解答

第 1 問

問題	ア	イ, ウエ	オ	カ	キクケ	コ, サシ, ス	セ	ソ	タ	チ
解答	5	6,14	2	8	-10	5,65,2	2	0	2	0

第 2 問

問題	ア, イ	ウ	エ	オ, カ	キ, クケ, コ
解答	1,3	1	1	4,5	7,13,4

問題	サ, シ, ス	セソ	タチツテ	トナニヌ
解答	3,4,3	3,5	5,13,2	5,13,2

第 3 問

問題	ア, イ	ウ, エ
解答	2,3	5,3

問題	オ	カ	キ, ク	ケ, コ	サ, シ	スセ, ソ, タ, チ	ツ, テ, ト	ナ, ニ, ヌ
解答	2	5	2,2	5,2	5,2	10,2,2,6	3,2,2	5,2,3

第 4 問

問題	ア, イ	ウ, エ	オ	カ	キ
解答	1,6	4,5	2	7	2

解説

第 1 問

[**1**]

多項式を工夫して計算する問題です。見通しはたてやすいと思います。

(1) A の形に着目して、$(x+n)(n+5-x)$ という式を考えることにしました。これを展開すると

$(x+n)(n+5-x)=x(5-x)+n(5-x)+nx+n^2=x(5-x)+n^2+\underline{5}n$

となります。この式で $n=0,1,2$ を考えると順に

$x(5-x),(x+1)(6-x),(x+2)(7-x)$

という式が出ます。ということで

$$\begin{aligned} A &= x(5-x)\cdot(x+1)(6-x)\cdot(x+2)(7-x) \\ &= X\cdot(X+1^2+5\cdot 1)\cdot(X+2^2+5\cdot 2) \\ &= X(X+\underline{6})(X+\underline{14}) \end{aligned}$$

と変形できます。

さて、この X を使うと $x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき $5-x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ より

$X=\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)=\dfrac{5^2-17}{4}=\underline{2}$ となります。

さらに $A=2\cdot(2+6)\cdot(2+14)=2\cdot 8\cdot 16=2^1\cdot 2^3\cdot 2^4=\underline{2^8}$ と計算できます。

(2) 引き続き前で使用した X を利用します。

$(x+1)(x+2)(6-x)(7-x)=(X+6)(X+14)=X^2+20X+84$ となりますのでこの値が-16 のとき

$X^2+20+100=0$ より $(x+10)^2=0$ となり、$X=x(5-x)=\underline{-10}$ がわかります。

$X=x(5-x)=\dfrac{25}{4}-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2$ なので X はこの値をとりうることも確認できます。

さらにこれを x について解くと、$x^2-5x+10=0$ より $\underline{x=\dfrac{5\pm\sqrt{65}}{2}}$ がわかります。

[2]

　集合と論理に関する小問です。

(1)(a)(b) をそれぞれ検証しましょう。

(a) $1 \in A$ ですが $1 \notin C$ ですので誤っていることがわかります。

(b) 20=$2^2 \cdot 5$ ですので 20 の約数は 3 で割り切れません。したがって 20 の約数に 3 の倍数が存在しないことから正しいことがわかります。

これより<u>2:(a) 誤 (b) 正</u>が正しいとわかります。

次の (c)(d) については直接計算するのもいいですが、分配法則を利用すると前の結果を利用できます。

(c)$(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$ です。前の問題から $(A \cap B) = \emptyset$ がわかりますからこの集合は $C \cap B$ と表されます。これはすなわち偶数でかつ 3 の倍数ということで 6 の倍数の集合、すなわち $\{6, 12, 28\}$ であることがわかるので、これは正しいとわかります。

(d) (左辺)=$(\bar{A} \cup B) \cap (C \cup B)$ です。B の元はすべて $\bar{A}$ の元ですから $\bar{A} \cup B = \bar{A}$ となり、これより (左辺)=$\bar{A} \cap (C \cup B)$=(右辺) が得られます。したがってこれは正しいとわかります。

これより<u>0:(c) 正 (d) 正</u>が正しいとわかります。

(2) まずは「q または r」と p を比較します。p の条件を絶対値記号を使わない形式で表現すると

$p : x-2 < -2$ または $x-2 > 2$ となります。これをさらに変形すると $p : x < 0$ または $x > 4$ と言い換えられます。

これはすなわち $p : q$ または r と書き換えられますので、「q または r」であることは p であることの<u>2:必要十分条件である</u>といえます。

次は s と r を比較します。$\sqrt{x^2} = |x|$ に注意します。すると

$s : x > 4$ または $x < -4$ となります。つまり $s : r$ または $x < -4$ ですので $r \Rightarrow s$ は真です。

一方たとえば $x = -1$ とすると s は成立しますが r は成立しませんので $s \Rightarrow r$ は偽です。

ということで s は r であるための<u>0:必要条件であるが十分条件でない</u>ということがわかります。

第２問

２次関数に関する問題です。$f(x)$ を平方完成して頂点の座標がわかるように変形しますと

$$f(x)=a\left\{x^2-2\left(1+\frac{3}{a}\right)x\right\}-3a+21=a\left\{x-\left(1+\frac{3}{a}\right)\right\}-4a+15-\frac{9}{a}$$

となります。したがって $y=f(x)$ の頂点の x 座標 p は $p=\underline{1+\frac{3}{a}}$ がわかります。

(1) $0 \geq x \geq 4$ において $y=f(x)$ が $x=4$ で最小値をとる場合は、$p \geq 4$ となる場合です。すなわち

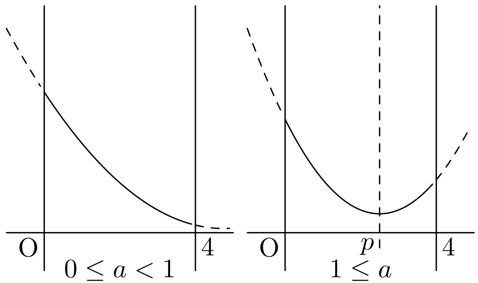
$1+\frac{3}{a} \geq 4$ がわかります。

$a>0$ ですので分母をはらって $a+3 \geq 4a$ となり、これより $\underline{0<a \leq 1}$ を得ます。

また、$y=f(x)$ が $x=p$ で最小値をとる場合は $0 \leq p \leq 4$ となる場合です。$a>0$ ですので $p>1$ は無条件で成り立ちます。ということで $p \leq 4$ を解くことになりますが、上と同様の計算で $\underline{1<a}$ を得ます。

したがって $y=f(x)$ の最小値が 1 のときは

「$0<a \leq 1$ かつ $f(4)=1$」のときと「$1<a$ かつ $f(p)=1$」のときに限られることがわかります。



$0 \leq a < 1$　　$1 \leq a$

前者のときは $f(4)=5a-3$ となりますので $a=\frac{4}{5}$ となり、これは $0<a \leq 1$ をみたします。

後者のときは $f(p)=-4a+15-\frac{9}{a}=1$ より $4a^2-14a+9=0$ となり、これを解くと $a=\frac{7 \pm \sqrt{13}}{4}$ が考えられますが $1<a$ と $\sqrt{13}>3$ より $\frac{7-\sqrt{13}}{4}$ は 1 より小さくなり不適となります。

したがって最小値が 1 となるような a の値は $\underline{a=\frac{4}{5}, \frac{7+\sqrt{13}}{4}}$ となります。

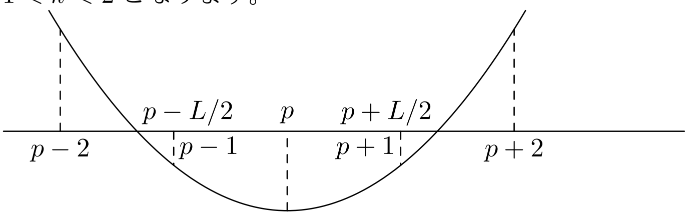
(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるとき、$a>0$ より頂点の y 座標が負になる場合ですので

$-4a+15-\frac{9}{a}<0$ が成り立ちます。

これを分母をはらって整理すると $4a^2-15a+9>0$ となります。

$4a^2-15a+9=(4a-3)(a-3)$ ですのでこれをみたす a は $\underline{0<a<\frac{3}{4}, 3<a}$

となります。
このとき $y = f(x)$ の x 軸との交点の x 座標において $f(x) = 0$ すなわち $a(x-p)^2 = 4a - 15 + \dfrac{9}{a}$ となることからその値はある正の実数 k を用いて $p \pm k$ と表されます。
このとき $L = (p+k) - (p-k) = 2k$ となりますから $2 < L < 4$ のとき $1 < k < 2$ となります。



したがって $2 < L < 4$ となるとき $f(p+1) < 0 < f(p+2)$ がわかります。すなわち
$a \cdot 1^2 - 4a + 15 - \dfrac{9}{a} < 0 < a \cdot 2^2 - 4a + 15 - \dfrac{9}{a}$
です。これを整理することで $a^2 - 5a + 3 > 0, 9 < 15a$ がわかります。それぞれを解くと
$a < \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} < a$ と $\dfrac{3}{5} < a$
となりますので求める範囲は
$\dfrac{3}{5} < a < \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} < a$ となります。

第３問

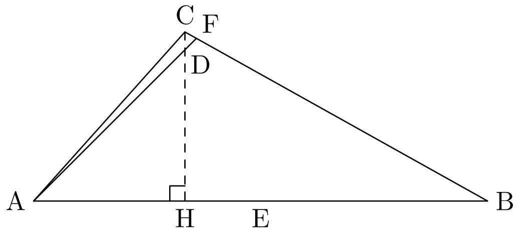
三角比を利用する問題です。

(1) 三角形 ABC に余弦定理 $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\angle\mathrm{BAC}$ を適用します。

$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}} = \dfrac{6^2+3^2-21}{2\cdot3\cdot6} = \underline{\dfrac{2}{3}}$ がわかります。

また、相互関係 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ と $\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ より

$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}} = \sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = \underline{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$ がわかります。



(2) 三角形 ACH が H を直角とする直角三角形になりますから

$\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC} = 3\cdot\dfrac{2}{3} = \underline{2}$、$\mathrm{CH} = \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC} = 3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \underline{\sqrt{5}}$ がわかります。また三角形 AHD も直角三角形であることから

$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AH}^2+\mathrm{AD}^2} = \sqrt{2\cdot2^2} = \underline{2\sqrt{2}}$ がわかり、これより

$\mathrm{CD} = \mathrm{CH} - \mathrm{DH} = \underline{\sqrt{5}-2}$ となります。

三角形 ACD は辺 CD を底辺とみることで高さが AH の長さになりますので面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AH} = \dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-2)\cdot2 = \underline{\sqrt{5}-2}$ となります。

またこの値を S とおいたときに $S = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin\angle\mathrm{CAD}$ が成り立ちますので

$\sin\angle\mathrm{CAD} = \dfrac{2S}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}} = \dfrac{2(\sqrt{5}-2)}{3\cdot2\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{6}}$ がわかります。

そこで三角形 ACD の外接円の半径を R とすると正弦定理より $\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin\angle\mathrm{CAD}} = 2R$ ですから

$R = \dfrac{\mathrm{CD}}{2\sin\angle\mathrm{CAD}} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{2\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{6}} = \underline{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$ となります。

また三角形 ACF の面積を S_1、三角形 AEF の面積を S_2 とおくと

$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AF}\cdot\sin\angle\mathrm{CAF}, S_2 = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}\cdot\sin\angle\mathrm{EAF}$ となりますので

$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{CAF}}{\mathrm{AE}\cdot\sin\angle\mathrm{EAF}} = \dfrac{3\cdot\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{6}}{\frac{1}{2}\cdot6\cdot\frac{2}{2\sqrt{2}}} = \underline{\dfrac{\sqrt{5}-2}{3}}$ がわかります。

第４問

　データの集計に関する問題です。

(1) 面倒ですがひとつひとつ検証します。ヒストグラムの幅が 5cm、箱ひげ図 1 目盛の間隔が 2cm であることに注意します。

0:箱ひげ図の最大最小の範囲を比べると男子短距離が約 50cm、男子長距離は男子短距離より範囲が狭く、女子短距離は約 45cm、女子長距離は女子短距離より範囲が狭いです。したがって最も範囲が大きいのは男子短距離ですので誤っているといえます。

1:四分位範囲は箱ひげ図の長方形の部分です。いずれも 5 目盛分を超えませんので範囲は 12cm 未満といえます。したがってこれは正しいといえます。

2:男子長距離グループの中央値は約 176cm と箱ひげ図から読み取れます。ヒストグラムでは 175cm〜180cm の範囲ですが、この度数は最大ではありません。したがってこれは誤っているといえます。

3:女子長距離グループの第 1 四分位数は約 161cm と読み取れます。ヒストグラムでは 160cm〜165cm の範囲ですが、この度数は最大ではありません。したがってこれは誤っているといえます。

4:箱ひげ図で最大値を比較しましょう。するとすべてのグループで最大である選手は男子短距離の選手とわかります。したがってこれは誤っているといえます。

5:箱ひげ図で最小値を比較しましょう。するとすべてのグループで最小である選手は女子短距離の選手とわかります。したがってこれは誤っているといえます。

6:男子短距離の中央値、男子長距離の第 3 四分位数はいずれも 180cm 以上で次の目盛の値 182cm より小さいことが分かります。したがってこれは正しいといえます。

(2) 今度は新たな指標を使って分析することになりました。

箱ひげ図がどれと対応するかを求める必要があるためさらに難しくなりましたが、まずこの対応を求めます。

まず箱ひげ図で最大をみますと (a) は 30kg/m^2 を超えており、(d) は 25/m^2 を超えていません。ということで、散布図で l_1 の上にくるもの、l_2 より上にこないものに着目すると、(a) は男子短距離、(d) は女子長距離とわかります。のこりの 2 つは中央値に着目して l_2 と分布との関係をみたり、最大最小になるような点を探すことで対応を探すことになるでしょう。(b) が女子短距離、(c) が男子長距離と判定できます。

さて、ここからはひとつひとつ検証しましょう。

0:どのグループをみても、X が増加すると W が増加する傾向がみられます。すなわち正の相関です。したがってこれは誤っているといえます。

1:Z の中央値がいちばん大きいのは箱ひげ図から (a) のグループです、(a) は

男子短距離のグループとわかりましたので、これは誤っているといえます。
2:Z の範囲は (d) が最小であることが読み取れます。(d) は女子長距離のグループとわかりましたので、これは誤っているといえます。
3:男子短距離グループの箱ひげ図は (a) であり、この四分位範囲は 2 目盛分より大きいです。(c) の四分位範囲は 2 目盛分より小さいです。したがって男子短距離グループの四分位範囲は最小でないといえますので、これは誤っているといえます。
4:女子長距離グループの箱ひげ図は (d) であり、これをみると Z の最大が 25 未満と読み取れます。したがってこれは正しいといえます。
5:準備により男子長距離グループは (c) である、と判定しましたので、これは正しいといえます。
(3) こんどはグループの代表値を計算することになりました。色々計算して、今度は相関係数を出そうという段階です。
X と W の相関係数は $\dfrac{X\text{ と }W\text{ の共分散}}{(X\text{ の標準偏差})(W\text{ の標準偏差})}$ で計算できます。
計算すると $\dfrac{0.754}{0.200\cdot 5.36}=\dfrac{3.77}{5.36}=0.7+\dfrac{0.018}{5.36}=0.703+\dfrac{0.00192}{5.36}$ となり、<u>2:0.703</u>に近い値だとわかります。

(4) もとの身長データを $h_1,\cdots$ とし、X,H 変換で得られたデータを $x_1,\cdots$ とおく。求めたいものは
$\dfrac{h_1^2+\cdots+h_n^2}{n}$ と表せます。いま $x_i=\dfrac{h_i^2}{10000}$ より $h_i^2=10000x_i$ が成り立ちますからこの式は
$10000\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}=10000\bar{x}$ と変形できます。
したがって $\bar{x}$ は X の平均 2.75 ですから、この式の値は<u>7:27500</u>となります。
さらに身長の分散は問題分に出てくる関係式を使用して
$s^2=\dfrac{h_1^2+\cdots+h_n^2}{n}-(\bar{h})^2=27500-(165.7)^2=43.51$ と求められますので、値は約<u>2:43.5</u>となります。

所感

第 1 問

[1]

　次数が多いですが工夫することで扱うことができる式を取り上げています。
$(x+a)(b-x)=-x^2+(b-a)x+ab$ と展開することに着目して $b-a$ が同じので分けられそう、というのは比較的見やすく、$X=x(5-x)$ という式も自然に出てきそうな置き換えだと思います。
$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のときに X の式を展開しないで入れる、ということに気付きたいところです。
(2) では X が $x(5-x) \leq \dfrac{25}{4}$ を示して絞り込むことになります。
ただ解いた時点で重解のため可能性があるのがこれしかないので範囲の検証は試験後にしたほうがいいでしょう。

[2]

　(1)$A=\{1,2,4,5,10,20\}, B=\{3,6,9,12,15,18\}$,
$C=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ です。
この解説ではこの形式を使わずに解き進めていますが、上のように元を列挙して進める、という方法もあります。
ただし (d) はこれを使うと $\bar{A}$ が 14 個の元をもってしまうので少々やりにくいと思います。
(計算すると両辺とも $\{3,6,8,9,12,14,15,16,18\}$ となりますが少々面倒です)
(2) 実数の範囲に関する条件を問います。条件 p の言い換えは難しくないですが、条件 r は $x>4$ と同値でないことに注意。$\sqrt{x^2}=x$ という間違いはやりがちですので気を付けましょう。

第 2 問

　二次関数と最大最小に関する基本的な問題です。
特定の範囲での最大最小をみるときは頂点の座標とかで場合分け、は教科書でもやるようなことですのでこの展開は予想できると思います。
もちろん a の範囲には注意して進めましょう。
(2) で $2<L<4$ を求めるとき、二次関数のグラフが $x=p$ に関して対称、ということに気付けば $f(p+1)<0<f(p+2)$ に気づいて計算しやすくなります。
解の公式から $f(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{(a+3)^2 \pm \sqrt{4a^2-15a+9}}{a}$ で L を計算してしまうと遠回りになるかもしれません。

第 3 問

三角比を利用する問題です。
それぞれの値を求めるところで何を使うかを考えることになりますが、基本的な定理を押さえておけばどれが最適か見えるでしょう。
$\sin\angle\mathrm{CAD}$ を使うところから計算力が要求されます。
最後の面積比は $\angle\mathrm{HAD}$ と $\angle\mathrm{CAD}$ を使う解き方を見つけたいところです。また、面積の値を求めずに共通なところはそのままにしておく、ということは心がけましょう。

第 4 問

統計に関する問題です。
問題数は少ないですが各選択肢の正誤を判定しなければならないため根気が要求されます。
(2) は箱ひげ図がどのグループかの検証もしなければならないですのでかなり面倒です。
大きくみてざっとした値をつかむ、という思考をしているかどうかで所要時間が変わるかもしれません。
(3) や (4) は計算が細かくなりがちなので計算間違いに陥る可能性は大きいと思います。
ここからは余談となりますが、(2) で登場した X は BMI を表します。
無理のない体形の場合 15〜30 の範囲にくるとされています。