解答

第１問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	**3**	**1**
イウ	**10**	**1**
エ, オ	**1,0**	**2**
カ	**0**	**3**
キ	**5**	**3**
ク	**2**	**2**
ケ	**2**	**3**
コサ, シ	**-2,3**	**2**
ス, セ	**2,1**	**2**
ソタ	**12**	**1**
チ	**3**	**3**
ツ	**1**	**1**
テ, ト	**1,1**	**2**
ナ	**3**	**1***
ニヌ	**-6**	**2**
ネノ	**14**	**1**

第２問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**3,2**	**2**
ウ, エ	**9,6**	**1**
オ, カ, キ	**9,2,6**	**2**
ク	**1**	**1**
ケ, コ	**5,2**	**1**
サ	**2**	**1**
シ	**2**	**1**
ス	**3**	**3**
セ, ソ	**0,5**	**2**
タ	**1**	**2**
チ	**1**	**4**
ツ	**2**	**2**
テ	**3**	**1**
ト, ナ	**4,2**	**3**
ニ, ヌ	**0,4**	**2**
ネ	**2**	**2**

第３問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア	**3**	**2**
イ	**9**	**2**
ウ, エ	**5,4**	**3**
オ	**6**	**2**
カ	**6**	**3**
キ	**4**	**2**
ク, ケ	**2,3**	**2**
コ	**9**	**2**
サ	**a**	**2**

第４問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**4,0**	**2**
ウ	**1**	**2**
エ	**8**	**2**
オ	**b**	**2**
カ	**4**	**3**
キ	**4**	**3**
ク, ケ, コサ, シ	**1,2,15,2**	**3**
ス, セ, ソ, タ	**3,2,7,2**	**3**

*第 1 問の [ナ] はテ, トが不正解だと採点の対象にならず、何を入れても 0 点になります。

解説

第 1 問

[**1**]

(1)　ア　$3^3 = 27$ より $3 = \log_3 27$ ですので $y = \log_3 x$ のグラフは点 $(27, \underline{3})$ を通ります。

イウ　$1 = \log_2 \dfrac{x}{5}$ ならば $2^1 = \dfrac{x}{5}$ より $x = 10$ ですので、$y = \log_2 \dfrac{x}{5}$ のグラフは点 $(\underline{10}, 1)$ を通ることがわかります。

エ, オ　$k > 0, k \neq 1$ ならば $k^0 = 1$ ですので $0 = \log_k 1$ となり、すなわち $y = \log_k x$ のグラフは k によらず点 $\underline{(1, 0)}$を通ることがわかります。

カ　$y = \log_k x$ は k によらず点 $(1, 0)$ を通りますので、すなわち x 軸上の 1 点で 3 つのグラフは交わります。
また $x > 1$ のときは $k > 1$ ならば k が大きいほど $\log_k x$ の値は小さくなりますので、$x > 1$ の範囲では k が大きいほどグラフは下側にきます。
これらより<u>選択肢 0</u>のグラフが適当といえます。

キ　$\log_2 kx = \log_2 x + \log_2 k$ とできますので、$y = \log_2 kx$ のグラフは $y = \log_2 x$ のグラフを y 軸方向に $\log_2 k$ だけ平行移動させてできるものになります。したがってとくにこれらのグラフは交わりません。
また $\log_2 k$ は k が大きいほど値が大きくなりますので、グラフは上側にいくことになります。
これらより<u>選択肢 5</u>のグラフが適当といえます。

(2)　ク　$\log_x y = 2$ を変形すると $y = x^2$ となりますので、得られる図形は原点を頂点とし下に凸な放物線である<u>選択肢 2</u>の図に含まれることがわかります。

ケ　$0 < \log_x y < 1$ については、底 x の値で場合分けして考えます。
$0 < x < 1$ のときは $0 < \log_x y < 1$ は $x^1 < y < x^0$ より $x < y < 1$ となります。
$1 < x$ のときは $0 < \log_x y < 1$ は $x^0 < y < x^1$ より $1 < y < x$ となります。
これらより、適当な領域は<u>選択肢 2</u>といえます。

[2]

(1)

コ〜シ　$S(x)=(x+2)^2+3$ と変形できますので方程式 $S(x)=0$ の解は $(x+2)^2=-3$ より $x+2=\pm\sqrt{3}i$ となり、すなわち$\underline{x=-2\pm\sqrt{3}i}$となります。

ス〜タ　次数の大きい項から順に計算することで
$P(x)=2x(x^2+4x+7)-(2x^3+8x^2+14)+2x^3+7x^2+10x+5$
$=2x(x^2+4x+7)-x^2-4x+5=(2x-1)(x^2+4x+7)+(x^2+4x+7)-x^2-4x+5=(2x-1)(x^2+4x+7)+12$
となりますので、
$\underline{T(x)=2x-1, U(x)=12}$がわかります。

(2)　チ　まず作り方から $P(x)=S(x)T(x)+U(x)$ となりますので $P(x)=S(x)T(x)+k$ がわかります。
いま α,β は $S(x)=0$ の解としていますので $S(\alpha)=S(\beta)=0$ となります。
これを利用すると $P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+k=0\cdot T(\alpha)+k=k$ となり、同様に $P(\beta)=k$ もわかります。
この議論は仮定が「$P(x)=S(x)T(x)+k$」「$S(\alpha)=S(\beta)=0$」で結論が「$P(\alpha)=P(\beta)=k$」ですので、これに沿っているものは<u>選択肢 3</u>の文となります。

ツ　上記の議論から成り立つものは $_1\underline{P(\alpha)=P(\beta)}$となります。

テ　$P(x)=S(x)T(x)+U(x)$ ですので、$U(x)=mx+n$ より $P(x)={}_1\underline{S(x)T(x)+mx+n}$がわかります。

ト　$S(\alpha)=S(\beta)=0$ ですので $P(\alpha)=0\cdot T(\alpha)+m\alpha+n=m\alpha+n$ となります。
$P(\beta)$ も同様ですので $_1\underline{P(\alpha)=m\alpha+n, P(\beta)=m\beta+n}$がわかります。

ナ　いま $P(\alpha)=P(\beta)$ を仮定していますので $m\alpha+n=m\beta+n$ が成り立ちます。
これを整理すると $m(\alpha-\beta)=0$ となり、いま $\alpha\neq\beta$ より $\alpha-\beta\neq 0$ としていますので、$_3\underline{m=0}$が成り立ち、すなわち $U(x)=n$ となって余りが定数となることがいえます。

(3)　ニヌ　これまでの議論から $S(x)=0$ の解を考えましょう。$S(x)=(x+1)(x-2)$ ですので $S(x)=0$ の解は $x=-1,2$ となります。
したがって $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるなら $P(-1)=P(2)$ が成り立つことがわかります。
$P(-1)=(-1)^{10}-2\cdot(-1)^9-p\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)=1+2-p+5=-p+8$ であり、
$P(2)=2^{10}-2\cdot 2^9-p\cdot 2^2-5\cdot 2=2^{10}-2^{10}-4p-10=-4p-10$ ですので $-p+8=-4p-10$ となります。
これを整理すると $3p=-18$ より$\underline{p=-6}$がわかります。

ネノ　(i) の議論で $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるならその値は $P(\alpha)=P(\beta)$ となりますので、この値を計算します。
$P(-1)=-p+8, P(2)=-4p-10$ でしたので $p=-6$ を代入することでその値は<u>14</u>となることがわかります。

第２問

[1]

(1)

ア, イ　$f(x)=3(x^2-3x+2)$ より $f'(x)=3\cdot(2x-3)$ ですので、$f'(x)=0$ となる x は $2x-3=0$ が成り立つことから $x=\dfrac{3}{2}$ となります。

ウ, エ　ここは $f(t)$ を展開した式を入れることになりますので、$f(t)=3(t^2-3t+2)=3t^2-9t+6$ が入ります。

オ〜キ　$1,t,t^2$ の原始関数は積分定数を C とおくとそれぞれ $t+C,\dfrac{t^2}{2}+C,\dfrac{t^3}{3}+C$ となりますので、計算すると $S(x)=\left[3\cdot\dfrac{t^3}{3}-9\cdot\dfrac{t^2}{2}+6t\right]_0^x=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x$ となります。

ク〜コ　$S'(x)=f(x)$ ですので、$f(x)$ が正から負にかわる値で $S(x)$ は極大となります。
$f(x)$ は $1<x<2$ で負でありそれ以外の範囲で 0 以上となりますので、極大値をとるのは $x=1$ のときで、そのときの値は $S(1)=\dfrac{5}{2}$ となります。

サ, シ　$f(x)$ が負から正にかわる値で $S(x)$ は極小となりますので、すなわち極小値は $x=2$ のときの値であり、その値は $S(2)=2^3-\dfrac{9}{2}\cdot2^2+6\cdot2=2$ となります。

ス　$S'(x)=f(x)$ でしたので $f(3)$ は $x=3$ における $S(x)$ の微分係数となります。微分係数はグラフ上では接線の傾きとなりますので、選択肢のうち $f(3)$ に一致するものは
${}_{3}$関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,S(3))$ における接線の傾きとなります。

(2)　セ　$0\leq x\leq1$ の範囲においては $f(x)\geq0$ すなわち x 軸の上側にきますので、この範囲での面積は ${}_{0}\int_0^1 f(x)dx$ と表せます。

ソ　$1\leq x\leq m$ の範囲においては $f(x)\leq0$ すなわち x 軸の下側にきますので、$S_2=\int_1^m\{0-f(x)\}dx={}_{5}\int_1^m\{-f(x)\}dx$ と表せます。

タ　$S_1=S_2$ はすなわち $\int_0^1 f(x)dx=\int_1^m\{-f(x)\}dx$ ですので、左辺によせることで
$\int_0^1 f(x)dx-\int_1^m\{-f(x)\}dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^m f(x)dx={}_{1}\int_0^m f(x)dx=0$ と変形できます。

チ　この左辺は $S(m)$ と表せますので、$S_1=S_2$ が成り立つならば $S(m)=0$ が成り立ちます。
また、(1) の議論から関数 $S(x)$ は $x=m$ で極小となりますので、すなわち極小値が 0 です。
すなわちグラフでいうと x 軸に上側から接することになりますので、選択肢 1 の図が適切といえます。

ツ　$S_1>S_2$ を同様に変形していくと $S(m)>0$ となりますので、すなわち極小値が正の値になります。
グラフでいうと x 軸より上で減少から増加になっていることになりますので、選択肢 2 の図が適切といえます。

(3)　テ　$f(x)=3x^2-3(1+m)x+3m=3\left(x^2-\dfrac{1+m}{2}\right)^2+3m-\dfrac{3(1+m)^2}{4}$ と変形できますので、すなわち ${}_{3}x=\dfrac{m+1}{2}$ に対して対称なグラフとなります。

ト　すべての実数 t に対して $f\left(\dfrac{1+m}{2}+t\right)=f\left(\dfrac{1+m}{2}-t\right)$ ですので、両辺を $\dfrac{m-1}{2}\leq t\leq p+\dfrac{m-1}{2}$ の範囲で積分すると左辺は $m\leq x\leq m+p$、右辺は $1-p\leq x\leq1$ の範囲での積分となりますので $\int_{1-p}^1 f(x)dx={}_{4}\int_m^{m+p} f(x)dx$ が成り立ちます。

ナ 同様にして $-f(M-t)=-f(M+t)$ ですので t を $0 \leq t \leq q$ の範囲で積分することで
$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}dx =_2 \underline{\int_{M}^{M+q}}\{-f(x)\}dx$ が成り立ちます。

ニ ① の式は $S(1)-S(1-p)=S(m+p)-S(m)$ となりますので、整理することで
$S(1-p)+S(m+p) =_0 \underline{S(1)+S(m)}$ と変形できます。

ヌ ② の式は $S(M-q)-S(M)=S(M)-S(M+q)$ となりますので、$2S(M) =_4 \underline{S(M+q)+S(M-q)}$ となります。

ネ 中点の座標は $\left(\dfrac{(1-p)+(m+p)}{2}, \dfrac{S(1-p)+S(m+p)}{2}\right)$ となります。

$S(1-p)+S(m+p)=S(1)+S(m)$ を利用するとこれは $\left(\dfrac{1+m}{2}, \dfrac{S(1)+S(m)}{2}\right)$ となります。

さらに $S(M+q)+S(M-q)=2S(M)$ に $q=M-1$ を代入することで $S(2M-1)+S(1)=2S(M)$ となります。

$M=\dfrac{m+1}{2}$ でしたので $2M-1=m$ となり、これより中点の座標は $(M, S(M))$ と表せることがわかります。

この座標には p が出ておらず、$y=S(x)$ のグラフ上の点であることがわかりますので、適当なものは ${}_2$<u>中点は p の値によらない定点であり $y=S(x)$ のグラフ上にくる</u>となります。

第３問

(1)

ア, イ $\cos x = 0$ となる x は $0 \leq x < 2\pi$ の範囲では ${}_{3}\underline{x = \dfrac{\pi}{2}}$ と ${}_{9}\underline{x = \dfrac{3}{2}\pi}$が存在します。

(2) ウ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ですので、$\alpha = 2x, \beta = x$ を代入すると
$\cos 3x = {}_{5}\underline{\cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x}$がわかります。

エ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ ですので、同様にして
$\cos x = {}_{4}\underline{\cos 2x\cos x + \sin 2x \sin x}$がわかります。

オ 上記 2 式の和をとると $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$ が成り立ちますので、
$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = ({}_{6}\underline{2\cos x}+1)\cos 2x$ がわかります。

カ ここから $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$ をみたすなら $2\cos x + 1 = 0$ または $\cos 2x = 0$ が成り立つことがわかります。
$0 \leq x < 2\pi$ において $2\cos x + 1 = 0$ をみたす x は $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ をみたす x ですので $\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$ の 2 個あります。
また、$0 \leq 2x < 4\pi$ ですので $\cos 2x = 0$ をみたす x は $2x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{5}{2}\pi, \dfrac{7}{2}\pi$ から 4 個あることがわかります。
これらはすべて異なる値ですので、合計で $2+4=\underline{6}$ 個の解をもつことがわかります。

キ $2\cos x + 1 = 0$ をみたす最小の x は $x = \dfrac{2}{3}\pi$ であり、$\cos 2x = 0$ をみたす最小の x は $x = \dfrac{\pi}{4}$ ですので、
$\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{4}$ より最も小さい解は$\underline{x = \dfrac{\pi}{4}}$とわかります。

ク, ケ $\cos 2x = 0$ をみたす 2 番目に小さい x は $x = \dfrac{3}{4}\pi$ であり、
$\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$ ですので 2 番目に小さい解は$\underline{x = \dfrac{2}{3}\pi}$となります。

コ, サ 同様に $\cos(n+1)x = \cos nx\cos x - \sin nx \sin x, \cos(n-1)x = \cos nx \cos x + \sin nx \sin x$ ですので、
$\cos(n+1)x + \cos nx + \cos(n-1)x = (2\cos x + 1)\cos nx$ と変形できます。
これより解は $2\cos x + 1 = 0$ または $\cos nx = 0$ をみたすものとなりますので、$x = \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$ と
$x = \dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{3}{2n}\pi, \cdots, \dfrac{2n-1}{2n}\pi$ が解であることがわかります。
いま $n \geq 3$ より $\dfrac{3}{2n} \leq \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$ ですので最も小さい解は ${}_{9}\underline{x = \dfrac{\pi}{2n}}$、2 番目に小さい解は ${}_{a}\underline{x = \dfrac{3}{2n}\pi}$であることがわかります。

第４問

(1)

ア〜ウ　C_2 の式は $(x-4)^2+y^2+15-16=0$ より $(x-4)^2+y^2 = 1^2$ と変形できますので、中心の座標は $\underline{(4,0)}$、半径は $\underline{1}$ であることがわかります。

(2)　エ　m は原点と P を通りますので、$p \neq 0$ から m の傾きは $\dfrac{q-0}{p-0} =_{8} \underline{\dfrac{q}{p}}$ と計算できます。

オ　傾きがそれぞれ a, b の 2 直線が垂直に交わっているならば $ab=-1$ が成り立ちますので、l の傾きを a とおくと $a \cdot \dfrac{q}{p} = -1$ と $p \neq 0$ より ${}_{\mathrm{b}}\underline{a = -\dfrac{p}{q}}$ がわかります。

カ　l は傾きが $-\dfrac{p}{q}$ で点 (p,q) を通ることがわかりましたので、$y = -\dfrac{p}{q}(x-p)+q$ と表せることがわかります。

この分母をはらって展開することで $qy = -px + p^2 + q^2$ となります。

$p^2+q^2=4$ であるので整理することで ${}_{4}\underline{px+qy=4}$ が得られます。

キ　l が C_2 に接する場合、l 上にある点と C_2 の中心との最短距離が C_2 の半径に等しくなります。

すなわち条件は ${}_{4}$<u>C_2 の中心と l との距離が C_2 の半径に等しい</u>となります。

ク〜シ　(ii) の条件を式に直すと $1 = \dfrac{|4p+0q-4|}{\sqrt{p^2+q^2}}$ となり、整理すると $|4p-4|=2$ となります。

これより $4p-4=\pm 2$ がわかりますので、あてはまる p のうち小さいほうは $4p-4=-2$ より $\underline{p=\dfrac{1}{2}}$ がわかります。

これを $p^2+q^2=4$ に代入すると $q^2 = \dfrac{15}{4}$ となりますので、$\underline{q = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}}$ となります。

ス〜タ　もう一方は $4p-4=2$ より $\underline{p=\dfrac{3}{2}}$ となります。

これを $p^2+q^2=4$ に代入すると $q^2=\dfrac{7}{4}$ となり、すなわち $\underline{q=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$ がわかります。

所感

理解していれば解きやすい問題が揃いました。ただ従来にはあまり見られない問題が多いようです。

第 1 問

[1]

対数関数を利用した問題です。(2)(i) では思い込みで対数関数のグラフを選ばないようにしたいです。

[2]

複素数を利用した問題です。前年度の追試験からここに複素数がきていますので、本試験しか確認していないと面喰らいそうです。(2)(i) の不正解は論理が誤っているものになっていますので、事実だけで追うと選べないかもしれません。

第 2 問

微積分を利用した問題です。計算自体はとてもやりやすい部類ですが、結果から得られるものをうまく利用する必要がある設問もあります。

第 3 問

三角関数を利用した問題です。(ii) は少し工夫がいりますが、問題を丁寧に読んでいくと完答は難しくないでしょう。

第 4 問

図形と式に関する問題です。教科書でやるような流れをたどる形式になっていますので、基本を理解していれば難しくないです。