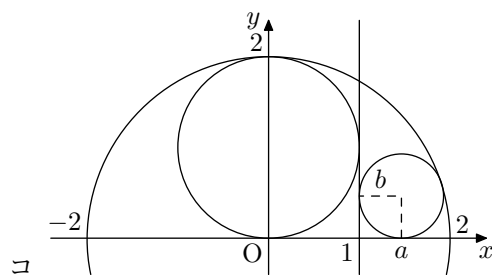
これより、 $-2 < x < 2$ の範囲で考えることであてはまるものは選択肢2の図形となります。

(3) ケ C は円の半径が y 座標の絶対値に等しいので半径の最大値は $s = 0, t = 1$ のときの1となります。これが C_1 に一致するとき C_1 の半径が最大となります。

この状態で C_1 と $x = k$ が接しているとき、 $k = \pm 1$ となります。

C_1 は $x < k$ の領域に中心がくることになりますので、 $0 < k$ が必要です。

このことから、 C_1 の半径が最大となるのは $k = 1$ のときとわかります。



C_2 の中心の座標を (a, b) とおくと半径は b であり、また中心が領域 $x > k$ にあること、 C_2 が直線 $x = 1$ に接していることから $a = 1 + b$ がわかります。

また (2) より $b = \frac{4 - a^2}{4}$ をみてもわかります。これに代入すると $b = \frac{4 - (1 + b)^2}{4}$ となり、分母をはらって展開すると $b^2 + 6b - 3 = 0$ がわかります。

さらに変形すると $(b + 3)^2 = 12$ となりますので、 $b = -3 \pm 2\sqrt{3}$ となります。

条件は $b > 0$ ですので、これをみても $b = 2\sqrt{3} - 3$ であることがわかります。

このとき $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ より $0 < b < 1$ が成り立ちますので、 $1 < a < 2$ も確かめられます。

したがって C_2 の座標は $(2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} - 3)$ となります。

第3問

- (1) ア 微積分の基本により、 $\int_0^x f(t)dt$ を x で微分すると $f(x)$ が得られます。
したがって $F'(x) = x(x-2) = \underline{x^2 - 2x}$ となります。
- イ 導関数において値が正から負に変わるときに、元の関数は極大値をとります。
 $F'(x) = x(x-2)$ よりその値は $\underline{x=0}$ のときの値となります。
- ウ 任意の関数 $f(x)$ 、実数 a において $\int_a^a f(t)dt = 0$ が成り立ちます。
したがって $F(0) = \int_0^0 t(t-2)dt = \underline{0}$ がわかります。
- エ 導関数において値が負から正に変わるときに、元の関数は極小値をとります。
同様に考えると $\underline{x=2}$ のときにとることがわかります。
- オ～キ $F(x) = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^x = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ と計算できますので、 $F(2) = \frac{8}{3} - 4 = \underline{-\frac{4}{3}}$ がわかります。
- (2) ク $0 \leq t \leq 2$ のときは $t(t-2) \leq 0$ であり、実数 r が $r \leq 0$ をみたすならば $|r| = -r$ となりますので、
 $\underline{2|t(t-2)| = -t(t-2)}$ となります。
- ケ $t \leq 0$ または $2 \leq t$ のときは $t(t-2) \geq 0$ であり、実数 r が $r \geq 0$ をみたすならば $|r| = r$ となりますので、
 $\underline{0|t(t-2)| = t(t-2)}$ となります。
- コ $0 \leq t \leq 2$ のとき $|t(t-2)| = -t(t-2)$ でしたので、 $0 \leq x \leq 2$ のときは $G(x) = \underline{2\int_0^x \{-t(t-2)\}dt}$ とできます。
- サ さらに計算すると $\int_0^x \{-t(t-2)\}dt = -\int_0^x t(t-2)dt = \underline{-F(x)}$ がわかります。
- シ $2 \leq t$ のときは $|t(t-2)| = t(t-2)$ でしたので $2 \leq x$ のときは $G(x) = \int_0^2 \{-t(t-2)\}dt + \underline{0\int_2^x t(t-2)dt}$ となります。
- ス さらに計算すると $G(x) = G(2) + \int_0^x t(t-2)dt - \int_0^2 t(t-2)dt$
 $= -F(2) + F(x) - F(2) = F(x) - 2F(2) = \underline{2F(x) + \frac{8}{3}}$ がわかります。
- セ $y = G(x)$ の導関数 $y = G'(x) = |x(x-2)|$ は関数 $y = G(x)$ の x における変化の割合といえます。
いま $G'(x) \geq 0$ が $0 \leq x$ でつねに成り立ちますので、 $G(x)$ は x が大きくなると減少しない変化をすることになり、すなわちグラフでは右下がりが存在しないことがわかります。
また $G'(2) = 0$ ですので $(2, G(2))$ では変化が0になるといえます。
これらから、あてはまるものは 選択肢2の図 となります。
- (3) ソ $\alpha \leq x \leq \beta$ のとき $(t-\alpha)(t-\beta) \leq 0$ 、 $\beta \leq x$ のとき $(t-\alpha)(t-\beta) \geq 0$ となります。これより $\alpha \leq x \leq \beta$ のときは
 $H(x) = \int_\alpha^x \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt - \int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta)dt = -2\int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta)dt$ となり、 $\beta \leq x$ のときは
 $H(x) = \int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt + \int_\beta^x (t-\alpha)(t-\beta)dt - \{\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)dt + \int_\beta^x (t-\alpha)(t-\beta)dt\}$
 $= \int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt - \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)dt = H(\beta)$ となります。
これより、 $\underline{3\beta \leq x}$ のときに $H(x)$ の値が一定になることがわかります。
- タ このときの $H(x) = H(\beta)$ であり、 $H(\beta) = 2\int_\alpha^\beta \{-(t-\alpha)(t-\beta)\}dt = 2\int_\alpha^\beta |(t-\alpha)(t-\beta)|dt$ と変形できます。
ここから、この値は $\underline{2\text{関数 } y = (x-\alpha)(x-\beta) \text{ のグラフと } x \text{ 軸で囲まれた図形の面積の2倍}}$ を表すことがわかります。

第4問

(1)

ア～オ a_1 は作り方から初項 -3 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列ですので、 $a_n = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ であることがわかります。

カ n が奇数のとき $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ が $-\frac{1}{2}$ の偶数乗になりますので、正の値になります。したがって $a_1 < 0$ より $a_n < 0$ が成り立ちます。

キ n が偶数のときは $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ が負の値をとります。同様にして $a_n > 0$ がわかります。

(2) ク $b_n + \alpha = -\frac{1}{2}(b_n + \alpha)$ となるような α を求められれば数列 $\{b_n + \alpha\}$ が等比数列になります。なのでこの α を求めましょう。

右辺を展開すると $-\frac{1}{2}b_n - \frac{\alpha}{2}$ であり、左辺に元の漸化式を代入することで $-\frac{1}{2}b_n - 9 + \alpha = -\frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}\alpha$ が成り立ちます。

したがって $\alpha - 9 = -\frac{1}{2}\alpha$ より $\alpha = 6$ とすればよいことがわかります。

ケ～ス これにより数列 $\{b_n + 6\}$ が初項 $-3 + 6$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となりますので、 $b_n + 6 = (-3 + 6) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となります。

よって $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 6$ がわかります。

セ n が偶数のときは $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0$ となります。

n が奇数のときは $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$ であり、 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ が成り立ちます。

したがって n が奇数のときは n が大きくなるほど $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ が小さくなりますので、

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 1$ が成り立ちます。(等号は $n = 1$ で成立)

したがって $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq A$ がすべての正の整数 n で成り立つような A で最小の値は $A = 1$ となります。

ソ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 1$ を利用すると $b_n \leq 3 \cdot 1 - 6 = -3 < 0$ がわかります。

したがって $b_n < 0$ がすべての正の整数 n について成り立つことがわかります。

(3) タ すべての正の整数 k について c_k は実数ですので $c_k^2 \geq 0$ 、すなわち $c_{k+1} \leq -\frac{1}{2} \cdot 0 + 4 = 4$ が成り立ちます。

したがって $c_{k+1} \leq 4$ は c_k によらず成り立つことがわかります。

チ $-4 \leq c_{k+1}$ であるならば $-4 \leq -\frac{1}{2}c_k^2 + 4$ となります。整理すると $c_k^2 \leq 16 = 4^2$ となりますので、 $-4 \leq c_{k+1}$ が成り立つならば $-4 \leq c_k \leq 4$ であることがわかります。

したがって $-4 \leq c_{k+1}$ は $-4 \leq c_k \leq 4$ で成り立ち、それ以外で成り立たないことがわかります。

ツ それぞれみていきましょう。なお、「すべての自然数 n について条件 P が成り立つ」の否定は、「条件 P が成り立たない自然数 n が存在する」であることに注意です。

(I) 漸化式から α の値に関係なく $c_2 \leq 4$ でしたので、 $c_n > 4$ が成り立たない n が存在します。なので命題は偽となります。

- (II) 同様にして漸化式から c_{n-1} の値に関係なく $c_n \leq 4$ が成立しますので、命題は真といえます。
- (III) $\alpha = -2$ のときに計算すると $c_2 = 2$ となり、この命題の反例ができます。なので命題は偽といえます。

以上より、あてはまるものは $\text{_5(I) 偽、(II) 真、(III) 偽}$ となります。

第5問

- (1) ア 800 点が与えられるカードは番号が 022, 122, $\dots$, 922 の 10 枚ありますので、 $p_2 = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ がわかります。

イ～エ $X = 0$ となる場合は $X = 2000, 800, 100$ いずれでもない場合です。したがって $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ となりますので、

$$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - \frac{1}{1000} - \frac{10}{1000} - \frac{100}{1000} = \frac{889}{1000} \text{ となります。}$$

オカ 代入することで $E(X) = 2000 \cdot \frac{1}{1000} + 800 \cdot \frac{1}{100} + 100 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{889}{1000} = 2 + 8 + 10 + 0 = 20$ となります。

なお、 $V(X)$ の式は $V(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 - \{E(X)\}^2$ と変形できますので、これを利用すると確認しやすいです。

- (2) キク 得られる点はくじの得点から 25 点を引いたものとなりますので、 $Y = X - 25$ となります。

ケ $E(Y) = (x_1 - c)p_1 + (x_2 - c)p_2 + (x_3 - c)p_3 + (x_4 - c)p_4 = (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4) - c(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$ と変形することで $E(Y) = E(X) - c$ がわかります。

コ $V(Y) = \{(x_1 - c) - E(Y)\}^2 p_1 + \{(x_2 - c) - E(Y)\}^2 p_2 + \{(x_3 - c) - E(Y)\}^2 p_3 + \{(x_4 - c) - E(Y)\}^2 p_4$
 $= \{(x_1 - c) - (E(X) - c)\}^2 p_1 + \{(x_2 - c) - (E(X) - c)\}^2 p_2$
 $+ \{(x_3 - c) - (E(X) - c)\}^2 p_3 + \{(x_4 - c) - (E(X) - c)\}^2 p_4$
 $= \{x_1 - E(X)\}^2 p_1 + \{x_2 - E(X)\}^2 p_2 + \{x_3 - E(X)\}^2 p_3 + \{x_4 - E(X)\}^2 p_4$ と変形することで $V(Y) = V(X)$ がわかります。

サ それぞれのくじ引きは独立な試行ですので、 $E(\bar{Y}) = \frac{1}{400} \{E(Y_1) + \dots + E(Y_{400})\} = \frac{400E(Y)}{400} = E(Y)$ 、
 $V(\bar{Y}) = \frac{1}{400^2} V(Y_1 + \dots + Y_{400}) = \frac{1}{400^2} \{V(Y_1) + \dots + V(Y_{400})\} = \frac{400V(Y)}{400^2} = \frac{1}{400} V(Y)$ がわかります。

したがって標本平均は平均 $E(Y)$ 、分散 $\frac{V(Y)}{400}$ ですので、近似的に正規分布 ${}_5N\left(E(Y), \frac{V(Y)}{400}\right)$ に従います。

シ $Y_1 + \dots + Y_{400} \geq 0$ は $\bar{Y} \geq 0$ と変形できます。

$\bar{Y}$ の平均を m 、標準偏差を σ とおくと $m = E(Y) = E(X) - c = -5$ 、 $\sigma = \sqrt{\frac{V(Y)}{400}} = \sqrt{\frac{V(X)}{400}} = \frac{\sqrt{110}}{2}$ となります。

$m + a\sigma = 0$ となるような a を求めると $a = -\frac{m}{\sigma} = \frac{10}{\sqrt{110}}$ となりますので、

$\bar{Y} \geq 0$ はさらに $\bar{Y} \geq m + \frac{10}{\sqrt{110}}\sigma$ と変形できます。

すなわち $P(Y_1 + \dots + Y_{400} \geq 0)$ は標準正規分布のグラフにおいて $z \geq \frac{10}{\sqrt{110}}$ の範囲にくる部分の面積となります。

問題文の近似を使うと $\frac{10}{\sqrt{110}} = \frac{\sqrt{110}}{11} = 0.95\dots$ となり、この値で正規分布表をみると得られる値 k は $0.3289 < k < 0.3315$ をみたすことがわかります。

これより、求める確率を p とおくと $p = 0.5 - k$ より $0.1685 < p < 0.1711$ となりますので、選択肢では 0.17 が適当といえます。

- (3) ス 3 回くじを引いて得点が 1000 点になる場合を考えましょう。まず 3 回とも 100 点だと 1000 点に届きません。また 2000 点のくじを引いていないのも自明ですので、800 点のくじを 1 回引いていることがわかります。

すると残り 2 回で 200 点となりますが、これは 2 回とも 100 点のくじを引いた場合に限られることがわかります。

したがって 1000 点をとる確率は 800 点を 1 回、100 点を 2 回引く確率ですので、

$${}_3C_1 \cdot \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{3}{10000} = 0.0003 \text{ となることがわかります。}$$

セ 信頼度 95%の信頼区間を求めるため、まずは正規分布表から $\frac{0.95}{2} = 0.475$ となるような z_0 を探しましょう。

すると $z_0 = 1.96$ のときの値であることがわかります。

したがって、信頼区間の幅は標本の平均 m' 、標本の標準偏差 σ' を用いて

$$m' - 1.96 \cdot \frac{\sigma'}{\sqrt{400}} \leq m \leq m' + 1.96 \cdot \frac{\sigma'}{\sqrt{400}} \text{ と表せます。}$$

いま $\sigma' = 75$ でしたので $1.96 \cdot \frac{\sigma'}{\sqrt{400}} = \frac{1.96 \cdot 75}{20} = 7.35$ となり、 $m' = 16.75$ より信頼区間は $29.40 \leq m \leq 24.10$ となります。

第6問

(1) ア $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ}$ と変形することで $\overrightarrow{OQ} = \vec{m} + t\vec{b}$ がわかります。

イ～エ $s\vec{a} = \vec{m} + t\vec{b}$ を成分で表すことで

$$(0, -3s, s) = (2, 3, 5) + (t, 0, 3t) = (2+t, 3, 5+3t) \text{ がわかります。}$$

オ～ク x 成分の式から $0 = 2 + t$ 、 y 成分の式から $-3s = 3$ となるので、整理すると $s = -1, t = -2$ がわかります。このとき $s = 5 + 3t$ も成立していることがわかります。

ケ～シ 得られた値を代入すると交点の座標は $(0, 3, -1)$ となることがわかります。

ス $\vec{m} = (2, 3, -5)$ のときは $\vec{m} + t\vec{b} = (2+t, 3, -5+3t)$ になります。

(2)

セ～チ $\vec{m} = (2, 3, 5)$ であるとき、(1) より $(-1) \cdot \vec{a} = \vec{m} - 2\vec{b}$ でしたので $\vec{m} = (-1) \cdot \vec{a} + 2\vec{b} + 0 \cdot \vec{e}$ と変形できます。すなわち $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 0$ がわかります。

ツテ $(2, 3, -5) = (2, 3, 5) + (0, 0, -10)$ です。 $\vec{m} = (2, 3, 5) - 10\vec{e}$ となります。

ト～ニ $(2, 3, 5) = (-1) \cdot \vec{a} + 2\vec{b}$ でしたので $\vec{m} = (-1) \cdot \vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{e}$ 、すなわち $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = -10$ がわかります。

ヌ、ネ 直線 OA と l が交わるならば $s\vec{a} = \vec{m} + t\vec{b}$ をみたす s, t がありますので、

$$\vec{m} = 0s\vec{a} + 3(-t)\vec{b} \text{ が成り立つことがわかります。}$$

(ちなみに 1 通りになるのは零ベクトル $(0, 0, 0)$ を $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{e}$ の形式にしようとする $\alpha = \beta = \gamma = 0$ が必要であることからわかる)

(3) ノ $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ で表せますので、 $13\vec{c} = -13\vec{a} + 26\vec{b}$ となります。したがって $\vec{m} = 13\vec{c}$ ならば $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ となる実数 α, β が存在しますので、直線 OA と l が $_0$ 交わる ことがわかります。

ハ $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{e}$ でしたので、 $\vec{m} = -9\vec{a} + 19\vec{b} - 90\vec{e}$ となります。 $\vec{e}$ の係数が 0 でないことから $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ と表せませんので、直線 OA と l が $_1$ 交わらない ことがわかります。

ヒ $\vec{m} = 19\vec{a} - 22\vec{b} + 110\vec{e}$ となります。 $\vec{e}$ の係数が 0 になりませんので、直線 OA と l が $_1$ 交わらない ことがわかります。

第7問

- (1) ア 複素数 z の絶対値 $|z|$ は複素数平面における 0 から z までの距離で表されます。
 z と α の差を考えた場合、 $|z - \alpha|$ は複素数平面における α から z までの距離となります。
 これを利用すると $|z - 1|$ は 2 点 1 と z との距離、 $|z + 1| = |z - (-1)|$ は 2 点 -1 と z との距離であり、
 すなわち方程式①は
 2 点 $1, z$ との距離と、 2 点 $-1, z$ との距離との和が 4 で一定になっていることを表します。
- イ, ウ z の実部を x 、虚部を y とすると $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ とできるので、
 $|z - 1| = |(x - 1) + yi| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ 、 $|z + 1| = |(x + 1) + yi| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ がわかります。
 したがって方程式は
 $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 4$ すなわち $4\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 4 - 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ と変形できます。
- エ この両辺を 2 乗すると $(x - 1)^2 + y^2 = \{(x + 1)^2 + y^2\} + 16 - 8\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ となります。
 展開すると $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + y^2 + 17 - 8\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ となり、根号を含まないものを
 まとめて
 $8\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 4x + 16$ 、すなわち $3x + 4 = 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ と変形できます。
- オ さらに両辺を 2 乗すると $(x + 4)^2 = 4\{(x + 1)^2 + y^2\}$ となり、展開すると $x^2 + 8x + 16 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2)$
 となります。
 項をまとめると $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ となりますので、 $3x^2 + 4y^2 = 12$ より $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ と変形できます。
- カ 方程式①をみたす点 z は 2 点 $1, -1$ からの距離の和が一定の点全体ですので、ここからその全体は 2 点
 $1, -1$ を焦点とする楕円であることがわかります。
 したがって長軸は実軸上にあることがわかり、またこの方程式をみたす実数は $z = \pm 2$ であることが確
 かめられます。
 よって長軸の両端が 2 点 $2, -2$ となることからその長さは $|2 - (-2)| = 4$ となりますので、その図形は
 2 点 $1, -1$ を焦点とする、長軸の長さ 4 の楕円となります。
 (2つの方程式が表す図形が同じであることは、逆をたどると $x \geq -2$ より $x + 4 \geq 0$ が定まること、
 $x \leq 2, y \leq \sqrt{3}$ から $\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \leq 2\sqrt{3} < 4$ となることから他の可能性が生じないためにいえる)
- (2) キ 点 z を原点を中心に θ だけ回転させた点を表す複素数は、乗算を利用して $(\cos \theta + i \sin \theta)z$ で表せます。
 いま w は z を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点ですので、 $w = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)z$ が成り立ちます。
- ク $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ですので、 $w = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z$ となります。
 これを z についての式に直すと $z = \frac{\sqrt{2}}{1+i}w$ とできます。
 したがってこれを方程式①に代入することで w が
 $\left|\frac{\sqrt{2}}{1+i}w - 1\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{1+i}w + 1\right| = 4$ をみたすことがわかります。
 $\left|\frac{\sqrt{2}}{1+i}w - 1\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{1+i}\left(w - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right| \left|w - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|$ と変形でき、
 $\left|\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right| = \left|\frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}\right| = 1$ を利用することでこの方程式は
 $4\left|w - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right| + \left|w + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right| = 4$ と変形できることがわかります。

- (3) ケ 同様に α が z を原点中心に θ だけ回転させた場合、 z が方程式①をみたすように動くと、 α がくる点全体は、 z がえがく図形を原点中心に θ だけ回転させたものとなります。

したがって、 α は焦点が $\pm(\cos \theta + i \sin \theta)$ で長軸の長さ 4 の楕円であり、すなわち 2 点 $\cos \theta + i \sin \theta, -\cos \theta - i \sin \theta$ からの距離の和が 4 となる点となります。

よって α がみたす方程式は $|\alpha - (\cos \theta + i \sin \theta)| + |\alpha + (\cos \theta + i \sin \theta)| = 4$ となります。

この形式になっていない場合、原点と焦点からの距離が異なる、または指定している距離の和が異なることになりますので、条件を満たさないことになります。

選択肢でこの形式にできるものは $5|\alpha - i| + |\alpha + i| = 4$ となります。 $(\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ のときに成立)

所感

本試験に比べてマーク数は少なくなっています。共通問題の割り当ては本試験と異なることには注意です。

第1問

数と式に関する問題です。(2)の変形はなかなか見かけない形式だと思いますが、解き方は単純です。

第2問

図形と式に関する問題です。(1)で直線と点との距離の公式を持ち出そうものならはまります。図形で考えて進めていきましょう。

第3問

積分を利用した問題です。面倒な計算はないですので確実に得点したいです。

第4問

数列の問題です。(1)(2)は教科書で扱う程度のものですので、確実に解答したいです。(3)は代入や式の形からうまく使えそうなものを探していきましょう。

第5問

統計処理に関する問題です。原則と定義に従って解き進めていきましょう。

第6問

ベクトルを利用した問題です。難しさは控え目ですがマーク数が多いので腕が疲れそうです。

第7問

複素数と二次曲線を題材にした問題です。計算は手が込んでおり、時間を取られると思います。ただ双曲線の式ができたり双曲線ができると解答した人は定義に立ち返って復習しましょう。