

解答

第1問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ	8,4,6	2
エ, オ, カ	1,1,2	3
キ	5	2
ク, ケ, コ, サシ	5,6,8,11	3
ス	7	2
セ, ソ	3,7	3
タ, チ, ツテ	5,7,14	3
ト	2	3
ナ	4	3
ニ, ヌネ	2,50	3
ノ	6	3

第2問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ, エ	7,4,7,8	3
オ, カ, キ, ク	1,4,1,3	3
ケ	2	3
コ, サ	1,2	2
シ	2	4
ス	1	2
セ	2	2
ソ	0	2
タ	7	2
チ	5	2
ツ	3	2
テ, ト	6,2	3

第3問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア	1	2
イウ, エ, オ	90,1,0	3
カ, キ	2,1	3
ク, ケ	3,2	3
コ, サ	1,0	3
シ, ス	7,0	3
セ	0	3

第4問 (20)		
解答欄	解答	配点
アイ	15	2
ウ, エオ	1,15	3
カ, キ	2,5	3
ク, ケコサ	5,108	3
シス, セソタ	25,216	3
チツ, テト	35,72	3
ナ, ニ	1,0	3

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとまって入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。
(上記の場合、第1問はアに8、イに4、ウに6を入れた場合のみ2点加わる)

解説

第1問

[1]

- (1) ア 順番に計算していきます。問題文では小数第3位のところで $50 = 13 \times 3 + 11$ となっています。
次の計算は110を13で割ることになります。 $110 = 13 \times 8 + 6$ となりますので、110を13で整数の範囲で割った商が8となります。すなわち $a = 8$ がわかります。
- イ 次は60を13で割ります。 $60 = 13 \times 4 + 8$ となりますので、 $b = 4$ がわかります。
- ウ さらに80を13で割ることになります。 $80 = 13 \times 6 + 2$ となりますので、 $c = 2$ がわかります。
この余り2は求めたい値の分子に一致しますので、以降は同じ計算が続き、循環小数ができます。
- (2) エ 余りに0が出てくる場合、そこで割り算が終了しますので、小数点以下の桁数が有限になります。
いま $m < n$ で考えていますので $\frac{m}{n} < 1$ となり、整数になることはありません。したがって余りが0が出たら $\frac{m}{n}$ は 1有限小数 であることがわかります。
- オ 余りに0が出ない場合、余りとして出てくる可能性のある値は $1, 2, \dots, n-1$ です。したがって n 桁以上計算することで
1同じ余りが必ず出てくる ことがわかります。
- カ 同じ余りがでてきた場合、以降の計算はそれらの間に出ている計算を繰り返しますので、 $\frac{m}{n}$ は 2循環小数 となります。
- (3) キ 割り算で $70 = 13 \times 5 + 5$ と求めていますので、 $0.\dot{3}abc1\dot{5} = \frac{7}{13} \times 10 - 5$ と求められます。
- ク～シ (1) でおこなった計算をたどっていく (出てきた余りを使っていく) と
 $0.\dot{3}abc1\dot{5} = \frac{5}{13}, 0.\dot{a}bc15\dot{3} = \frac{11}{13}, 0.\dot{b}c153\dot{a} = \frac{6}{13}, 0.\dot{c}153a\dot{b} = \frac{8}{13}$ がわかります。
分母の13が素数なのでこの値はこれ以上約分できない分数です。
したがってこれらの分子を小さい順に並べると 5, 6, 8, 11 となります。

[2]

- (1) ス 三角形 POQ は Q が直角ですので、 $\tan \angle POQ = \frac{PQ}{OQ} = \frac{h}{\underline{OQ}}$ がわかります。

セ 同様に $\tan \angle COD = \frac{h}{OD}$ がわかりますので、 $\angle COD = 30^\circ$ を代入して
 $OD = \frac{1}{\tan 30^\circ} h = \underline{\sqrt{3}h}$ がわかります。

ソ 三角形 BOD に余弦定理を適用することで

$$\begin{aligned} BD^2 &= OB^2 + OD^2 - 2 \cdot OB \cdot OD \cdot \cos \angle BOD = h^2 + (\sqrt{3}h)^2 - 2 \cdot h \cdot (\sqrt{3}h) \cdot \cos 150^\circ \\ &= h^2 + 3h^2 - 2\sqrt{3}h^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7h^2 \text{ がわかります。} \end{aligned}$$

したがって、 $h > 0$ より $BD = \underline{\sqrt{7}h}$ がわかります。

タ～テ 余弦定理の式 $OD^2 = BO^2 + BD^2 - 2 \cdot BO \cdot BD \cdot \cos \angle OBD$ を利用すると

$$\cos \angle OBD = \frac{BO^2 + BD^2 - OD^2}{2 \cdot BO \cdot BD} = \frac{h^2 + 7h^2 - 3h^2}{2 \cdot h \cdot (\sqrt{7}h)} = \frac{5h^2}{2\sqrt{7}h^2} = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14} \text{ がわかります。}$$

ト P が A を通過して 140 秒後に C を通過しますので、A を通過して 70 秒後は P は A から $\frac{70}{140} \cdot AC$ だけ進んだ位置にきます。

したがってこのとき $BQ = \frac{70}{140} \cdot BD = \frac{\sqrt{7}}{2}h$ がわかります。

これより三角形 OBQ に余弦定理を適用することで

$$OQ^2 = BO^2 + BQ^2 - 2 \cdot BO \cdot BQ \cdot \cos \angle OBD = h^2 + \frac{7}{4}h^2 - 2 \cdot h \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{2}h\right) \cdot \left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right) = \frac{1}{4}h^2 \text{ がわ$$

ます。

したがって $\underline{OQ = \frac{h}{2}}$ が得られます。

ナ このとき $\tan \angle POQ = \frac{OP}{OQ} = \frac{h}{\frac{h}{2}} = 2$ ですので、この値になる角度を三角比の表から探しましょう。

すると $\tan 63^\circ < 2 < \tan 64^\circ$ であることがわかります。

したがって $63^\circ < \angle POQ < 64^\circ$ がわかりますので、あてはまるものは 60° 以上 65° 未満 となります。

ニ $\angle POQ$ が最大になるとき、 $\angle POQ$ が鋭角となることから $\tan \angle POQ$ が最大になります。

$\tan \angle POQ = \frac{h}{OQ}$ ですので、 $\tan \angle POQ$ が最大になるのは OQ が最小になるときです。

Q は三角形 OBD の辺 BD 上を動きますので、直線 OQ が辺 BD に垂直になるときに最小となります。

したがって求める条件は ${}_2O$ から線分 BD におろした垂線と線分 BD との交点 となります。

ヌネ Q が上記の条件をみたすときにくるとき三角形 OBQ は Q が直角の三角形となります。

したがってこのとき $BQ = OB \cos \angle OBQ = h \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}h$ となります。

ここから $\frac{BQ}{BD} = \frac{\frac{5\sqrt{7}}{14}h}{\sqrt{7}h} = \frac{5}{14}$ がわかりますので、A を通過後、C を通過するまでの時間の $\frac{5}{14}$ 倍の時間で到達することがわかります。

よって求める時間は $140 \cdot \frac{5}{14} = \underline{50}$ 秒となります。

ノ このとき三角形 OBQ は Q が直角の三角形でしたので $OQ = \sqrt{OB^2 - BQ^2} = \sqrt{h^2 - \frac{25}{28}h^2} = \sqrt{\frac{3}{28}}h$ となります。

したがって $\tan \angle POQ = \frac{h}{\sqrt{\frac{3}{28}}h} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ がわかります。

平方根の表をもとに $\sqrt{21} = 4.5826$ を代入すると $\tan \angle POQ = 3.055 \dots$ となりますので、

$\tan 71^\circ < \tan \angle POQ < \tan 72^\circ$ がわかります。

したがって $71^\circ < \angle POQ < 72^\circ$ となりますので、あてはまるものは 70° 以上 75° 未満 となります。

$(3^2 = 9 = \frac{27}{3}, (3.1)^2 = 9.61 > \frac{28}{3}$ から $3 < \sqrt{\frac{28}{3}} < 3.1$ を導いてもよい)

第2問

[1]

(1)

ア～エ $a = 2, b = -7, c = 7$ のとき関数は $y = 2x^2 - 7x + 7$ となります。平方完成により

$$2x^2 - 7x + 7 = 2 \left\{ \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{49}{16} \right\} + 7 = 2 \left(x - \frac{7}{4} \right) + \frac{7}{8} \text{ となりますので、頂点の座標は } \underline{\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{8} \right)} \text{ となります。}$$

(2)

オ, カ グラフが2点PとQを通るようにしたいですので、 $y = ax^2 + bx + c$ の式がPとQの座標で成立するように b, c を設定します。

P(1, 2) から $2 = a + b + c$ 、Q(3, 4) から $4 = 9a + 3b + c$ が得られます。

差をとると $2 = 8a + 2b$ となりますので、ここから $b = 1 - 4a$ が得られます。

キ, ク さらに代入により $2 = a + (1 - 4a) + c$ となりますので、ここから $c = 1 + 3a$ が得られます。

(3) ケ 頂点の y 座標はグラフ上の点になっている y 座標のうちの最小になります。いまこのグラフはPを通りますので頂点の y 座標はPの y 座標である2を上回ることはありません。
したがって頂点の y 座標の最大値は2であることがわかります。

コ, サ 頂点の y 座標が最大になるとき、頂点と同じ y 座標をとる点は放物線上にほかにありませんので、頂点はPに一致します。このときグラフは $y = a(x - 1)^2 + 2$ と表せます。

$a(x - 1)^2 + 2 = ax^2 - 2ax + 2 + a^2$ ですので、 $b = -2a$ となることがわかります。

また(2)より $b = 1 - 4a$ ですので、 $1 - 4a = -2a$ が成り立つことがわかります。

これを変形すると $a = \frac{1}{2}$ が得られます。

(思いつくならQを通ることを利用して $4 = a \cdot (3 - 1)^2 + 2$ から導くのが速いか)

(4) シ それぞれみていきましょう。このグラフは $y = ax^2 + (1 - 4a)x + (1 + 3a)$ となることを利用します。

(A) 点(0, 3)を通るなら $3 = a \cdot 0^2 + (1 - 4a) \cdot 0 + (1 + 3a)$ より $1 + 3a = 3$ となります。したがって $a = \frac{2}{3}$ となり、すなわちこの条件をみたすならば $a > 0$ が必要です。なのでこれは起こりえないことがわかります。

(B) たとえば点 $\left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$ をとる可能性があるかをみてみましょう。このとき $0 = \frac{a}{4} - \frac{1 - 4a}{2} + (1 + 3a)$ より $a = -\frac{2}{25}$ となり、このことが起こりえるといえます。

(なお、条件は y 切片が正、すなわち $1 + 3a > 0$ のときで、 $-\frac{1}{3} < a < 0$ のときに発生する)

(C) グラフの式を平方完成すると $y = a \left(x + \frac{1 - 4a}{2a} \right)^2 + (1 + 3a) - \frac{(1 - 4a)^2}{4a}$ と表せます。

したがって頂点の x 座標は $\frac{4a - 1}{2a} = 2 - \frac{1}{2a}$ となります。

いま $a < 0$ より $-\frac{1}{2a} > 0$ となりますので $2 - \frac{1}{2a} > 2$ 、すなわち頂点の x 座標は2以下にならないことがわかります。

これらより、あてはまるものは 2(B)のみ起こり得る となります。

[2]

ス 相関係数が負で大きめ (-1 に近い) ので、負の相関をもつといえます。言い換えるとスポーツ好きが増えると反復横とびの点数は 1 減る傾向にあるといえます。

セ 図 3 を見るとスポーツ好きが増えると反復横とびの成績はわずかながら上がっているように見えます。したがって相関は弱いので、相関係数としてあてはまるのは 20.1と考えられます。

ソ 平均は合計を値の個数で割って得られますので、 $\bar{x} = \frac{(-1) + 1 + (-2) + 0 + 0 + 2}{6} = 0$ となります。

タ 分散は「値と平均との差の 2 乗」の平均で得られます。 $\bar{x} = 0$ でしたので
 $s_x^2 = \frac{(-1-0)^2 + (1-0)^2 + (-2-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2 + (2-0)^2}{6} = \frac{10}{6} = 1\frac{5}{3}$ となります。

チ x と y の共分散「 x と $\bar{x}$ との差、 y と $\bar{y}$ との差、の積」の平均で得られます。
 $\bar{y} = \frac{1 + (-1) + 0 + (-2) + 2 + 0}{6} = 0$ ですので
 $s_{xy} = \frac{(-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ となります。

ツ x の値、 y の値は並べ替えるとどちらも $\{-2, -1, 0, 0, 1, 2\}$ となりますので、 $s_y^2 = s_x^2$ がわかります。
 $s_x > 0, s_y > 0$ ですので $s_x = s_y$ が成り立ちます。

したがって $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{1\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}$ が得られます。

テ, ト W において、 $\bar{x} = \frac{-1 + 1 + (-1-a) + (1-a) + (-1+a) + (1+a)}{6} = 0$ 、

$\bar{y} = \frac{1 + (-1) + (1-a) + (-1-a) + (1-a) + (-1+a) + (1+a)}{6} = 0$ ですので、

$s_{xy} = \frac{(-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1-a) \cdot (1-a) + (1-a) \cdot (-1-a) + (-1+a) \cdot (1+a) + (1+a) \cdot (-1+a)}{6}$
 $= \frac{-2 + 4(a+1)(a-1)}{6} = \frac{2(a^2-1)-1}{3}$ と計算できます。

$s_x > 0, s_y > 0$ なので共分散と相関係数の符号は同じになるので、相関係数が正になることと $s_{xy} > 0$ になることが同値になります。

このとき、 $\frac{2(a^2-1)-1}{3} > 0$ を変形すると $a^2 > \frac{3}{2}$ となりますので、求める条件は $a > \sqrt{\frac{3}{2}}$ 、すなわち

$a > \frac{\sqrt{6}}{2}$ となります。

第3問

- (1) ア Iが三角形 OAB の内心ですので、直線 IL と AB は垂直に交わります。すなわち $\angle ALI = 90^\circ$ です。
また同様に直線 IM と OA も垂直に交わりますので $\angle AMI = 90^\circ$ がわかります。
したがって線分 AI を直径とする円は L と M を通りますので、4 点 A、I、L、 $_1M$ が同一円周上にくることがわかります。

- (2) イウ 直線 IM と OA は垂直に交わりますので $\angle OMI = 90^\circ$ です。

エ, オ 三角形 OBX を考えると $\angle OXI = \angle OXB$ であることから

$\angle OXI = 180^\circ - \angle XOB - \angle XBO$ がわかります。

$\angle XOB = \angle AOB = 2\theta$ であり、直線 BI が角 B を二等分することから $\angle XBO = \angle IBO = \frac{1}{2}\angle ABO = \beta$ がわかります。

また $\beta = 90^\circ - \alpha - \theta$ で β を消去すると

$\angle OXI = 180^\circ - 2\theta - (90^\circ - \alpha - \theta) = 90^\circ + \alpha - \theta$ がわかります。

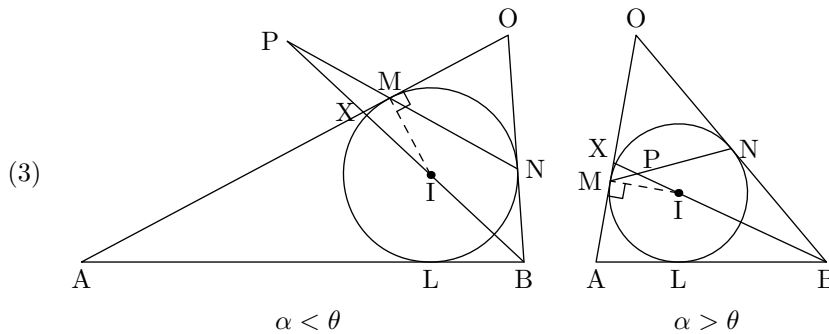
カ $\alpha < \theta$ のときは $\angle OXI < 90^\circ$ となります。三角形 XMI は M が直角の三角形ですので $\angle OXI$ はこの三角形の内角となります。

したがってこのとき点 M は線分 OX 上にくるので、X は $_2M$ と異なり、線分 AM 上にあることがわかります。

キ $\alpha > \theta$ のときは $\angle OXI > 90^\circ$ となり、 $\angle OXI$ は三角形 XMI の内角となります。

なので線分 OX 上に点 M はなく、X は $_1M$ と異なり、線分 OM 上にあることがわかります。

(余談だが直線 BI が $\angle OBA$ を 2 等分することから $OX : XA = OB : AB$ 、さらに B から線分 OA に垂線をおろし交点を H とすると $OB \sin 2\theta = AB \sin 2\alpha = OH$ となることから $OB : AB = \sin 2\alpha : \sin 2\theta$ になるので、 $OX : XA = \sin 2\alpha : \sin 2\theta$ を導ける)



ク $\alpha < \theta$ のとき直線 BI は線分 AM と交わります。なので P は半直線 NM 側で交わることがわかります。

内接円の性質から三角形 OMN は $OM = ON$ の二等辺三角形ですので、

$\angle ONM = \angle OMN = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\theta)$ となります。

これより $\angle ONP = \angle ONM = \underline{90^\circ - \theta}$ がわかります。

ケ 直線 BP は直線 BI に一致しますので $\angle OBP = \angle OBI = \frac{1}{2}\angle OBA = \underline{\beta}$ となります。

コ 点 M が線分 NP 上にくることから、 $\angle MPI$ は三角形 BPN の内角となります。したがって

$\angle MPI = \angle ONP - \angle OBP = 90^\circ - \theta - \beta = \underline{\alpha}$ となります。

サ $\angle MPI = \angle MAI = \alpha$ であり、A と P が直線 MI に対して同じ側にきますので、4 点 I、M、P、 $_0A$ が同一円周上にくることがわかります。

シ $\alpha > \theta$ のときは直線 BI は線分 OM と交わります。したがって線分 BX と線分 MN が交わりますので、P は線分 MN 上にくることがわかります。

この場合でも $\angle ONP = 90^\circ - \theta$ 、 $\angle OBP = \beta$ は変わりません。

一方 $\angle MPI$ は三角形 MBP の外角となりますので、

$\angle MPI = \angle OBP + \angle BNP = \beta + (180^\circ - 90^\circ + \theta) = \beta + \theta + 90^\circ = 180^\circ - \alpha$ となります。

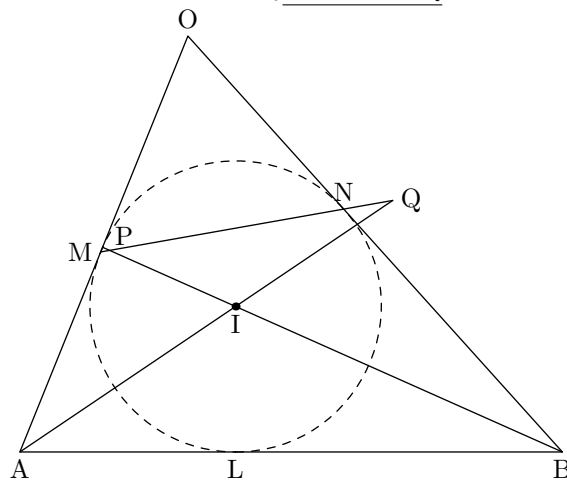
ス このとき A と P は直線 MI に対して異なる側にきます。また $\angle MAI + \angle MAP = 180^\circ$ ですので、4 点 I、M、P、A は 同一円周上にあることがわかります。

(4) セ $\theta = 32^\circ, \alpha = 34^\circ$ のとき、 $\beta = 90^\circ - \theta - \alpha = 24^\circ$ です。

$\alpha > \theta$ ですので、(3) から P は線分 MN 上にきます。

またこれまでの議論で A と B、M と N を入れ替えることで $\beta < \theta$ から Q が半直線 MN 上にくることがわかります。

したがって、並び順は M、P、N、Q となります。



第4問

- (1) アイ 6枚のうちの2枚を取り出す場合の数は2枚の順番を考えませんので組合せで計算します。ということで ${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ 通りとなります。

ウ～オ 事象 A_2 が発生する場合は、太郎さんが取り出した2枚が花子さんが取り出したものと一致する場合に限られます。

2枚の取り出し方は同様に確からしいですので、その確率は $\frac{1}{15}$ と計算できます。

カ、キ 事象 A_0 が発生している場合、太郎さんは花子さんが取り出していない4枚のうち2枚を取り出していることになります。

4枚のうちの2枚を取り出す場合の数は ${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ 通りですので、 $P(A_0) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ がわかります。

(2)

ク～サ 事象 B_2 が発生するためには、まず花子さんが取り出した2枚のカードが異なっている必要があります。その確率は、2回目に取り出したカードが1回目と異なる確率になりますので $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ です。

さらに太郎さんは1回目で花子さんが取り出した2枚のうち一方を、2回目で他方を引いた場合にのみこの事象が発生します。

これらから、 $P(B_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$ がわかります。

シ～タ 花子さんが2回とも同じ数のカードを取り出す確率は、2回目に取り出したカードが1回目と同じ確率と言い換えられますので、 $\frac{1}{6}$ となります。

そのうえで事象 B_0 が発生する場合は、太郎さんが2回とも花子さんが取り出した数(1種類)と異なっている場合となります。

これより、その確率は $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$ となります。

チ～ト 花子さんが取り出した結果は、「2枚のカードが等しい」「2枚のカードが異なる」に分けられます。

前者は上記で計算した値ですので、もう1つの場合である花子さんが取り出した2枚のカードが異なっており、その上で事象 B_0 が起こる確率を求めてみましょう。

花子さんが取り出した2枚のカードが異なる確率は $\frac{5}{6}$ でした。この場合、事象 B_0 が起こる場合は太郎さんが2回とも花子さんが取り出していない4枚から取り出した場合に限られます。

この確率は $\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{80}{216}$ となります。(後で合計するので約分はしない)

前問題で確率を計算した事象とは互いに排反ですので、 $P(B_0) = \frac{25}{216} + \frac{80}{216} = \frac{105}{216} = \frac{35}{72}$ と求められます。

- (3) ナ (1) での操作で起こりうる事象は A_0, A_1, A_2 に限られますので、 $P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = 1$ が成り立ちます。

これより $P(A_1) = 1 - P(A_0) - P(A_2) = 1 - \frac{1}{15} - \frac{6}{15} = \frac{8}{15}$ がわかります。

これより、最大のものは ${}_1P(A_1)$ となります。

ニ (2) での操作で起こりうる事象は B_0, B_1, B_2 に限られますので、同様に

$P(B_1) = 1 - P(B_0) - P(B_2) = 1 - \frac{105}{216} - \frac{10}{216} = \frac{101}{216}$ がわかります。

これより、最大のものは ${}_0P(B_0)$ となります。

所感

本試験と比較して基本的な問題が多いように感じられます。公式の知識や運用よりも原則を理解しているかが勝負になりそうです。

第1問

[1]

数と式に関する問題です。割り算の仕組みを本質的に理解していれば得点は容易だと思います。

[2]

正弦や余弦を利用した問題です。ひとつとびに値を求めることは(2)までないはずですので、地道に進めればよいでしょう。

第2問

[1]

二次関数のグラフを考える問題です。(2)までは式をあてはめればいけますが(3)(4)は本質的な思考が求められます。

[2]

データの分析に関する問題です。扱う値は平易ですので計算ミスには気を付けましょう。

第3問

平面幾何に関する問題です。位置関係や角度で解き進める、基本的な問題がそろっています。

第4問

場合の数と確率の問題です。求め方は難しくないですが計算や値の比較には気を付けましょう。