

解答

第1問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ	6,3,2	2
エ	2	3
オ, カ, キク	2,5,18	3
ケ, コサ, シス	6,17,18	3
セ	6	1
ソタ, チツ	11,18	3

第2問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア	3	3
イ	1	2
ウエオカ	0402	2
キ, クケ	3,60	2
コ	3	3
サシ	16	3

第3問 (22)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	6,6	2
ウエ	-1	2
オ, カ	2,3	2
キ	0	2
クケ	-1	1
コ, サ	0,0	1
シ, ス	0,1	1
セ	3	2
ソ, タ	3,0	2
チ, ツ	2,0	2
テ, ト	0,0	2
ナ	2	3

第4問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	5,8	2
ウ, エ, オ	0,3,0	2
カキク	610	3
ケ	7	2
コ	1	2
サ	7	2
シ, スセ, ソ	3,-3,2	3

第5問 (20)		
解答欄	解答	配点
アイウエ	4332	2
オ	4	2
カ	6	1
キ	5	2
クケコ	385	3
サ	0	1
シ	5	1
スセソタ	0359	2@
チ, ツ	1,0	2#

第6問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア	1	1
イ	4	2
ウ, エ, オ	0,0,5	3
カ, キ, ク, ケコ	3,5,3,10	2
サ	2	2
シ	0	2
ス	3	2
セ	4	2

第7問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ, エ	4,8,4,2	2
オ	3	2
カ	4	2
キ, ク	2,0	2
ケ	6	2
コ	0	2
サ	0	2
シ	1	2

注

配点に#のついた問題を得点するには、配点に@のついた問題の正解が必要です。

解説

第1問

(1) ア $\alpha = \beta$ を θ の式に置き換えると $\theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta$ となりますので、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ が得られます。

イ, ウ $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき $\theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta = \frac{\pi}{3}$ ですので、 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ がわかります。

エ $\sin \alpha$ の値は C (単位円) を利用すると α の動径と C との交点の y 座標として表されます。

したがって、 $\sin \alpha$ と $\sin \beta$ の値が等しいことは $2P$ の y 座標と Q の y 座標が等しい と言い換えられます。

オ $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ ですので $\alpha \neq \beta$ となります。したがって $0 \leq \beta \leq \pi$ の範囲では $\sin \alpha = \sin \beta$ ならば $\beta = \pi - \alpha$ すなわち $2\alpha + \beta = \pi$ がわかります。

カ～ク $\alpha + \beta = \pi$ を θ の式にすると $\theta + \frac{\pi}{6} + 2\theta = \pi$ ですので $\theta = \frac{5}{11}\pi$ がわかります。

ケ $\pi < \beta < 2\pi$ ならば $\sin \alpha = \sin \beta$ が成り立つとき $\alpha = \pi + \phi, \beta = 2\pi - \phi$ とおけるような ϕ が存在することになります。この両辺の和をとることで $6\alpha + \beta = 3\pi$ が得られます。

コ～ス 同様に $\theta + \frac{\pi}{6} + 2\theta = 3\pi$ から変形することで $\theta = \frac{17}{18}\pi$ がわかります。

(2) セ (1) の α, β を利用すると $\alpha = \beta$ ならば $\cos \alpha = \cos \beta$ が成り立ちますので、こちらでも $\theta = \frac{\pi}{6}$ が解であることがわかります。

ソ～ツ $\alpha \neq \beta$ のときは $0 \leq \beta < 2\pi$ より $\alpha = \pi - \phi, \beta = \pi + \phi$ となるような ϕ が存在します。この両辺の和をとることで $\alpha + \beta = 2\pi$ が得られます。

これより $\theta + \frac{\pi}{6} + 2\theta = 2\pi$ となり、変形することで $\theta = \frac{11}{18}\pi$ が得られます。

第2問

- (1) ア 水草 A は 1 日で r 倍になる、としていますので、3 日では r^3 倍になります。したがって $3r^3 = 1.32$ がわかります。
- イ 常用対数表から 1.32 の常用対数表を探すには数 1.3 の行の列 2 をみます。すると $\log_{10} 1.32 = 0.1206$ がわかります。
- ウ～カ ここから $\log_{10} r^3 = 0.1206$ がわかります。 $\log_{10} r^3 = 3\log_{10} r$ より $3\log_{10} r = 0.1206$ ですので $\log_{10} r = \frac{0.1206}{3} = 0.0402$ が得られます。
- (2) キ r は 1 日での増加比率 (1 日で r 倍) でしたので、14 日たつと $a\%$ の $3r^{14}$ 倍となります。
- クケ $a\%$ の r^{14} 倍を 60% にしたいですので $a \times r^{14} = 60$ が成り立ちます。
- コ 常用対数をとると $\log_{10}(a \times r^{14}) = \log_{10} 60$ であり、それぞれの両辺を整理すると $\log_{10} a + 14\log_{10} r = 1 + \log_{10} 6$ です。
これより $\log_{10} a = 1 + 0.7782 - 14 \times 0.0402 = 1.2154$ がわかります。
- サシ 常用対数表で $\log_{10} 1.60 = 0.2041$ 、 $\log_{10} 1.70 = 0.2304$ ですので、 $1 + \log_{10} 1.6 < \log_{10} a < 1 + \log_{10} 1.70$ がわかります。
したがって $\log_{10} 16 < \log_{10} a < \log_{10} 17$ より $16 < a < 17$ がわかりますので、 a 以下の最大の整数は 16 となります。

第3問

(1)

ア, イ x^3, x^2 の x としての導関数はそれぞれ $3x^2, 2x$ ですので、 $f(x) = 2 \cdot (3x^2) + 3 \cdot (2x) = \underline{6x^2 + 6x}$ となります。

ウエ $f(x) = 6x(x+1)$ と変形できますので、この値が正から負に変わる $x = -1$ で $F(x)$ は極大値をとります。

オ, カ $G(x)$ の導関数は $F(x)$ の導関数でもありますので、 $G(x)$ と $F(x)$ の差は定数になります。したがって x による部分は変わりませんので、 C を積分定数として $G(x) = \underline{2x^3 + 3x^2 + C}$ となります。

キ $G(x)$ の導関数が $F(x)$ の導関数と一致することから、極小値をとる x も等しくなります。すなわち $G(x)$ は $x = 0$ で極小値をとります。

ク 同様に $G(x)$ は $x = -1$ で極大値をとることがわかりますので、 $G(-1) = 0$ がわかります。

$G(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + C = -2 + 3 + C = C + 1$ ですので、 $C = \underline{-1}$ が得られます。

(2) コ $F(x)$ が $x = 0$ で極小値をとることから、 $f(0) = 0$ がわかります。

サ 極小値をとる前後では、導関数 $f(x)$ の符号は 0負から正に変わります。

シ $G(x)$ が $x = k$ で極大値をとることから、 $f(k) = 0$ がわかります。

ス 極大値をとる前後では、導関数 $f(x)$ の符号は 1正から負に変わります。

セ 極小値が 0 であること、極大値をとる x が極小値をとる x より大きいこと、また $f(x)$ が 2 次関数なので $f(x) = 0$ となる x は $x = 0, k$ に限られることから、選択肢 3 のグラフがあてはまります。

(3) ソ, タ $F(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから、 $F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ が成り立ちます。

$F(0) = 0$ も条件でしたので、 $\alpha = 0$ とすることで $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ であることがわかります (ソ:3x、タ:00)。

チ, ツ $F(x)$ の極大値は $F(k)$ ですので、 $\int_0^k f(t) dt$ と表せます (チ:2k、ツ:00)。

テ, ト $F(x)$ が $x = 0$ で極小、 $x = k$ で極大となりますので、 $0 \leq x \leq k$ において $f(x) \geq 0$ となります。

$f(0) = f(k) = 0$ ですので $F(x)$ の極大値は 0y = f(x) のグラフと x 軸で囲まれた部分の 0面積 に等しいです。

ナ 同様に考えると $G(x) - G(\alpha) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ であり $G(k) = 0$ より $G(x) = \int_k^x f(t) dt$ がわかります。

したがって $G(0) = \int_k^0 f(t) dt = -\int_0^k f(t) dt = -F(k)$ がわかります。すなわち $F(k) = -G(0)$ ですので、 $F(x)$ の極大値は 2G(x) の極小値の -1 倍 に等しいことがわかります。

第4問

(1)ア, イ T の内部にある格子点で $x = n$ 上にくるものは $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, 3n - 1)$ の $3n - 1$ 個ですので、 $a_n = 3n - 1$ です。

したがって代入により $a_2 = 5, a_3 = 8$ がわかります。

ウ～オ $a_n - a_{n-1} = 3$ が成り立ちますので、数列 $\{a_n\}$ は 公差が3の0等差数列 です。

カ～ク T の内部の格子点の個数は項数 20 の数列 $\{a_n\}$ の総和です。末項は $a_{20} = 59$ ですのでこれを利用するとその値は $\frac{20}{2} \cdot (a_1 + a_{20}) = 10 \cdot 61 = \underline{610}$ となります。

(2) ケ U の内部で直線 $x = k$ 上にある格子点は $(k, 1), (k, 2), \dots, (k, 2^k - 1)$ の $2^k - 1$ 個です。

コ 直線 $x = k$ が U の内部と共通部分をもつ整数 k は $k = 1, 2, \dots, n$ です。したがって格子点の個数は $1 \sum_{k=1}^n (2^k - 1)$ で計算できます。

サ 計算すると $2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2$ となります。

(3)

シ～ソ V の内部で直線 $x = k$ 上にある格子点の数を $\{b_k\}$ とおきます。

直線 $x = k$ が V の内部と共通部分をもつような整数は $k = 1, 2, \dots, n$ ですので、格子点の個数は $\sum_{k=1}^n b_k$ と表せます。

問題文の条件よりこの値はすべての自然数において n^3 ですので $\sum_{k=1}^n b_k = n^3$ が成り立ちます。

したがって $b_1 = 1$ であり、 $n \geq 2$ ならば $b_n = (\sum_{k=1}^n b_k) - (\sum_{k=1}^{n-1} b_k) = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ がわかります。($3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1$ なので b_1 もまとめられる)

一方で、放物線の概形を考えてみましょう。

$a > 0$ ですので $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ となり、 $b^2 - 4ac < 0$ ですので $ax^2 + bx + c$ は x によらず正の値となります。

また a, b, c は整数ですので x が整数ならば $ax^2 + bx + c$ も整数となり、すなわち $ak^2 + bk + c = 1$ なら $b_k = 0$ 、 $ak^2 + bk + c \geq 2$ ならば $b_k = ak^2 + bk + c - 1$ となります。($ak^2 + bk + c = 1$ でも同じ式になるので、結局まとめられる)

したがってすべての自然数 n において $3n^2 - 3n + 1 = an^2 + bn + (c - 1)$ が成り立ちますので、係数を比較することで $a = 3, b = -3, c = 2$ がわかります。

(多項式の公式 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + 1}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}$ から計算して比較するのもあり)

第5問

(1)

ア～エ X は平均 110、標準偏差 20 の分布に従うことから、 $110 = 110 + 20 \cdot 0$ 、 $140 = 110 + 20 \cdot 1.5$ と変形できます。

したがって $P(110 \leq X \leq 140)$ は標準化した値が 0 以上 1.5 以下になる範囲ですので、正規分布表で $z = 1.50$ のときの値がそのまま割合となります。

表からその値は 0.4332 であるとわかります。

オ 二項分布 $B(n, p)$ は期待値が np となります。いま Y は $B(200000, 0.4332)$ に従いますので、期待値は $200000 \times 0.4332 = \underline{486640}$ となります。

(2) カ W_1, \dots, W_n は母平均 m からの標本ですので $E(W_1) = \dots = E(W_n) = m$ がわかります。

したがって $E(\bar{W}) = \frac{1}{n}(n \cdot m) = m$ となります。

また W_1, \dots, W_n は無作為に抽出していますので独立な確率変数です。したがって

$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot (V(W_1) + \dots + V(W_n)) = \frac{1}{n^2} \cdot (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$ となります。よって n が十分に大きければ \bar{W} は平均 m 、分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ の正規分布、すなわち ${}_6N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従います。 $(N(m, v))$ の 2 番目の変数は分散であり、標準偏差でないことに注意)

キ 正規分布における信頼度 95% の区間を求めるため、 $\frac{0.95}{2} = 0.475$ となるような z_0 を標準正規分布表から探しましょう。すると $z_0 = 1.96$ がわかります。

すなわち信頼度 95% の区間は平均との差が標準偏差の 1.96 倍以内になる区間となります。

したがって $B = \bar{W} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 、 $A = \bar{W} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となりますので、 $B - A = \underline{5 \frac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}}$ となります。

ク～コ $(3.92\sigma)^2 \leq 16n$ より $n \geq \frac{(3.92 \cdot 20)^2}{16} = (3.92 \cdot 5)^2 = 19.6^2$ となります。

工夫することで $19.6^2 = 19.6 \cdot (20 - 0.4) = 392 - 1.96 \cdot 4 = 392 - 7.84 = 384.16$ と計算できます。

したがってこれをみたす最小の整数は $n = 385$ となります。

(3) サ 今回は 110 と比べて軽い、すなわち 110 より小さいことを調べたいですので、対立仮説は ${}_0m < 110$ です。

シ 標本が 400 個の場合、 \bar{W} の標準偏差は $\frac{20}{\sqrt{400}} = 1$ であり、平均は 110 ですので \bar{W} は近似的に正規分布 ${}_5N(110, 1)$ に従います。

ス～タ $108.2 = 110 - 1 \times 1.8$ ですので $\bar{W} \leq 108.2$ とは平均との差が標準偏差の 1.8 倍以上小さいということになります。

正規分布表から $z_0 = 1.80$ であるときの値は 0.4641 となっています。

正規分布では平均より小さくなる確率は 0.5 ですので、求める確率はその差が標準偏差の 1.8 倍以内である確率 0.4641 を引いた値ですので、すなわち $0.5 - 0.4641 = \underline{0.0359}$ となります。

チ 0.0359 は 3.59% ですので、有意水準 5% を下回ります。これは帰無仮説を仮定したときに計測された値になりうる可能性が十分に低いということですので、すなわち得られた確率は有意水準 5% より 1 小さく、帰無仮説は棄却されることとなります。

ツ 帰無仮説を棄却し対立仮説を採用しましたので、すなわち母平均は 110g より軽いと 0 判断できます。

第6問

(1) ア S は中心 O で半径 1 の球ですので、 S 上の点はすべて O との距離が 1 です。したがって C が S 上にあるならば $|\vec{OC}| = 1$ より $|\vec{OC}|^2 = 1$ がわかります。

イ 三角形 OAC と OAB は $OB = OC = 1$ 、 $AC = AB$ より合同です。

内積の性質から $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = |\vec{OA}| |\vec{OC}| \cos \angle AOC$ であり、対応する等しいものを書き換えるとこの値は $|\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \angle AOB$ に等しいことがわかります。

したがって $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$ がわかります。

ウ 上記を成分で計算すると $1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1 \cdot a + 0 \cdot \sqrt{1-a^2} + 0 \cdot 0$ より ${}_0x = a$ が得られます。

エ, オ 成分計算により $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = a \cdot x + \sqrt{1-a^2} \cdot y + 0 \cdot z$ であり、これが $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = a$ に等しいことから ${}_0ax + \sqrt{1-a^2}y = a$ であることがわかります。

(なお、ここまで出た関係式をみたら $AB = BC = CA = \sqrt{2(1-a)}$ が成り立つ)

(2)

カ, キ まず②より $x = a$ なので $x = \frac{3}{5}$ がわかります。

ク～コ ③より $ax + \sqrt{1-a^2}y = a$ であり、 $1-a^2 = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$ ですので、

代入により $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5}y = \frac{3}{5}$ となりますので、ここから $y = \frac{3}{10}$ がわかります。

サ ここから $x^2 + y^2 = \frac{9}{25} + \frac{9}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$ ですので①より $z^2 = \frac{11}{20}$ がわかり、すなわち $z = \pm \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$ より、①をみたら実数 z は 2つだけあることがわかります。

シ $a = -\frac{3}{5}$ のときは、同様に計算して $x = -\frac{3}{5}$ 、 $1-a^2 = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$ より $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5}y = -\frac{3}{5}$ となり $y = -\frac{6}{5}$ がわかります。

これより $x^2 + y^2 = \frac{9}{5}$ となり $z^2 = -\frac{4}{5}$ が得られますので、条件をみたら z は存在せず、すなわちそのような点 C は ないことがわかります。

(3) ス 順番に計算すると②から $x = a$ であり、③に代入することで $a^2 + \sqrt{1-a^2}y = a$ より $y = \frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$ がわかります。

したがって①より

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - a^2 - \frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2} = 1 - a^2 - \frac{a^2(1-a)}{1+a} = \frac{(1-a^2)(1+a) - a^2(1-a)}{1+a}$$

となります。

$(1-a^2)(1+a) - a^2(1-a) = (-a^3 - a^2 + a + 1) - (-a^3 + a^2) = -2a^2 + a + 1 = (1-a)(1+2a)$ ですので、 ${}_3z^2 = \frac{(1+2a)(1-a)}{1+a}$ がわかります。

セ z が存在する条件が $(1+2a)(1-a) \geq 0$ であることがわかりました。この式を利用することで $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ が得られます。

a は $0 < a < 1$ の範囲で変化できますので、求める条件はこれと合わせて $\frac{1}{4} \leq a < 1$ となります。

第7問

(1)ア, イ 複素数の加減法は実部と虚部でそれぞれ加減法を適用することになります。これより $\gamma - \alpha = (7-3) + (10-2)i = 4 + 8i$ となります。

ウ, エ 同様に $\beta - \alpha = (7-3) + (0-2)i = 4 - 2i$ がわかります。

オ 複素数の分母を簡略化するには共役な値との積をとることが有効です。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{4 + 8i}{4 - 2i} = \frac{4(1 + 2i)}{2(2 - i)} = 2 \cdot \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = 2 \cdot \frac{5i}{5} = 3i \text{ がわかります。}$$

カ $2i$ が虚部が正の純虚数であることから、極形式にすると $2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ となり、すなわち偏角は $\frac{\pi}{2}$ であることがわかります。

直線 AB と直線 AC のなす角は $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角に等しいですので、直線 AB と AC は垂直に交わるということがわかります。

(2) キ w の偏角を θ としたときその値が $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{\pi}{3}$ であるとき、 $\cos \theta = 0$ です。

したがって w を極形式 $|w|(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表すと実部が 0 になることがわかりますので、 w は 実部が 0 の虚数 であることがわかります。

ク w の実部が 0 であるとき、 w の虚部を y とおくと $w = yi, \bar{w} = -yi$ ですので $w + \bar{w} = 0$ です。

なお、 $w + \bar{w}$ は w の実部の 2 倍の値になるので、これが 0 になるならば w の実部が 0 であることもわかります。

(3) ケ 問題文で出てきた式をさらに変形すると $2z\bar{z} + 2\bar{z} + 2z = 0$ となり、 $2(z+1)(\bar{z}+1) - 2 = 0$ となりますので、

$$(z+1)(\bar{z}+1) = 1 \text{ より } |z+1|^2 = 1, \text{ すなわち求める条件は } |z+1| = 1 \text{ となります。}$$

コ $|z+1| = 1$ となるような z は中心 -1 、半径 1 の円周上にきますので、図にするとそれらから点 $0, -2$ を除いた部分になっている 選択肢 0 の図が該当します。

サ $-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$ ですので、複素数を -1 倍すると複素数平面状では原点において対称移動した点となります。

これらより直線 AB と AC とのなす角は直線 A'B' と A'C' とのなす角に等しいですので、垂直に交わる条件は直線 AB と AC が垂直に交わる条件に一致します。すなわち複素数平面上では前問と同じ図である 選択肢 0 の図が該当します。

シ $z' = -z$ とおくと $\alpha'' = z', \beta'' = 2, \gamma'' = \frac{4}{z'}$ となりますので、(i) で得られた結論から $|z' + 1| = 1$ をみることが条件であるとわかります。 $|z' + 1| = |-z + 1| = |z - 1|$ ですので、平面上では中心 1、半径 1 の円周上となります。したがって z のえがく図はそこから点 $0, 2$ を除いた 選択肢 1 の図であるとわかります。

(z' が 選択肢 0 の図にくることから、これを原点中心に π 回転させた図、と考えて得ることもできます)

所感

マークの手間はありますが、解きやすい問題が多いです。選択問題で第6問を選ぶと時間を食いそうです。

第1問

三角関数の問題です。関数の増減をイメージすればうまくいくはずです。

第2問

指数対数関数の問題です。表の読み方や範囲の評価がわかれば問題ないでしょう。

第3問

関数の微積分に関する問題です。微分の基本的な理解、積分との関係をおさえていけば最後までいけます。

第4問

数列に関する問題です。面倒な計算をする一般項はありませんが、変な勘違いでの減点には気を付けましょう。

第5問

統計処理に関する問題です。工夫しないと大変な計算が1箇所ありますが、それ以外は基本的な要素から成り立っているようです。

第6問

ベクトルを利用した問題です。少々面倒な計算を要します。

第7問

複素数平面の問題です。地道な計算と図形的な思考の両面から進められるとやりやすいです。