解答

第 1 問

問題	ア	イ, ウ	エオカ	キ	ク	ケ, コ	サシ, スセ
解答	2	4,5	345	6	3	3,2	29,30

問題	ソ, タ	チ, ツ	テ, ト, ナ	ニ	ヌ, ネ	ノ, ハヒ
解答	2,3	1,2	0,3,9	2	3,4	4,27

第 2 問

問題	ア	イウ, エ	オ	カ, キ, ク, ケ	コ	サ	シ, ス, セ	ソ	タチ
解答	2	-2,2	1	3,3,3,1	2	3	3,5,2	3	-1

問題	ツ	テ	トナニヌ
解答	7	4	-6,2,2

第 3 問

問題	アイ	ウエ	オ, カキ	クケ	コ	サ, シ, ス
解答	-6	12	6,12	12	3	6,3,1

問題	セ	ソ, タ, チ	ツテト	ナ, ニ, ヌ, ネ
解答	5	6,3,2	-18	2,3,9,2

第 4 問

問題	ア	イ	ウ, エ, オ, カ	キク, ケ	コ, サ, シ	スセ, ソ	タチ	ツ, テ	トナ, ニ, ヌ
解答	2	2	3,4,1,4	-3,4	$1, a, a$	$-a, 4$	-3	9,6	$3a, 2, 2$

第 5 問

問題	ア, イ	ウ	エ	オ	カ	キ
解答	$1, a$	6	8	2	8	6

問題	ク, ケ	コサ	シス	セ. ソタ	チ. ツテ	トナ	ニ	ヌネ	ノハ	ヒ
解答	1,6	30	25	2.40	1.20	88	8	76	84	4

解説

第 1 問

[1]

三角関数に関する小問です。

(1)1 ラジアンは2:半径 1、弧の長さ 1 の扇型における中心角の大きさです。この面積は $\frac{1}{2}$ ですので「半径 1、面積 1 の扇型」の中心角は 2 ラジアンとなります。

(2)180° が π ラジアンですので 144° のとき $\frac{144}{180}\pi = \frac{4}{5}\pi$ となります。また $\frac{23}{12}\pi$ ラジアンは $180° \cdot \frac{23}{12} = 345°$ となります。

(3)$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ のとき $\theta = x - \frac{\pi}{5}$ より $\theta + \frac{\pi}{30} = x - \frac{\pi}{6}$ ですので①は

$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ となります。

加法定理で $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos x + \sin x)$ ですのでさらに

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ となります。

合成 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \cos\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ですので

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ となります。

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より $\frac{7\pi}{10} \leq x \leq \frac{6\pi}{5}$ となり、さらに $\frac{11\pi}{30} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{13\pi}{15}$ ですのでこれを解くと

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ より $x = \frac{7\pi}{6}$ ですので

$\theta = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{5} = \frac{29}{30}\pi$ となります。

[2]

指数対数関数に関する小問です。

②の式で 3 を底とする対数をとると $\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3\left(\frac{x}{c}\right)^3$ となります。

$t = \log_3 x$ とおくと

(左辺)=$(\log_3 x)(\log_3 x) = t^2$、(右辺)=$3(\log_3 x - \log_3 c) = 3t - 3\log_3 c$ となりますので整理して

$t^2 - 3t + 3\log_3 c \geq 0$ となります。

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき $\log_3 c = \frac{1}{3}\log_3 9 = \frac{2}{3}$ ですので③の式は

$t^2 - 3t + 2 \geq 0$ となります。$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ ですので③をみたす

t は

$\underline{t \leq 1, 2 \leq t}$ となります。すなわち $x \leq 3^1, 3^2 \leq x$ ですので真数条件 $0 < x$ と合わせて

$\underline{0 < x \leq 3, 9 \leq x}$ となります。

次は $x > 0$ で考えます。$\log_3 x$ がとりうる値は2:実数全体です。

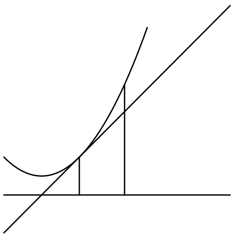
③の式の左辺を平方完成すると $\left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 3\log_3 c - \dfrac{9}{4} \geq 0$ となりますのでこれがすべての t について成立するとき $3\log_3 c - \dfrac{9}{4} \geq 0$ より

$\log_3 c \geq \dfrac{3}{\underline{4}}$ となり、$c \geq 3^{\frac{3}{4}} = \underline{\sqrt[4]{27}}$ がわかります。

第２問

[1]

　多項式の微積分に関する問題です。
(1)l の傾きは接線の係数である$\underline{2}$です。
放物線 C の x 座標が x の点における接線の傾きは $2px+q$ ですから A における接線の傾きは $2p+q$ となり、$2=2p+q$ より $q=\underline{-2p+2}$ がわかります。
さらに C が点 A を通ることより $1=p+q+r$ がわかりますので
$r=1-p-q=1-p-(-2p+2)=p-\underline{1}$ となります。
したがって C の式は $y=px^2+(2-2p)x+(p-1)$ と表せます。



(2)C は l の上側にきてまた A で接することから

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^v \{px^2+(2-2p)x+(p-1)-(2x-1)\}dx \\
&= \int_1^v (px^2-2px+p)dx \\
&= p\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^v = p\left(\frac{v^3}{3}-v^2+v-\frac{1}{3}\right) \\
&= \underline{\frac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)}
\end{aligned}$$

となります。また、x 軸、l、直線 $x=1$、直線 $x=v$ で囲まれた図形は台形ですので
$T=\dfrac{1}{2}\{1+(2v-1)\}(v-1)=\underline{v^2-v}$ となります。
$U=S-T$ とすると $\dfrac{dU}{dv}=\dfrac{p}{3}(3v^2-6v+3)-(2v-1)=p(v^2-2v+1)-(2v-1)$ となります。$v=2$ で極値をとるときこの値が 0 になりますから $p-3=0$ となり、これより$\underline{p=3}$となります。このとき
$U=(v^3-3v^2+3v-1)-(v^2-v)=(v-1)\{(v^2-2v+1)-v\}=(v-1)(v^2-3v+1)$
となりますので、$U=0$ のとき $v=1,\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ となります。$3-\sqrt{5}<1$ より $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1$ ですから $v_0=\underline{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ となります。
また $1<v<v_0$ のとき $v-1>0, v^2-3v+1<0$ ですから $U<0$ すなわち U は3:負の値のみとります。
$p=3$ のとき仮定から $v=2$ で極値をとりますので $1<v<v_0$ での値から極

小値となります。したがって最小値は $v=2$ の値でありすなわち
$(2-1)(2^2-3\cdot 2+1)=\underline{-1}$ となります。

[2]

形式が明示されていない条件から関数を導出する小問です。
$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とするとき、その定義から $F'(x)=\underline{7:f(x)}$ です。
仮定より $x\geq 1$ のとき $f(x)\leq 0$ ですから

$$W=\int_1^t (0-f(x))dx=[-F(x)]_1^t=\underline{4:-F(t)+F(1)}$$

となります。
また、底辺の長さが $2t^2-2$、2 辺の長さが t^2+1 の二等辺三角形の高さは
$\sqrt{(t^2+1)^2-\left(\dfrac{2t^2-2}{2}\right)^2}=\sqrt{4t^2}=2|t|$ であるため $t>1$ より
面積は $\dfrac{1}{2}\cdot(2t^2-2)\cdot 2t=2t^3-2t$ となります。
したがって W に関する等式 $-F(t)+F(1)=2t^3-2t$ が成り立ちます。これを t で微分すると
$-f(t)=6t^2-2$ となりますので $t>1$ において $f(t)=\underline{-6t^2+2}$ がわかります。

第３問

　数列を利用した問題です。

(1) $\{a_n\}$ の公差を d とおきます。

第 4 項が 30 ですので $a_1+3d=30$、

第 8 項までの和が 288 ですので $\dfrac{8(a_1+a_8)}{2}=288$ です。

$a_8=a_1+7d$ を利用すると $4(2a_1+7d)=288$ となりますので、連立して解くと

$a_1=\underline{-6}, d=\underline{12}$ がわかります。したがって、

$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}=\dfrac{n\{-12+(n-1)\cdot 12\}}{2}=\underline{6n^2-12n}$

がわかります。

(2) $\{b_n\}$ の公比を r とおきます。

第 2 項が 36 ですので $a_1r=36$ がわかりますので $b_1=\dfrac{36}{r}$ です。

初項から第 3 項までの和が 156 ですので $b_1+b_1r+b_1r^2=156$ です。

b_1 を代入して消去することで $\dfrac{36}{r}+36+36r=156$ となります。

分母を払って整理すると $3r^2-10r+3=0$ となり、$3r^2-10r+3=(3r-1)(r-3)$ と仮定 $r>0$ より

$b_1=\underline{12}, r=\underline{3}$ がわかります。これより、

$T_n=b_1\cdot\dfrac{r^n-1}{r-1}=12\cdot\dfrac{3^n-1}{3-1}=\underline{6(3^n-1)}$ がわかります。

(3) 複雑な数列 $\{c_n\}$ を考える為、階差数列 $\{d_n\}$ を考えます。

$$\begin{aligned}
d_n &= c_{n+1}-c_n \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(n-k+2)(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k) \\
&= \{n-(n+1)+2\}(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) \\
&= (a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n+1}b_k
\end{aligned}$$

となりますので d_n の式としてあてはまるものは $\underline{5 : S_{n+1}-T_{n+1}}$ となります。

さらにこれを計算することで

$$\begin{aligned}
d_n &= \{6(n+1)^2-12(n+1)\}-6(3^{n+1}-1) \\
&= 6n^2-6\cdot 3^{n+1}=\underline{6n^2-2\cdot 3^{n+2}}
\end{aligned}$$

がわかります。

$c_1 = a_1 - b_1 = \underline{-18}$ ですので、

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k = -18 + \sum_{k=1}^{n-1} (6n^2 - 2 \cdot 3^{n+2}) \\ &= -18 + 6 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - 2 \cdot 3^3 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \\ &= -18 + (2n^3 - 3n^2 + n) - (3^{n+2} - 27) \\ &= \underline{2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2}} \end{aligned}$$

がわかります。

第４問

　ベクトルを利用した問題です。
(1)$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{FB}}-\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ とできますので $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\underline{2:\vec{q}-\vec{p}}$ に等しくなります。したがって
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2=(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}-\vec{p})=\underline{|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2}$ がわかります。
(2) D は辺 AB を 1:3 に内分しますので
$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\frac{3}{1+3}\overrightarrow{\mathrm{FA}}+\frac{1}{1+3}\overrightarrow{\mathrm{FB}}=\underline{\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}}$ となります。
(3) F,C,D は一直線上にきますので $\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$ とおけます。
②の左辺に代入することで $s\vec{r}=\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}$ となります。
これを $\vec{q}$ の式に直すことで $\vec{q}=\underline{-3\vec{p}+4s\vec{r}}$ となります。
また、F,A,E が一直線上にくることから $\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$ とおけ、E が辺 BC を $a:(1-a)$ に内分することから
$t\vec{p}=(1-a)\vec{q}+a\vec{r}$ が成り立ちます。
これを $\vec{q}$ の式に直すことで $\vec{q}=\underline{\frac{t}{1-a}\vec{p}-\frac{a}{1-a}\vec{r}}$ がわかります。
$\vec{p}$ と $\vec{r}$ は互いの式で表せませんので③と④の係数を比較することで $-3=\frac{t}{1-a}, 4s=-\frac{a}{1-a}$ となり、
これより $s=\underline{\frac{-a}{4(1-a)}}, t=\underline{-3(1-a)}$ がわかります。
(4) (3) で $\overrightarrow{\mathrm{FE}}=-3(1-a)\vec{p}$ を使って表せることがわかりましたので、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2 &= |-3(1-a)\vec{p}-\vec{q}|^2\\ &= 9(1-a)^2|\vec{p}|^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2\\ &= \underline{9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2}\end{aligned}$$

がわかります。①と合わせて
$1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=\underline{9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2}$ となりますから
$(8-6a)\vec{p}\cdot\vec{q}=1-(3-3a)^2=(4-3a)(3a-2)$ となり、
$0<a<1$ より $\vec{p}\cdot\vec{q}=\underline{\frac{3a-2}{2}}$ がわかります。

第 5 問

確率と統計を利用した問題です。

(1)$X=2a$ となる場合は a 枚のうちの 1 枚だけある $2a$ のカードを取り出す場合に限られますので、$X=\underline{\frac{1}{a}}$ です。

このとき平均は

$$\sum_{k=1}^{a}\left(\frac{1}{a}\cdot 2k\right)=\frac{2}{a}\cdot\frac{a(a+1)}{2}=a+1$$

であり分散は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{a}\left\{\frac{1}{a}\cdot(2k)^2\right\}-(a+1)^2&=\frac{4}{a}\cdot\frac{a(a+1)(2a+1)}{6}-(a+1)^2\\&=\frac{(a+1)(4a+2)}{3}-(a+1)^2=\frac{(a+1)(a-1)}{3}\end{aligned}$$

となりますので $a=5$ のとき平均は $5+1=\underline{6}$、分散は $\frac{(5+1)\cdot(5-1)}{3}=\underline{8}$ です。

このとき $sX+t$ の平均が 20、分散が 32 になる場合、

$E(sX+t)=sE(X)+t, V(sX+t)=s^2V(X)$ であることを利用すると

$20=6s+t, 32=8s^2$ が成り立ちます。

$s>0$ ですからこれを解くことで $\underline{s=2, t=8}$ がわかります。

このとき $sX+t\geq 20$ ならば $X\geq 6$ ですから引いたカードが 6,8,10 のいずれかの場合ということになりますので、確率は $\frac{3}{5}=\underline{0.6}$ となります。

(2)3 枚のカードを連続で取り出し順に並べる場合、その取り出し方は $a(a-1)(a-2)$ 通りです。

並べると小さい順に並ぶ場合、それは取り出した 3 枚の組み合わせ 1 組に対し 1 通りが定まりますので、全体で $\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}$ 通りです。

従って取り出し方が同様に確からしいことからその確率は

$\frac{\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}}{a(a-1)(a-2)}=\underline{\frac{1}{6}}$ となります。

この試行を 180 回繰り返したときの A が起こる回数を Y とすると Y は二項分布 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ に従いますので

平均は $180\cdot\frac{1}{6}=\underline{30}$、分散は $180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\underline{25}$ となります。

この Y の分布を正規分布に近似するとき $\sigma=5$ となり、$Z=\frac{Y-m}{\sigma}$ とおくことで $18\leq Y\leq 36$ は $\frac{18-30}{5}\leq Z\leq\frac{36-30}{5}$ すなわち $\underline{-2.40\leq Z\leq 1.20}$ であり、$P(18\leq Y\leq 36)$ の値は

$P(-2.40\leq Z\leq 1.20)=0.4918+0.3849=0.8767$ となり、約$\underline{0.88}$となります。

(3) 標本から母集団での割合を推定する問題です。
賛成者の比率は $\frac{320}{400} = \underline{0.8}$ となります。信頼区間 95%のとき
$0.8 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{400}} \leq p \leq 0.8 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{400}}$ となります。
$\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{400}} = 0.02$ ですので $0.7616 \leq p \leq 0.8384$ となり、
丸めて $\underline{0.76 \leq p \leq 0.84}$ となります。
標本数 n や標本比率 R としたとき、信頼度 95%の信頼区間の幅は $2 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$ となります。
したがって $L_1 = 3.84 \cdot \sqrt{\frac{0.16}{400}}, L_2 = 3.84 \cdot \sqrt{\frac{0.24}{400}}, L_3 = 3.84 \cdot \sqrt{\frac{0.16}{500}}$ ですので
幅の大小関係は $\underline{4 : L_3 < L_1 < L_2}$ が成り立ちます。

所感

第 1 問

[1]

センターでは珍しく用語の基本的な意味を問うものが出てきました。ここを間違えて理解していると全部やられるので注意しましょう。
(3) では三角関数の性質を問う問題となっています。それぞれの操作はどれも基本的な公式を押さえていれば解けるでしょう。もちろん解の範囲には注意。

[2]

指数対数の性質を問うものです。２次不等式の理解も問われますが基本的な性質を理解していれば全部解けます。対数はすべての実数をとりうることには気を付けましょう。

第 2 問

[1]

多項式の微積分を計算する問題です。係数を計算するところから S の計算までとにかく計算量が多いです。
もし理解しているなら $S = \int_1^v p(x-1)^2 dx = \left[\dfrac{p(x-1)^3}{3}\right]_1^v$ で計算する、ということもできますが、文系だと大概は触れないので思いつきづらいか。

[2]

関数がみたす式から関数を求める問題です。高難度の入試でないとなかなか見かけない形式ですが、方針はしっかり書かれていますので難しくないと思います。
ただ $f(x)$ は x 軸の下側にきていますので W の計算は注意しましょう。$0-f(x)$ を積分する、と考えれば正しく計算できると思います。

第 3 問

数列の問題です。
等差数列の和は公式にあてはめれば関係式を作りやすいですが、等比数列 $\{b_n\}$ の和から等式をつくるときは和の公式をあてはめない方が速いかもしれません。
(3) では込み入った数列を作って考えています。計算量が多くなります。

第 4 問

　ベクトルを用いて関係式を導く問題です。
今回は後で作った F を基準にベクトルを作って考えているようです。
少し慣れない進め方ですが、段階をふめば解き進められるでしょう。
計算が多めなので注意が必要です。

第 5 問

　確率と統計を利用した問題です。
(1) は平均や分散の計算性質を押さえておけば解けるでしょう。
(2) で事象 A が起こる確率を求める際、解き方が思いつかないと 2 重の加算

$$\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=k+1}^{a}\frac{a-l}{a(a-1)(a-2)}$$

を解くことになり面倒になりそうです。色々な数え方を思いつくかで速さに差が出ますが、これはよく出る数え方だと思います。
(3) では母集団の推定に関係するものです。推定式は計算して導けるというものではないですので覚えられない、という人も多いと思います。
信頼区間の幅は計算に使用する値で比較することで時間を少し短縮できるでしょう。