解答

第１問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**2,8**	**2**
ウ, エ, オ, カ	**2,5,3,2**	**3**
キ, ク	**6,4**	**2**
ケ	**1**	**3**
コ, サ	**2,4**	**2**
シ	**8**	**2**
ス, セ	**1,0**	**2**
ソ	**2**	**3**
タ, チ	**2,2**	**3**
ツ, テ	**1,1**	**3**
トナ, ニ	**14,4**	**2**
ヌネ	**14**	**3**

第２問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	**1**	**2**
イ, ウ, エ, オ	**4,5,8,5**	**3**
カ, キ	**9,5**	**2@a**
クケ, コサ	**81,25**	**3@a**
シ	**0**	**1#a**
ス, セ, ソ	**1,4,0**	**4**
タ	**0**	**2**
チ	**4**	**2**
ツ	**3**	**2**
テ	**4**	**3@b**
ト	**0**	**2#b**
ナ, ニ, ヌ, ネ	**4,3,0,0**	**4**

第３問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**2,3**	**3**
ウ	**3**	**3**
エオ, カ	**11,7**	**2**
キ, ク	**5,4**	**3**
ケ	**3**	**3**
コサ, シス	**15,12**	**3**
セ	**4**	**3**

第４問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イウ	**5,16**	**3**
エオ, カキ	**11,16**	**3**
ク, ケ	**5,8**	**3**
コサシ	**450**	**3@c**
ス, セ	**0,0**	**1#c**
ソタチ	**425**	**3@d**
ツ, テ	**1,1**	**1#d**
トナニ	**180**	**3**

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとまって入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。
(上記の場合、第 1 問はアに 2、イに 8 を入れた場合のみ 2 点が加わる)
- 配点に#とアルファベットのついたものを得点するためには、配点欄に同じアルファベットと@が付いている問題をすべて正解していることが必要です。
(上記の場合、第 2 問でカに 8、シに 0 を入れた場合、カキが誤答となるためシの得点も入らない)

解説

第 1 問

[1]

(1)

ア, イ　$a=1$ とすると①は $4bx^2+16x-b-8=0$ より $(4x^2-1)b+16x-8=0$ と変形できます。
$4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$ であり $16x-8=8(2x-1)$ ですので、さらに
$(2x-1)\underline{(2bx+b+8)}=0$ と変形できます。

(2)

ウ〜カ　$b=2$ のとき①の左辺は $(2a+6)x^2+(5a+11)x-10$ となります。
a の降べき順に書き換えると $(2x^2+5x)a+(6x^2+11x-10)$ と変形できます。
$6x^2+11x-10=(2x+5)(3x-2)$ と変形できますので
$(2x^2+5x)a+(6x^2+11x-10)=(2x+5)\cdot ax+(2x+5)(3x-2)=\underline{(2x+5)\{(a+3)x-2\}}$ がわかります。

キ, ク　このとき①の解は $a\neq -3$ ならば $x=-\dfrac{5}{2}, \dfrac{2}{a+3}$ となります。
$a=2\sqrt{2}$ ならば $\dfrac{2}{a+3}=\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{2\cdot(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{6-4\sqrt{2}}{3^2-2\cdot 2^2}=\underline{6-4\sqrt{2}}$ となりますので、これが①の解になります。

ケ　$a=-3$ であれば①は $-4x-10=0$ と変形できますので、解は $x=-\dfrac{5}{2}$ のみとなります。なので十分条件といえます。
一方、$\dfrac{2}{a+3}=-\dfrac{5}{2}$ となる場合を考えると $a=-\dfrac{19}{5}$ があげられます。このとき①の解は $x=-\dfrac{5}{2}$ だけとなります。
(実際、①は $-\dfrac{8}{5}x^2-8x-10=0$ より $-\dfrac{2}{5}(2x+5)^2=0$ となります)
なので反例があることから必要条件でないことがわかります。
したがって、あてはまるものは $_1$<u>十分条件であるが必要条件ではない</u>となります。

[2]

(1) コ 三角形 OAH は H が直角の三角形ですので $\mathrm{AH} = \mathrm{AO}\sin\alpha$ すなわち$\underline{\mathrm{AH} = 2\sin\alpha}$がわかります。

サ さらに計算して$\underline{\mathrm{PH} = 4\sin\alpha}$がわかります。

シ 三角形 $\mathrm{O'BH'}$ は $\mathrm{H'}$ を直角とする三角形ですので $\mathrm{BH'} = \mathrm{BO'}\sin\beta = 4\sin\beta$ となり、
すなわち$\underline{\mathrm{PB} = 8\sin\beta}$がわかります。

ス, セ 三角形 PAB に正弦定理を適用すると $\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\angle\mathrm{PBA}} = \dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{PAB}} = 2R_1$ ですので、すなわち
$_1\dfrac{\mathrm{PA}}{\underline{\sin\beta}} = {}_0\dfrac{\mathrm{PB}}{\underline{\sin\alpha}} = 2R_1$ がわかります。

ソ 上記の式を変形することで $\mathrm{PA}\sin\alpha = \mathrm{PB}\sin\beta$ が成り立ちますので、さらに代入すると
$(4\sin\alpha)\cdot\sin\alpha = (8\sin\beta)\cdot\sin\beta$ となり、すなわち $4\sin^2\alpha = 8\sin^2\beta$ より $\sin^2\alpha = 2\sin^2\beta$ です。
α, β は $0°$ より大きく $180°$ より小さいため $\sin\alpha, \sin\beta$ はいずれも正となることから、
$\underline{\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\beta}$がわかります。

タ, チ $\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\beta} = 2R_1$ に代入することで $\dfrac{4\sin\alpha}{\sin\beta} = 2R_1$ となります。
さらに $\dfrac{4\cdot\sqrt{2}\sin\beta}{\sin\beta} = 2R_1$ とできますので、$\underline{R_1 = 2\sqrt{2}}$がわかります。

(2) ツ $\angle\mathrm{QAB} = \gamma, \angle\mathrm{QBA} = \delta$ とおくと、前問の α を γ に、β を δ に置き換えた式がそのまま使えることがわかります。したがって $\dfrac{\mathrm{QA}}{\sin\delta} = 2R_2$ より $2R_2 = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}\sin\delta}{\sin\delta}$ となりますので、$_1\underline{R_1 = R_2}$がわかります。

テ 三角形 APB、AQB それぞれにおける正弦定理により $2R_1 = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}, 2R_2 = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AQB}}$ がわかります。
いま $R_1 = R_2$ ですので $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AQB}}$ が成り立ちますので、$_1\underline{\sin\angle\mathrm{APB} = \sin\angle\mathrm{AQB}}$がわかります。

(3)

ト〜ニ 正弦定理から $2R_1 = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$ ですので、$\sin\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2R_1} = \dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{\sqrt{14}}{4}}$ がわかります。

ヌネ 三角形 APB に余弦定理を適用することで $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PA}^2 - 2\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PA}\cdot\cos\angle\mathrm{APB}$ となります。
いま $\sin\angle\mathrm{APB} = \sin\angle\mathrm{AQB}$ であるので $\angle\mathrm{APB} = 180° - \angle\mathrm{AQB}$ です。
$\angle\mathrm{APB} < \angle\mathrm{AQB}$ より $180° - \angle\mathrm{AQB} < \angle\mathrm{AQB}$ となるので $\angle\mathrm{AQB} > 90°$ がわかり、これより $\angle\mathrm{APB} < 90°$ がわかります。
したがって $\cos\angle\mathrm{APB} > 0$ なので $\cos^2\angle\mathrm{APB} = 1 - \sin^2\angle\mathrm{APB} = \dfrac{2}{16}$ より $\cos\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ がわかります。
これより $\mathrm{PB} = \sqrt{2}\mathrm{PA}$ を代入して $(2\sqrt{7})^2 = 2\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PA}^2 - 2\cdot(\sqrt{2}\mathrm{PA})\cdot\mathrm{PA}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となり、整理すると $28 = 2\mathrm{PA}^2$ より$\underline{\mathrm{PA} = \sqrt{14}}$がわかります。

第２問

[1]

(1)　ア　C_1 は点 $(0,1)$ を通りますので仮定した二次関数に代入すると $1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ がわかり、これより $\underline{c=1}$が成り立ちます。

イ〜オ　C_1 は点 $\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$ と $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ を通りますので、代入により

$\dfrac{25}{4}a - \dfrac{5}{2}b + 1 = \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b + 1 = 0$ がわかります。

a, b の連立方程式として解くことで $a = -\dfrac{4}{5}, b = -\dfrac{8}{5}$ が得られますので、C_1 のグラフの式は

$\underline{y = -\dfrac{4}{5}x^2 - \dfrac{8}{5}x + 1}$となります。

(多項式のグラフが点 $(t, 0)$ を通るときその式が $x - t$ で因数分解できることを利用して、

$y = a\left(x + \dfrac{5}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ から計算する方法もあります)

カ, キ　C_1 を表す式を平方完成すると $y = -\dfrac{4}{5}(x+1)^2 + 1 + \dfrac{4}{5}$ となりますので、頂点の y 座標は $1 + \dfrac{4}{5} = \underline{\dfrac{9}{5}}$ となります。

ク〜サ　C_1 の頂点は $\left(-1, \dfrac{9}{5}\right)$ であることがわかりました。C_3 は C_1 を y 軸で対称移動させた図形に等しい (仮定で通るとする 3 点が y 軸に関して対称であるため) ですので、C_3 の頂点は $\left(1, \dfrac{9}{5}\right)$ です。

C_2 の式を $y = px^2 + qx + r$ とおくと $p + q + r = p - q + r = \dfrac{9}{5}, \dfrac{9}{4}p + \dfrac{3}{2}q + r = 0$ となりますので、連立して解くと $q = 0, p = -\dfrac{36}{25}, r = \dfrac{81}{25}$ が得られ、すなわち C_2 の式は $y = -\dfrac{36}{25}x^2 + \dfrac{81}{25}$ となります。

これより C_2 の頂点の y 座標は$\underline{\dfrac{81}{25}}$となります。

(y 軸で対称な 2 点を通ることから頂点の x 座標が 0 であることを利用して、$p \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + r = p \cdot 1 + r - \dfrac{9}{5}$ から p を計算する方法もあります)

シ　大きな噴水の高さは $\dfrac{81}{25}$、小さな噴水の高さは $\dfrac{9}{5}$ ですので、大きな噴水の高さを小さな噴水の高さで割ると $\dfrac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{5}} = \dfrac{9}{5}$ より、大きな噴水の高さは小さな噴水の高さの $\dfrac{9}{5}(= 1.8)$ 倍となります。

したがって選択肢では $_0$<u>およそ 2 倍</u>が適当といえます。

(2)

ス〜ソ　新たな仮定で得られる C_2' の式を $y = p'x^2 + q'x + r$ とおくと、まず C_1, C_3 の頂点を通ることから $p' + q' + r' = p' - q' + r' = \dfrac{9}{5}$ がわかります。

$(p' + q' + r') - (p' - q' + r') = 0$ から $q' = 0$ が得られますので、すなわち $y = p'x^2 + r'$ と表せます。

したがって頂点の x 座標は 0 ですので $r' = 5$ がわかります。

よって $p' = -\dfrac{16}{5}$ が得られますので、C_2' の式は $y = -\dfrac{16}{5}x^2 + 5$ となります。

点 P_2' の y 座標は 0 ですので、$-\dfrac{16}{5}x^2 + 5 = 0$ を解くことで P_2' の x 座標がわかります。

解くと $x = \pm\dfrac{5}{4}$ であり、P_2' の x 座標は正ですので、$x = \dfrac{5}{4}$ になることがわかります。

P_2 の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ でしたので、x 座標の変化は $\dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{4}$ となり、すなわち$\underline{\dfrac{1}{4}}$だけ $_0\underline{\mathrm{P}_1}$の方にきていることがわかります。

[**2**]

(1) タ それぞれ検証します。

(a) 外国人宿泊者数が 100 である線と日本人宿泊者数が 2500 である線を引いて散布図を 4 つの領域に分けると、外国人宿泊者数が 100 を超えていて日本人宿泊者数が 2500 を超えている部分は右上の領域になります。
この領域にきている点は $(200, 3000)$ 付近の点と $(680, 5200)$ 付近の点の 2 つです。
したがって該当する都道府県の数は 2 であるので、正しいといえます。

(b) 日本人宿泊者数が外国人宿泊者数の 10 倍未満である領域は散布図に付加されている傾き 10 の直線より下にくる領域です。
この領域には点が 1 つしか存在しないため、割合が 50%(実数にして 24) 未満であるので、正しいといえます。

したがってあてはまるものは $_0$(a) 正、(b) 正です。

チ データは 47 個ありますので、中央値は 24 番目の値となります。
したがって、第 1 四分位は 1 番目から 23 番目までのデータでの中央値ですので 12 番目 (P12)、第 3 四分位は 25 番目から 47 番目のデータでの中央値ですので 36 番目 (P36) のデータとなります。
これより、四分位範囲は $1251 - 351 =$ $_4$900となります。

ツ 問題文にしたがって外れ値の基準を計算すると $351 - 1.5 \times 900 = -999$ と $1251 + 1.5 \times 900 = 2601$ より、「-999 以下」「2601 以上」が外れ値となります。これに該当するデータは P45,P46,P47 の 3 つです。いずれも外国人宿泊者数でも外れ値となっていますので、求める個数は3であることがわかります。

(2) テ 分散は平均との差の 2 乗の平均なので、s_z^2 は $(z_i - \bar{z}^2)\quad (i = 1, 2, \cdots 47)$ の平均です。
$(z_i - \bar{z})^2 = (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 + 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ となります。
$(x_i - \bar{x})^2$ の平均が s_x^2、$(y_i - \bar{y})^2$ の平均が s_y^2、$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ の平均が s_{xy} ですので、$_4 s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy}$ がわかります。

ト 正の相関があることから相関係数が正、すなわち $\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} > 0$ であることがわかります。
定義から $s_x \geq 0, s_y \geq 0$ ですので、ここから $s_{xy} > 0$ がわかり、すなわち $s_z^2 - (s_x^2 + s_y^2) = 2s_{xy} > 0$ より $_0 s_z^2 > s_x^2 + s_y^2$ がわかります。

(3)

ナ, ニ 実験結果から 23 枚以上で割合を合計すると (0.0 は無視)、$2.4 + 0.9 + 0.5 + 0.4 + 0.1 = 4.3$%であることがわかります。

ヌ これは 35 人のうち 23 人以上が「キャンペーン A の方がよい」と回答する確率と考えることができます。いま得られた確率は 5%未満であるので、方針でたてた仮説は $_0$誤っていると判断できます。

ネ 誤っていると判断した仮説は「キャンペーン A の方がよい」と回答する割合と「キャンペーン B の方がよい」と回答する割合が等しい、というものでしたので、2 つの割合は無視できない差があるということになります。
いま「キャンペーン A の方がよい」という回答が多いですので、アンケート結果からもキャンペーン A の方がよいと思っている人が $_0$多いといえます。

第３問

(1) ア 直線 AD は線分 AD を辺とする多角形を含む平面に含まれます。したがってこの考えから直線 AD は $_2$平面 ACFD上にくることがわかります。

イ 同様に考えて、直線 BE は $_3$平面 BCFE上にくることがわかります。

(2) ウ 4 点 A,B,E,D が同一円周上にくることから $\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PED}, \angle\mathrm{PBA} = \angle\mathrm{PDE}$ がわかります。これより三角形 PAB と PED が相似だとわかり、その比は $\mathrm{AB} : \mathrm{ED} = 3 : 9 = \underline{1 : 3}$ となります。

エオ 相似比から $\mathrm{PE} : \mathrm{PA} = 3 : 1$ より $\mathrm{PE} = 3\mathrm{PA}$ であり、また $\mathrm{PE} = \mathrm{PB} + \mathrm{BE}$ ですので$\underline{3\mathrm{PA} = \mathrm{PB} + 11}$がわかります。

カ 同様に $\mathrm{PD} = 3\mathrm{PB} = \mathrm{PA} + \mathrm{AD}$ より$\underline{3\mathrm{PB} = \mathrm{PA} + 7}$がわかります。

キ, ク 上記 2 式を PA, PB の連立方程式として解くことで$\underline{\mathrm{PA} = 5, \mathrm{PB} = 4}$がわかります。

ケ 平面 BCFE と球面 S の共通部分も円になりますので、四角形 BCFE は円に内接する四角形となります。したがって方べきの定理により $\mathrm{PC} \cdot \mathrm{PF} = \mathrm{PB} \cdot \mathrm{PE}$ が成り立ちます。
これより $\mathrm{PC} \cdot (\mathrm{PC} + 17) = 4 \cdot (4 + 11)$ より $\mathrm{PC}^2 + 17\mathrm{PC} - 60 = 0$ となり、
因数分解で $(\mathrm{PC} + 20)(\mathrm{PC} - 3) = 0$ が成り立ちます。
$\mathrm{PC} > 0$ ですので、$\underline{\mathrm{PC} = 3}$であることがわかります。

コサ 同様にして三角形 PBC と PFE が相似であることがわかり、その相似比は $\mathrm{PC} : \mathrm{PE} = 3 : 15 = 1 : 5$ であるので、$\mathrm{EF} = 5\mathrm{BC} = \underline{15}$ がわかります。

シス 三角形 PCA と PDF が相似であり比が $\mathrm{PC} : \mathrm{PD} = 3 : 12 = 1 : 4$ ですので、$\mathrm{DF} = 4\mathrm{AC} = \underline{12}$ がわかります。

セ 三角形 PDE において $\mathrm{PD}^2 + \mathrm{DE}^2 = 12^2 + 9^2 = 225$、$\mathrm{PE}^2 = 225$ ですので $\angle\mathrm{PDE}$ は直角です。
三角形 PDF において $\mathrm{PD}^2 + \mathrm{DF}^2 = 12^2 + 12^2 = 288$、$\mathrm{PF}^2 = 20^2 = 400$ ですので、$\angle\mathrm{ADF}$ は鈍角です。
三角形 DEF において $\mathrm{DE}^2 + \mathrm{DF}^2 = 9^2 + 12^2 = 225$、$\mathrm{EF}^2 = 225$ ですので $\angle\mathrm{EDF}$ は直角です。
ここからまず直線 DE と平面 ACFD が垂直であることがわかります。
次にここから平面 ABED と平面 DEF のなす角が $\angle\mathrm{ADE}$ に等しいことがわかりますので、これらは垂直ではないことがわかります。
また直線 AC は平面 ACFD に含まれること、平面 ACFD が直線 DE に垂直なことから直線 AC と DE は (ねじれの位置にくるが) 垂直であることがわかります。
これらより、あてはまるものは $_4$(a) 偽、(b) 真、(c) 真とわかります。

第４問

(1)

ア〜ウ　1 回目または 2 回目で当たりが出る場合は、1 回目で当たりを引くか、1 回目ではずれを出し 2 回目で当たりを引く場合のいずれかです。
いずれも確率が明記されており、これらは互いに排反ですので、求める確率は $\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{8}=\underline{\dfrac{5}{16}}$ となります。

エ〜キ　事象「1 回目、2 回目とも当たりが出ない」は上記「1 回目または 2 回目に当たりが出る」の余事象ですので、その確率は $1-\dfrac{5}{16}=\underline{\dfrac{11}{16}}$ となります。

ク, ケ　3 回目で当たりを引く確率は $\dfrac{1}{16}$ ですので、3 回目までで当たりが出る確率は $\dfrac{5}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{8}$ です。
したがって 1 回も当たりが出ない確率は $1-\dfrac{3}{8}=\underline{\dfrac{5}{8}}$ となります。

(2)

コ〜シ　当たりが出る確率が $\dfrac{3}{8}$、出ない確率は $\dfrac{5}{8}$ ですので、X の期待値は $0\cdot\dfrac{5}{8}+1200\cdot\dfrac{3}{8}=\underline{450}$ となります。

ス, セ　負担額の期待値は参加料 $_{0}$未満であるので、価格設定は $_{0}$妥当であると判断できます。

(3)

ソ〜チ　$Y=170$ となる確率が $\dfrac{3}{16}$、$Y=340$ となる確率が $\dfrac{2}{16}$、$Y=510$ となる確率が $\dfrac{11}{16}$ ですので、期待値は $170\cdot\dfrac{3}{16}+340\cdot\dfrac{2}{16}+510\cdot\dfrac{11}{16}=\dfrac{6800}{16}=\underline{425}$ となります。

ツ, テ　X の期待値が Y の期待値 $_{1}$以上になっているため、設定は $_{1}$妥当でないと判断できます。

ト〜ニ　Y の期待値を a で表すと $\dfrac{3}{16}a+\dfrac{2}{16}\cdot(2a)+\dfrac{11}{16}\cdot(3a)=\dfrac{40}{16}a=\dfrac{5}{2}a$ となります。
したがって設定が妥当であると判断できるのは $450<\dfrac{5}{2}a$ の場合となりますので、変形すると $\underline{a>180}$ のときであるとわかります。

所感

基本的な問題と応用が問われる問題がちょうどよい配分で置かれているようです。数学 I の分野である第 1 問と第 2 問がはまりやすいので、時間配分は意識しましょう。

第 1 問

[1]

数と式に関する問題です。少し難しい因数分解があるように見えますが解答欄から逆算するのも有効です。最後の問題は早合点して重解の可能性を見落とさないようにしましょう。

[2]

三角比の正弦や余弦を利用した問題です。下手に図形的性質を考えたらはまりますので、式変形をもとに解き進めましょう。

第 2 問

[1]

二次関数へのモデル化を利用した問題です。この解説では愚直に通る点を利用して係数を連立方程式の解として導いていますが、工夫するといろいろ速くできそうです。

[2]

データの分析の問題です。読解力が点数に直結します。

第 3 問

立体図形と平面幾何に関する問題です。問題文で解き進める方針が示されていますので、高得点をとりやすいと思います。

第 4 問

確率に関する問題です。面倒な計算が必要な確率は出されていませんので、こちらも解きやすい部類でしょう。