解答

第 1 問

問題	ア	イ, ウエ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
解答	5	6,14	2	8	2	0	2	0

問題	サ, シ	ス	セ	ソ, タ	チ, ツテ, ト
解答	1,3	1	1	4,5	7,13,4

第 2 問

問題	ア, イ	ウ, エ, オ	カ	キ	ク, ケコ
解答	7,9	4,2,9	0	4	2,33

問題	サ, シ	ス, セ	ソ
解答	1,6	4,5	2

第 3 問

問題	ア, イ	ウ, エ	オ, カ	キ, ク	ケ, コ
解答	1,6	1,6	1,9	1,4	1,6

問題	サ	シ	ス, セソタ	チ, ツテ
解答	1	2	1,432	1,81

第 4 問

問題	ア, イ, ウ	エオ	カ	キク	ケ	コサシ	ス	セソ
解答	4,3,2	15	2	41	7	144	2	23

第 5 問

問題	ア, イ, ウ	エオ, カ	キク, ケ	コ	サ	シ, ス	セ, ソ	タ
解答	2,5,3	20,9	10,9	0	4	5,8	5,3	1

解説

第 1 問

[1]

　多項式を工夫して計算する問題です。見通しはたてやすいと思います。
(1) A の形に着目して、$(x+n)(n+5-x)$ という式を考えることにしました。
これを展開すると
$(x+n)(n+5-x) = x(5-x)+n(5-x)+nx+n^2 = x(5-x)+n^2+\underline{5}n$
となります。この式で $n=0,1,2$ を考えると順に
$x(5-x), (x+1)(6-x), (x+2)(7-x)$
という式が出ます。ということで

$$\begin{aligned} A &= x(5-x)\cdot(x+1)(6-x)\cdot(x+2)(7-x) \\ &= X\cdot(X+1^2+5\cdot 1)\cdot(X+2^2+5\cdot 2) \\ &= X(X+\underline{6})(X+\underline{14}) \end{aligned}$$

と変形できます。
さて、この X を使うと $x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき $5-x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ より
$X=\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)=\dfrac{5^2-17}{4}=\underline{2}$ となります。
さらに $A=2\cdot(2+6)\cdot(2+14)=2\cdot 8\cdot 16=2^1\cdot 2^3\cdot 2^4=\underline{2^8}$ と計算できます。

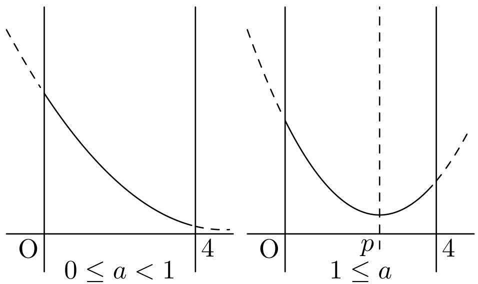
[2]

　集合と論理に関する小問です。
(1)(a)(b) をそれぞれ検証しましょう。
(a) $1\in A$ ですが $1\notin C$ ですので誤っていることがわかります。
(b) 20=$2^2\cdot 5$ ですので 20 の約数は 3 で割り切れません。したがって 20 の約数に 3 の倍数が存在しないことから正しいことがわかります。
これより2:(a) 誤 (b) 正が正しいとわかります。
次の (c)(d) については直接計算するのもいいですが、分配法則を利用すると前の結果を利用できます。
(c)$(A\cup C)\cap B=(A\cap B)\cup(C\cap B)$ です。前の問題から $(A\cap B)=\emptyset$ がわかりますからこの集合は $C\cap B$ と表されます。これはすなわち偶数でかつ 3 の倍数ということで 6 の倍数の集合、すなわち $\{6,12,28\}$ であることがわかるので、これは正しいとわかります。
(d) (左辺)=$(\bar{A}\cup B)\cap(C\cup B)$ です。B の元はすべて $\bar{A}$ の元ですから $\bar{A}\cup B=\bar{A}$ となり、これより (左辺)=$\bar{A}\cap(C\cup B)$=(右辺) が得られます。したがってこ

れは正しいとわかります。
これより$\underline{0:\text{(c) 正 (d) 正}}$が正しいとわかります。
(2) まずは「q または r」と p を比較します。p の条件を絶対値記号を使わない形式で表現すると
$p : x-2 < -2$ または $x-2 > 2$ となります。これをさらに変形すると $p : x < 0$ またh $x > 4$ と言い換えられます。
これはすなわち $p : q$ または r と書き換えられますので、「q または r」であることは p であることの$\underline{\text{2:必要十分条件である}}$といえます。
次は s と r を比較します。$\sqrt{x^2} = |x|$ に注意します。すると
$s : x > 4$ または $x < -4$ となります。つまり $s : r$ または $x < -4$ ですので $r \Rightarrow s$ は真です。
一方たとえば $x = -1$ とすると s は成立しますが r は成立しませんので $s \Rightarrow r$ は偽です。
ということで s は r であるための$\underline{\text{0:必要条件であるが十分条件でない}}$ということがわかります。

[3]

2 次関数に関する小問です。$f(x)$ を平方完成して頂点の座標がわかるように変形しますと
$$f(x) = a\left\{x^2 - 2\left(1+\frac{3}{a}\right)x\right\} - 3a + 21 = a\left\{x - \left(1+\frac{3}{a}\right)\right\} - 4a + 15 - \frac{9}{a}$$
となります。したがって $y = f(x)$ の頂点の x 座標 p は $p = \underline{1+\frac{3}{a}}$ がわかります。
(1) $0 \geq x \geq 4$ において $y = f(x)$ が $x = 4$ で最小値をとる場合は、$p \geq 4$ となる場合です。すなわち
$1 + \frac{3}{a} \geq 4$ がわかります。
$a > 0$ ですので分母をはらって $a + 3 \geq 4a$ となり、これより $\underline{0 < a \leq 1}$ を得ます。
また、$y = f(x)$ が $x = p$ で最小値をとる場合は $0 \leq p \leq 4$ となる場合です。$a > 0$ ですので $p > 1$ は無条件で成り立ちます。ということで $p \leq 4$ を解くことになりますが、上と同様の計算で $\underline{1 < a}$ を得ます。
したがって $y = f(x)$ の最小値が 1 のときは
「$0 < a \leq 1$ かつ $f(4) = 1$」のときと「$1 < a$ かつ $f(p) = 1$」のときに限られることがわかります。



$0 \leq a < 1$　　$1 \leq a$

前者のときは $f(4) = 5a - 3$ となりますので $a = \dfrac{4}{5}$ となり、これは $0 < a \leq 1$ をみたします。
後者のときは $f(p) = -4a + 15 - \dfrac{9}{a} = 1$ より $4a^2 - 14a + 9 = 0$ となり、これを解くと $a = \dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{4}$ が考えられますが $1 < a$ と $\sqrt{13} > 3$ より $\dfrac{7 - \sqrt{13}}{4}$ は 1 より小さくなり不適となります。
したがって最小値が 1 となるような a の値は $\underline{a = \dfrac{4}{5}, \dfrac{7 + \sqrt{13}}{4}}$ となります。

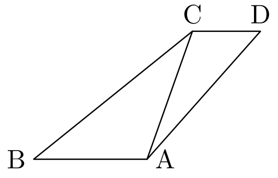
第２問

[1]

　三角比を利用した問題です。数 1 と共通でなくなっています。
まずは三角形 ABC での値を計算しましょう。
余弦定理 $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cdot\angle\mathrm{ABC}$ より
$\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\mathrm{BA}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}} = \dfrac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot5\cdot9} = \dfrac{7}{9}$ となります。
また、相互関係 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ と $\sin\angle\mathrm{ABC}>0$ より
$\sin\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}} = \sqrt{1-\dfrac{49}{81}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ がわかります。
ここで四角形 ABCD が台形である場合、どちらの組が平行になるかを考えることになります。
まずは CD と $\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$ の大小を比較するようです。
$\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC} = 9\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{9} = 4\sqrt{2}$ となり、したがって0:$\mathrm{CD} < \mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$ であることが判明しました。
これはどういうことなのでしょう。この式の右辺は、BC と AD が平行になる場合の高さを表していたのでした。しかしこれよりも辺 CD は短いということは A を通り BC に平行な直線に点 D は来ないということを示しています。
したがって BC と AD が平行と考えると矛盾が生じますので4:AB と CD が平行であるとわかります。
最後に線分 BD の長さを求めたいです。三角形 BCD を利用するといけそうです。
いま AB と CD が平行ですので $\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{CBA}=180^\circ$ です。ということは余弦定理を使って今までででた値を利用して解けそうです。

$$\begin{aligned}
\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\cos\angle\mathrm{BCD}\\
&= 9^2+3^2-2\cdot9\cdot3\cdot\cos(180^\circ-\angle\mathrm{CBA})\\
&= 90-54\cdot(-\cos\angle\mathrm{CBA})\\
&= 90+54\cdot\frac{7}{9} = 132
\end{aligned}$$

となりましたので、BD=$2\sqrt{33}$がわかります。



[**2**]

　データの集計に関する小問です。
(1) 面倒ですがひとつひとつ検証します。ヒストグラムの幅が 5cm、箱ひげ図 1 目盛の間隔が 2cm であることに注意します。
0:箱ひげ図の最大最小の範囲を比べると男子短距離が約 50cm、男子長距離は男子短距離より範囲が狭く、女子短距離は約 45cm、女子長距離は女子短距離より範囲が狭いです。したがって最も範囲が大きいのは男子短距離ですので誤っているといえます。
1:四分位範囲は箱ひげ図の長方形の部分です。いずれも 5 目盛分を超えませんので範囲は 12cm 未満といえます。したがってこれは正しいといえます。
2:男子長距離グループの中央値は約 176cm と箱ひげ図から読み取れます。ヒストグラムでは 175cm〜180cm の範囲ですが、この度数は最大ではありません。したがってこれは誤っているといえます。
3:女子長距離グループの第 1 四分位数は約 161cm と読み取れます。ヒストグラムでは 160cm〜165cm の範囲ですが、この度数は最大ではありません。したがってこれは誤っているといえます。
4:箱ひげ図で最大値を比較しましょう。するとすべてのグループで最大である選手は男子短距離の選手とわかります。したがってこれは誤っているといえます。
5:箱ひげ図で最小値を比較しましょう。するとすべてのグループで最小である選手は女子短距離の選手とわかります。したがってこれは誤っているといえます。
6:男子短距離の中央値、男子長距離の第 3 四分位数はいずれも 180cm 以上で次の目盛の値 182cm より小さいことが分かります。したがってこれは正しいといえます。

(2) 今度は新たな指標を使って分析することになりました。
箱ひげ図がどれと対応するかを求める必要があるためさらに難しくなりましたが、まずこの対応を求めます。
まず箱ひげ図で最大をみますと (a) は 30kg/m^2 を超えており、(d) は 25/m^2 を超えていません。ということで、散布図で l_1 の上にくるもの、l_2 より上にこないものに着目すると、(a) は男子短距離、(d) は女子長距離とわかります。のこりの 2 つは中央値に着目して l_2 と分布との関係をみたり、最大最小になるような点を探すことで対応を探すことになるでしょう。(b) が女子短距離、(c) が男子長距離と判定できます。
さて、ここからはひとつひとつ検証しましょう。
0:どのグループをみても、X が増加すると W が増加する傾向がみられます。すなわち正の相関です。したがってこれは誤っているといえます。
1:Z の中央値がいちばん大きいのは箱ひげ図から (a) のグループです、(a) は

男子短距離のグループとわかりましたので、これは誤っているといえます。
2:Z の範囲は (d) が最小であることが読み取れます。(d) は女子長距離のグループとわかりましたので、これは誤っているといえます。
3:男子短距離グループの箱ひげ図は (a) であり、この四分位範囲は 2 目盛分より大きいです。(c) の四分位範囲は 2 目盛分より小さいです。したがって男子短距離グループの四分位範囲は最小でないといえますので、これは誤っているといえます。
4:女子長距離グループの箱ひげ図は (d) であり、これをみると Z の最大が 25 未満と読み取れます。したがってこれは正しいといえます。
5:準備により男子長距離グループは (c) である、と判定しましたので、これは正しいといえます。

(3) ここは今まで出たデータから離れて純粋な式処理になります。
$(x_k - \bar{x})(w_k - \bar{w}) = x_k w_k - \bar{w} x_k - \bar{x} w_k + \bar{x}\bar{w}$ となります。これを利用すると

$$
\begin{aligned}
& (x_1 - \bar{x})(w_1 - \bar{w}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(w_n - \bar{w}) \\
= \ & x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n - \bar{w}(x_1 + \cdots + x_n) - \bar{x}(w_1 + \cdots + w_n) + n\bar{x}\bar{w} \\
= \ & x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n - \bar{w} \cdot (n\bar{x}) - \bar{x} \cdot (n\bar{w}) + n\bar{x}\bar{w} \\
= \ & x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n - \underline{2 : n\bar{x}\bar{w}}
\end{aligned}
$$

と計算できます。（ということは、共分散は積の平均から平均の積を引くと得られる、ということですね）

第３問

　場合の数と確率に関する問題です。

(1)A が起こる確率は大きいさいころにのみ関係しますので $P(A)=\underline{\frac{1}{6}}$ です。

B が起こる場合は出た目の組合せが (大、小)=(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1) の場合ですので $P(B)=\frac{6}{36}=\underline{\frac{1}{6}}$ です。

C が起こる場合は (大、小)=(3,6),(4,5),(5,4),(6,3) の場合ですので $P(C)=\frac{4}{36}=\underline{\frac{1}{9}}$ です。

(2)C が起こりさらに A が起こった場合は (大、小)=(4,5) となる場合ですので、

C が起こったうえでの A が起こる条件付き確率は $\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}}=\underline{\frac{1}{4}}$ であり、

A が起こったうえでの C が起こる条件付き確率は $\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\underline{\frac{1}{6}}$ であることがわかります。

(3) それぞれ計算しましょう。

$A\cap B$ が起こる場合は (大、小)=(4,3) となる場合ですので確率は $\frac{1}{36}$ です。

一方 $P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ ですので

$\underline{1{:}P(A\cap B)=P(A)P(B)}$がわかります。

また、$P(A\cap C)=\frac{1}{36}$ で $P(A)P(C)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{54}$ ですので

$\underline{2{:}P(A\cap C)>P(A)P(C)}$がわかります。

(4)1 回の試行による確率は $P(A\cap B)=\frac{1}{36}, P(\bar{A}\cap C)=\frac{3}{36}$ となります。これより 1 回目に $A\cap B$、2 回目に $\bar{A}\cap C$ が起こる確率は $\frac{1}{36}\cdot\frac{3}{36}=\underline{\frac{1}{432}}$ となります。

また 2 回の試行で事象 A,B,C が 1 回ずつ起こる場合を考えると、B,C は互いに排反な事象であることがわかりますので、どちらか 1 回で B、残り 1 回で C が発生することになります。

さらに A がどちらの事象とともに発生するかを考えると、その確率は

$2!\cdot P(A\cap B)\cdot P(\bar{A}\cap C)+2!\cdot P(\bar{A}\cap B)\cdot P(A\cap C)$ となります。

$P(\bar{A}\cap B)=\frac{5}{36}$ ですのでこの値は

$2\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{3}{36}+2\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{36}=\underline{\frac{1}{81}}$ となります。

第４問

　整数の性質を利用した問題です。

(1)$144 = \underline{2^4 \cdot 3^2}$ です。これより

144 の正の約数は $2^a 3^b (a = 0, 1, 2, 3, 4)(b = 0, 1, 2)$ と表せますからその個数は $5 \cdot 3 = \underline{15}$ 個となります。

(2)$144x - 7y = 1$ を解くことを考えると、まず $4x + 7(20x - y) = 1$ です。

$20x - y = y_1$ とおくと $4x + 7y_1 = 1$ より $4(x + y_1) + 3y_1 = 1$ です。

$x + y_1 = x_1$ とおくと $4x_1 + 3y_1 = 1$ より $x_1 + 3(y_1 + x_1) = 1$ となります。

したがって $x_1 = 1, y_1 = -1$ が解の 1 つとなり、復元していくと$\underline{x = 2, y = 41}$ が得られます。

またこれより $144(x - 2) - 7(y - 41) = 0$ となりますから $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y-41}{144}$ となります。この等式の値を k とおくと$\underline{x = 7k + 2, y = 144k + 41}$が一般解とわかります。

(3)144 の倍数は整数 x を用いて $144x$ と表せます。これが 7 で割って 1 余る場合、ある整数 y を用いて $144x = 7y + 1$ が成り立ちます。これは (2) で解いた不定方程式 $144x - 7y = 1$ に帰着しますので、$x = 2 + 7k$ がわかります。

以降、x の小さい順に素因数分解を考えると、

$144 \cdot 2 = 2^5 \cdot 3^2$ は約数が $6 \cdot 3 = 18$ 個、

$144 \cdot 9 = 2^4 \cdot 3^4$ は約数が $5 \cdot 5 = 25$ 個、

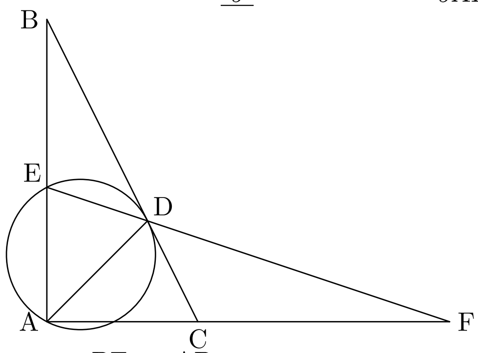
$144 \cdot 16 = 2^8 \cdot 3^2$ は約数が $9 \cdot 3 = 27$ 個、

$144 \cdot 23 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 23^1$ は約数が $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ 個、$\cdots$ となりますので、

約数が 18 個で最小のものは $\underline{144 \times 2}$、約数が 30 個で最小のものは $\underline{144 \times 23}$ とわかります。

第５問

　平面幾何を活用した問題です。
角 A の二等分線と BC との交点を D としたとき、CD:BD=CA:BA=1:2 となりますので BD:BC=2:3 となります。
$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ですので
$\mathrm{BD} = \frac{2}{3}\mathrm{BC} = \underline{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$ となります。
次に D で辺 BC に接して A を通る円を考え、辺 AB と円とのもう 1 つの交点を E とすると方べきの定理
$\mathrm{BD} \cdot \mathrm{BD} = \mathrm{BA} \cdot \mathrm{BE}$ が成り立ちます。これより
$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BE} = \mathrm{BD}^2 = \underline{\frac{20}{9}}$ となり、$\mathrm{BE} = \frac{20}{9\mathrm{AB}} = \frac{20}{9 \cdot 2} = \underline{\frac{10}{9}}$ がわかります。



ここで $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}$ と $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$ を計算します。
$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ であり、$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ となります。分母をそろえると
$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{5}{3\sqrt{5}}$、$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{6}{3\sqrt{5}}$ となりますから$\underline{0{:}\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} < \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}}$が成り立ちます。
ということは D を通り AC に平行な直線と辺 BC との交点を D' としたとき BD' $>$ BE が成立していることになりますので、直線 DE は辺 AC の4:C側の延長線上で交わることがわかります。
その交点を F としたときメネラウスの定理より $\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} = 1$ が成り立ちます。これより
$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AE}} \cdot \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD}} = \frac{\frac{10}{9}}{2 - \frac{10}{9}} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{5}{8}}$ がわかります。これより $\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AC} + \mathrm{CF}} = \frac{5}{8}$
ですから $\mathrm{CF} = \frac{5}{3}\mathrm{AC} = \underline{\frac{5}{3}}$ となります。
ここから $\mathrm{AF} = \frac{8}{3}$ となり $\mathrm{BF} = \sqrt{\mathrm{AF}^2 + \mathrm{AB}^2} = \sqrt{\frac{64}{9} + 4} = \frac{10}{3}$ となり、
$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AB}} = \frac{5}{3}$ が成り立ちます。
ということは直線 BC は $\angle\mathrm{ABF}$ の二等分線であることがわかり、したがって D は三角形 ABF の1:内心であるとわかります。

所感

第 1 問

[1]

次数が多いですが工夫することで扱うことができる式を取り上げています。
$(x+a)(b-x)=-x^2+(b-a)x+ab$ と展開することに着目して $b-a$ が同じので分けられそう、というのは比較的見やすく、$X=x(5-x)$ という式も自然に出てきそうな置き換えだと思います。
$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のときに X の式を展開しないで入れる、ということに気付きたいところです。

[2]

(1)$A=\{1,2,4,5,10,20\}, B=\{3,6,9,12,15,18\}$,
$C=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ です。
この解説ではこの形式を使わずに解き進めていますが、上のように元を列挙して進める、という方法もあります。
ただし (d) はこれを使うと $\bar{A}$ が 14 個の元をもってしまうので少々やりにくいと思います。
(計算すると両辺とも $\{3,6,8,9,12,14,15,16,18\}$ となりますが少々面倒です)
(2) 実数の範囲に関する条件を問います。条件 p の言い換えは難しくないですが、条件 r は $x>4$ と同値でないことに注意。$\sqrt{x^2}=x$ という間違いはやりがちですので気を付けましょう。

[3]

二次関数と最大最小に関する基本的な問題です。
特定の範囲での最大最小をみるときは頂点の座標とかで場合分け、は教科書でもやるようなことですのでこの展開は予想できると思います。
もちろん a の範囲には注意して進めましょう。

第 2 問

[1]

三角比を利用する問題です。数学 1 と最初の設定から求めるものまで異なる、珍しい形式です。
それぞれの値を求めるところで何を使うかを考えることになりますが、基本

的な定理を押さえておけばどれが最適か見えるでしょう。
台形だと仮定したとき、不等式がどのような意味をもつかを考える必要がありますが難しくはないです。

[2]

統計に関する問題です。
問題数は少ないですが各選択肢の正誤を判定しなければならないため根気が要求されます。
(2) は箱ひげ図がどのグループかの検証もしなければならないですのでかなり面倒です。
おおきくみてざっとした値をつかむ、という思考をしているかどうかで所要時間が変わるかもしれません。
(3) は単純に計算すると項が多くなりがちなので計算間違いに陥る可能性は大きいと思います。うまくまとめられるか考えましょう。
ここからは余談となりますが、(2) で登場した X は BMI を表します。
無理のない体形の場合 15〜30 の範囲にくるとされています。

第 3 問

確率の基本的な問題です。場合を列挙しやすいものが使われています。
(4) の最後は B と C が同時に発生しないことから分けやすくなりますが、1 回目に $\bar{A} \cap C$ が発生する、などの数え忘れには気を付けましょう。

第 4 問

整数を題材にした問題です。
(1) と (2) では共通で 144 という値が出ていますがこのままでは関連がなさそうに見えます。
しかし (3) で両方を使う、という作り込まれた内容です。
(2) の不定方程式は計算数があまり増えないですので解きやすいと思います。
(3) は (2) の式をうまく言い換えることができるかが決め手となります。最小値は小さい値から検証するのが速くて確実でしょう。

第 5 問

平面幾何を用いる問題です。
角の二等分線の性質など基本的な定理を押さえておけば前半はいけるでしょう。

$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}$ と $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$ の比較による判断からの値はなかなかに判断しにくく、思考力が問われます。

そして、なぜか最終的に D が三角形 ABF の内心であるということを示してしまう、なかなか展開が見えない問題です。

A が直角で AB が AC より長いならこの結果になるようです。