解答

第1問

問題	ア	イ, ウ	エオカ	キ	ク	ケ, コ	サシ, スセ
解答	2	4,5	345	6	3	3,2	29,30

問題	ソ, タ	チ, ツ	テ, ト, ナ	ニ	ヌ, ネ	ノ, ハヒ
解答	2,3	1,2	0,3,9	2	3,4	4,27

第2問

問題	ア	イウ, エ	オ	カ, キ, ク, ケ	コ	サ	シ, ス, セ	ソ	タチ
解答	2	-2,2	1	3,3,3,1	2	3	3,5,2	3	-1

問題	ツ	テ	トナニヌ
解答	7	4	-6,2,2

第3問

問題	ア, イ	ウエ, オ	カ	キ, ク	ケ, コ	サシ, ス, セ, ソ	タ
解答	3,1	-3,6	3	3,1	3,1	-2,3,7,3	1

問題	チ, ツ	テ	ト, ナニ, ヌ	ネ, ノ	ハ, ヒ, フ
解答	9,3	2	2,10,3	2,1	4,5,3

第4問

問題	アイ, ウエ	オカ, キ	ク, ケ	コサシ	ス, セ	ソ	タ	チ, ツ	テ	ト, ナ
解答	-5,17	-2,3	2,3	7,14	2,7	2	0	-,2	4	5,3

解説

第 1 問

[1]

三角関数に関する小問です。

(1)1 ラジアンは2:半径 1、弧の長さ 1 の扇型における中心角の大きさです。この面積は $\frac{1}{2}$ ですので「半径 1、面積 1 の扇型」の中心角は 2 ラジアンとなります。

(2)180° が π ラジアンですので 144° のとき $\frac{144}{180}\pi = \underline{\frac{4}{5}}\pi$ となります。また $\frac{23}{12}\pi$ ラジアンは $180^\circ \cdot \frac{23}{12} = \underline{345^\circ}$ となります。

(3)$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ のとき $\theta = x - \frac{\pi}{5}$ より $\theta + \frac{\pi}{30} = x - \frac{\pi}{6}$ ですので①は

$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{\underline{6}}\right) = 1$ となります。

加法定理で $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos x + \sin x)$ ですのでさらに

$\sin x - \underline{\sqrt{3}}\cos x = 1$ となります。

合成 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \cos\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ですので

$\sin\left(x - \frac{\pi}{\underline{3}}\right) = \frac{1}{\underline{2}}$ となります。

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より $\frac{7\pi}{10} \leq x \leq \frac{6\pi}{5}$ となり、さらに $\frac{11\pi}{30} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{13\pi}{15}$ ですのでこれを解くと

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ より $x = \frac{7\pi}{6}$ ですので

$\theta = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{5} = \underline{\frac{29}{30}}\pi$ となります。

[2]

指数対数関数に関する小問です。

②の式で 3 を底とする対数をとると $\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3\left(\frac{x}{c}\right)^3$ となります。

$t = \log_3 x$ とおくと

(左辺)=$(\log_3 x)(\log_3 x) = t^2$、(右辺)=$3(\log_3 x - \log_3 c) = 3t - 3\log_3 c$ となりますので整理して

$\underline{t^2 - 3t + 3\log_3 c} \geq 0$ となります。

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき $\log_3 c = \frac{1}{3}\log_3 9 = \frac{2}{3}$ ですので③の式は

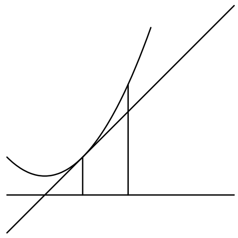
$t^2 - 3t + 2 \geq 0$ となります。$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ ですので③をみたす

t は
$\underline{t \leq 1, 2 \leq t}$ となります。すなわち $x \leq 3^1, 3^2 \leq x$ ですので真数条件 $0 < x$ と合わせて
$\underline{0 < x \leq 3, 9 \leq x}$ となります。
次は $x > 0$ で考えます。$\log_3 x$ がとりうる値は<u>2:実数全体</u>です。
③の式の左辺を平方完成すると $\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\log_3 c - \frac{9}{4} \geq 0$ となりますのでこれがすべての t について成立するとき $3\log_3 c - \frac{9}{4} \geq 0$ より
$\log_3 c \geq \underline{\frac{3}{4}}$ となり、$c \geq 3^{\frac{3}{4}} = \underline{\sqrt[4]{27}}$ がわかります。

第２問

[1]

　多項式の微積分に関する問題です。
(1)l の傾きは接線の係数である$\underline{2}$です。
放物線 C の x 座標が x の点における接線の傾きは $2px+q$ ですから A における接線の傾きは $2p+q$ となり、$2=2p+q$ より $q=\underline{-2p+2}$ がわかります。
さらに C が点 A を通ることより $1=p+q+r$ がわかりますので
$r=1-p-q=1-p-(-2p+2)=p-\underline{1}$ となります。
したがって C の式は $y=px^2+(2-2p)x+(p-1)$ と表せます。



(2)C は l の上側にきてまた A で接することから

$$\begin{aligned} S &= \int_1^v \{px^2+(2-2p)x+(p-1)-(2x-1)\}dx \\ &= \int_1^v (px^2-2px+p)dx \\ &= p\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^v = p\left(\frac{v^3}{3}-v^2+v-\frac{1}{3}\right) \\ &= \underline{\frac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)} \end{aligned}$$

となります。また、x 軸、l、直線 $x=1$、直線 $x=v$ で囲まれた図形は台形ですので
$T=\dfrac{1}{2}\{1+(2v-1)\}(v-1)=\underline{v^2-v}$ となります。
$U=S-T$ とすると $\dfrac{dU}{dv}=\dfrac{p}{3}(3v^2-6v+3)-(2v-1)=p(v^2-2v+1)-(2v-1)$ となります。$v=2$ で極値をとるときこの値が 0 になりますから $p-3=0$ となり、これより$\underline{p=3}$となります。このとき
$U=(v^3-3v^2+3v-1)-(v^2-v)=(v-1)\{(v^2-2v+1)-v\}=(v-1)(v^2-3v+1)$
となりますので、$U=0$ のとき $v=1,\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ となります。$3-\sqrt{5}<1$ より $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1$ ですから $v_0=\underline{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ となります。
また $1<v<v_0$ のとき $v-1>0, v^2-3v+1<0$ ですから $U<0$ すなわち U は3:負の値のみとります。
$p=3$ のとき仮定から $v=2$ で極値をとりますので $1<v<v_0$ での値から極

小値となります。したがって最小値は $v=2$ の値でありすなわち
$(2-1)(2^2-3\cdot 2+1)=\underline{-1}$ となります。

[2]

形式が明示されていない条件から関数を導出する小問です。
$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とするとき、その定義から $F'(x)=\underline{7:f(x)}$ です。
仮定より $x\geq 1$ のとき $f(x)\leq 0$ ですから

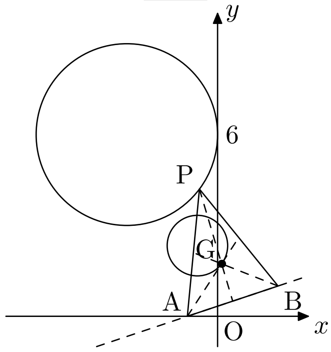
$$W=\int_1^t(0-f(x))dx=[-F(x)]_1^t=\underline{4:-F(t)+F(1)}$$

となります。
また、底辺の長さが $2t^2-2$、2 辺の長さが t^2+1 の二等辺三角形の高さは
$\sqrt{(t^2+1)^2-\left(\dfrac{2t^2-2}{2}\right)^2}=\sqrt{4t^2}=2|t|$ であるため $t>1$ より
面積は $\dfrac{1}{2}\cdot(2t^2-2)\cdot 2t=2t^3-2t$ となります。
したがって W に関する等式 $-F(t)+F(1)=2t^3-2t$ が成り立ちます。これを t で微分すると
$-f(t)=6t^2-2$ となりますので $t>1$ において $f(t)=\underline{-6t^2+2}$ がわかります。

第３問

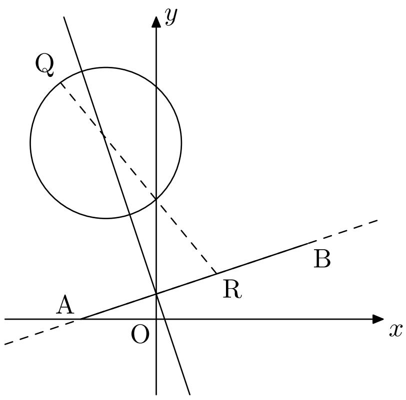
座標平面における円と直線に関する問題です。

(1)l_1 は x 軸 y 軸どちらにも平行でないので $l_1 : x + ky + l = 0$ とおけます。
この直線は 2 点 A,B を通りますので $(-1) + k \cdot 0 + l = 2 + k \cdot 1 + l = 0$ が成り立ちます。
これを解くことで $l = 1, k = -3$ となりますので $l_1 : \underline{x - 3y + 1 = 0}$ がわかります。
また、C_1 の式は $(x+3)^2-9+(y-6)^2-36+36 = 0$ より $(x+3)^2+(y-6)^2 = 3^2$ となりますので
C_1 の中心は$\underline{(-3,6)}$で半径は$\underline{3}$とわかります。



(2) 三角形 ABP の重心 (s, t) において
$s = \dfrac{(-1) + 2 + a}{3} = \dfrac{a+1}{3}, t = \dfrac{0 + 1 + b}{3} = \dfrac{b+1}{3}$ となりますので、
a, b の式に変形すると $a = \underline{3s - 1}, b = \underline{3t - 1}$ となります。
したがって (a, b) が C_1 上を動くとき $\{(3s - 1) + 3\}^2 + \{(3t - 1) - 6\} = 9$ が成り立ちます。
$\left\{3\left(s + \dfrac{2}{3}\right)\right\}^2 + \left\{3\left(t - \dfrac{7}{3}\right)\right\}^2 = 9$ より $\left(s + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(t - \dfrac{7}{3}\right) = 1$ が成り立ちますので、
G は中心$\underline{\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{7}{3}\right)}$、半径$\underline{1}$の円周上を動きます。

(3)$C_2 : \left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{3}\right) = 1$ となります。
線分 QR の長さを短くするには、
Q は直線 AB との距離を短くする、R は Q から直線 AB におろした垂線の足に近づける、
という方法をとります。ということでまずは両方できるか検証します。



Q が直線 AB に最も近づくとき、Q と C_2 の中心を通る直線が l_1 に垂直となります。
そこで C_2 の中心を通り l_1 に垂直な直線 l_2 を考えます。
$l_1 : y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$ ですから $l_2 : y = -3x + p$ とおけます。
C_2 の中心を通ることから $\dfrac{7}{3} = -3 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) + p$ となり $p = \dfrac{1}{3}$ となります。
これより $l_2 : y = -3x + \dfrac{1}{3}$ がわかり、整理して $l_2 : \underline{9x + 3y - 1 = 0}$ となります。
l_1 と l_2 の式を両方を満たす値を求めると $x = 0, y = \dfrac{1}{3}$ となり、この点は x 座標に着目すると線分 AB の内部にありまた $0 - (-1) : (2 - 0)$ すなわち$\underline{1:2}$に内分する点であるとわかります。
よって、R が l_1 と l_2 の交点、Q が C_2 と l_2 の交点で l_1 に近い点になる場合は最小となります。
C_2 と l_1 との距離は $\sqrt{\left(0 + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ となり、PQ の最小値は $\underline{\dfrac{2\sqrt{10}}{3}} - 1$ であるとわかります。
QR が最大の場合、R は Q から直線 AB におろした垂線の足から遠ざかっていますので、R は AB のどちらかにきます。
したがって C_2 の中心を C としたとき、最大は AC に C_2 の半径を加算した値か、BC に C_2 の半径を加算した値のどちらかになります。ということで AC,BC を計算すると
AC=$\sqrt{\left(-1 + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{7}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$,
BC=$\sqrt{\left(2 + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{7}{3}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{80}}{3}$ となりますので、
QR が最大のとき R は B に一致することから座標は$\underline{(2,1)}$、最大値は$\underline{\dfrac{4\sqrt{5}}{3} + 1}$となります。

第４問

　複素数を用いた多項式の問題です。
(1) $(-1+\sqrt{6}i)^2 = 1^2 - 6^2 - 2\sqrt{6}i = -5 - 2\sqrt{6}i$,
$(-1+\sqrt{6}i)^3 = (-1+\sqrt{6}i)\cdot(-5-2\sqrt{6}i) = 17 - 3\sqrt{6}i$ と計算できます。
したがって

$$
\begin{aligned}
P(-1+\sqrt{6}i) &= (17-3\sqrt{6}i) + (-5-2\sqrt{6}i)a + (-1+\sqrt{6}i)b + c \\
&= \underline{(-5a-b+c+17) + (-2a+b-3)\sqrt{6}i}
\end{aligned}
$$

となります。いま $P(-1+\sqrt{6}i) = 0$ を仮定していますので
$-5a-b+c+17 = 0, -2a+b-3 = 0$ が成り立ちます。
これより $b = \underline{2a+3}, c = \underline{7a-14}$ がわかります。
したがって $P(x) = x^3 + ax^2 + (2a+3)x + (7a-14)$ となります。
次に、これと共役な複素数を解に持つ方程式を考えます。共役な複素数は和と積が実数になります。
$(-1+\sqrt{6}i) + (-1-\sqrt{6}i) = -2, (-1+\sqrt{6}i)(-1-\sqrt{6}i) = 1^2 + 6 = 7$ ですので
解と係数の関係より方程式は $\underline{x^2+2x+7=0}$ となります。
これで $P(x)$ を割ると

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x(x^2+2x+7) + (a-2)x^2 + (2a-4)x + (7a-14) \\
&= (x+a-2)(x^2+2x+7)
\end{aligned}
$$

となるので商は$\underline{x+a-2}$、余りは$\underline{0}$となります。
よって $P(-a+2) = 0$ が成り立ちますので、実数解は $x = \underline{-a+2}$ とわかります。
(2) 剰余定理により $P(-a+3) = 6$ が成り立ちます。$P(x) = (x+a-2)(x-2+2x+7)$ を利用すると

$$
\begin{aligned}
P(-a+3) &= 1\cdot\{(-a+3)^2 + 2(-a+3) + 7\} \\
&= a^2 - 8a + 22
\end{aligned}
$$

となりますので $P(-a+3) = 6$ のとき $a^2 - 8a + 16 = 0$ すなわち $(a-4)^2 = 0$ より$\underline{a=4}$です。
このとき $P(x) = x^3 + 4x^2 + 11x + 14$ となります。
これを $Q(x)$ で割ったとき商が $x-1$、余りが $13x+17$ になったとすると
$P(x) = (x-1)Q(x) + (13x+17)$ より
$(x-1)Q(x) = P(x) - (13x+17) = x^3 + 4x^2 - 2x - 3 = (x-1)(x^2+5x+3)$
が成り立ちます。したがって $Q(x) = \underline{x^2+5x+3}$ がわかります。

所感

第 1 問

[1]

センターでは珍しく用語の基本的な意味を問うものが出てきました。ここを間違えて理解していると全部やられるので注意しましょう。
(3) では三角関数の性質を問う問題となっています。それぞれの操作はどれも基本的な公式を押さえていれば解けるでしょう。もちろん解の範囲には注意。

[2]

指数対数の性質を問うものです。２次不等式の理解も問われますが基本的な性質を理解していれば全部解けます。対数はすべての実数をとりうることには気を付けましょう。

第 2 問

[1]

多項式の微積分を計算する問題です。係数を計算するところから S の計算までとにかく計算量が多いです。
もし理解しているなら $S = \int_1^v p(x-1)^2 dx = \left[\frac{p(x-1)^3}{3}\right]_1^v$ で計算する、ということもできますが、文系だと大概は触れないので思いつきづらいか。

[2]

関数がみたす式から関数を求める問題です。高難度の入試でないとなかなか見かけない形式ですが、方針はしっかり書かれていますので難しくないと思います。
ただ $f(x)$ は x 軸の下側にきていますので W の計算は注意しましょう。$0-f(x)$ を積分する、と考えれば正しく計算できると思います。

第 3 問

座標平面における円と直線を利用した問題です。
(1)(2) は基本的なので詰まることはないと思います。もっとも変換に慣れていないと戸惑うことがありそうですが。
(3) は最小最大を問う問題です。最小は誘導もついておりやりやすいでしょう。最大は図を思い浮かべて解くのがよさそうです。

第 4 問

　複素数を利用する多項式の問題です。
最初に複素数の 2 乗 3 乗を求める計算がありますが、3 乗は 3 乗の公式を使うより $x \cdot x^2$ と分けて計算するのがやりやすいと思います。
また、いきなり $-1-\sqrt{6}i$ という値を持ち出していますが、これは四則演算と共役をとる操作が入れ替え可能であることから $P(-1-\sqrt{6}i)=0$ となることを利用するために持ち出しています。
(2) では $P(x)$ を因数分解した式で代入して考えるのが速いです。