解答

第1問 (20)			
解答欄	解答	配点	
ア,イ	2,8	2	
ウ, エ, オ, カ	2,5,3,2	3	
キ,ク	6,4	2	
ケ	1	3	
⊐	2	2	
サ, シ, ス	3,5,9	2	
セ, ソ, タ	0,6,7	2	
チ	2	2	
ツ	6	2	

第3問 (30)			
解答欄	解答	配点	
アイ,ウエ	-3,-7	2	
オ	2	3	
カ,キ,ク,ケ	6,3,6,5	3	
コ,サ	1,5	3	
シ,ス	5,7	4	
セ	1	2	
ソ, タ, チ, ツ	4,5,8,5	3	
テ,ト	9,5	2@	
ナニ,ヌネ	81,25	3@	
7	0	1#	
ハ,ヒ,フ	1,4,0	4	

第2問 (30)		
解答欄	解答	配点
アイ, ウ, エ	11,4,3	3
オ	6	2
カ,キ,ク,ケ	3,2,2,3	3
コ	3	2
サ,シ	2,4	2
ス	8	2
セ,ソ	1,0	2
タ	2	3
チ,ツ	2,2	3
テ,ト	1,1	3
ナニ,ヌ	14,4	2
ネノ	14	3

第4問 (20)			
解答欄	解答	配点	
アイ,ウエ	34,68	2	
オカ	34	3	
+	1	3	
ク	4	2	
ケ	0	3	
コ	4	2	
サ, シ, ス, セ	4,3,2,3	3	
ソ, タ, チ	1,4,0	2	

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとまって入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。 (上記の場合、第1間はアに2、イに8を入れた場合のみ2点が加わる)
- 配点に#のついたものを得点するためには、配点欄に@が付いている問題をすべて正解していることが必要です。

(上記の場合、第3問でテに8、ノに0を入れた場合、テトが誤答となるためノの得点も入らない)

解説

第1問

[1]

(1)

ア,イ a=1 とすると①は $4bx^2+16x-b-8=0$ より $(4x^2-1)b+16x-8=0$ と変形できます。 $4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$ であり 16x-8=8(2x-1) ですので、さらに (2x-1)(2bx+b+8)=0 と変形できます。

(2)

ウ~カ b=2 のとき①の左辺は $(2a+6)x^2+(5a+11)x-10$ となります。 a の降べき順に書き換えると $(2x^2+5x)a+(6x^2+11x-10)$ と変形できます。 $6x^2+11x-10=(2x+5)(3x-2)$ と変形できますので $(2x^2+5x)a+(6x^2+11x-10)=(2x+5)\cdot ax+(2x+5)(3x-2)=\underline{(2x+5)\{(a+3)x-2\}}$ がわかります。

キ, ク このとき①の解は $a\neq -3$ ならば $x=-\frac{5}{2},\frac{2}{a+3}$ となります。 $a=2\sqrt{2}$ ならば $\frac{2}{a+3}=\frac{2}{3+2\sqrt{2}}=\frac{2\cdot(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\frac{6-4\sqrt{2}}{3^2-2\cdot 2^2}=\frac{6-4\sqrt{2}}{3^2-2\cdot 2^2}$ となりますので、これが①の解になります。

ケ a=-3 であれば①は -4x-10=0 と変形できますので、解は $x=-\frac{5}{2}$ のみとなります。なので十分条件といえます。 $-方、\frac{2}{a+3}=-\frac{5}{2}$ となる場合を考えると $a=-\frac{19}{5}$ があげられます。このとき①の解は $x=-\frac{5}{2}$ だけとなります。 (実際、①は $-\frac{8}{5}x^2-8x-10=0$ より $-\frac{2}{5}(2x+5)^2=0$ となります)なので反例があることから必要条件でないことがわかります。

したがって、あてはまるものは1十分条件であるが必要条件ではないとなります。

[2]

(1) コ $A \cap B$ は $A \lor B$ の両方に属する要素の集合ですので、 $A \lor B$ の両方に囲まれた部分が該当します。また \overline{A} は A に属さない要素の集合ですので、 $\overline{A} \cap \overline{B}$ は A にも B にも囲まれない部分が該当します。さらに $X \cup Y$ は $X \lor Y$ 少なくとも一方に属する要素の集合ですので、 $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ は選択肢 2 の図で表せることがわかります。

(2)

サ~ス PとQの両方に属する要素を探すことで $P \cap Q = \{3,5,9\}$ がわかります。

- セ〜タPにもQにも属さない要素を探すことで $\overline{P} \cap \overline{Q} = \{0,6,7\}$ がわかります。なお、ド・モルガンの法則を用いて $P \cup Q$ を求めてからそれに属さない要素を探すことでも求められます。
 - チ $(A\cap B)\subseteq A, (\overline{A}\cap \overline{B})\subseteq \overline{A}$ であり、A と \overline{A} には共通の要素がありませんので、 $(A\cap B)\cup (\overline{A}\cap \overline{B})$ が全体に等しいならば $(A\cap B)=A, (\overline{A}\cap \overline{B})=\overline{A}$ でなければなりません。 したがって A の要素であるものは B の要素であり、さらに A の要素でないものは B の要素ではないことが必要なので、 $B=A=_2\{1,4,5,7\}$ となります。
 - ツ $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ が空集合であるならば、A の要素であるものは B の要素ではなく、A の要素でないものは B の要素であることが必要です。 したがって $B=\overline{A}=_6\{0,2,3,6,8,9\}$ となります。

第2問

(1) アイ 辺 AD と BC が平行であり、線分 AP と DQ は辺 BC に垂直になるようにとっていますので、四角形 APQD は長方形になります。

また、正接 (tan) の値が正であることから ∠ABC, ∠BCD はいずれも鋭角です。

したがって P,Q は辺 BC の内部にくることがわかり、BC = 1 であるので、BC = BP + PQ + QC より BP + CQ = BC - PQ = 12 - 1 = 11 がわかります。

- ウ, エ 三角形 ABP が P を直角とする三角形ですので、 $\tan \angle ABC = \frac{AP}{BP}$ が成り立ちます。 したがって BP = $\frac{AP}{\tan \angle ABC} = \frac{4}{3}$ AP がわかります。
 - オ 三角形 DCQ に着目すると $\tan \angle BCD = \frac{DQ}{CQ}$ より $CQ = \frac{DQ}{\tan \angle BCD} = \frac{1}{2} AP$ が成り立ちます。 したがって $\mathrm{BP} + \mathrm{CQ} = \frac{4}{3}\mathrm{AP} + \frac{1}{2}\mathrm{AP} = \frac{11}{6}\mathrm{AP}$ より $\frac{11}{6}\mathrm{AP} = 11$ ですので、 $\underline{\mathrm{AP}} = 6$ がわかります。

(2)

カ, キ 三角形 ACP が P を直角とする三角形になりますので、
$$\tan \angle BCR = \tan \angle BCA = \frac{AP}{CP} = \frac{AP}{CQ+PQ} = \frac{6}{\frac{1}{2} \cdot 6 + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ と計算できます}.$$

- ク,ケ 同様に三角形 DBQ に着目すると $\tan \angle \text{CBR} = \frac{\text{DQ}}{\text{BQ}} = \frac{\text{AP}}{\text{BP} + \text{PQ}} = \frac{6}{\frac{4}{3} \cdot 6 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ がわかります。
 - コ これより $\tan \angle BCR = \frac{1}{\tan \angle CBR}$ が成り立っていることがわかりました。 $\angle BCR, \angle CBR$ はいずれも鋭角であるため、ここから $\angle BCR = 90^{\circ} \angle CBR$ すなわち $\angle BCR + \angle CBR = 90^{\circ}$ 90° がわかります。

よって $\angle BRC = 180^{\circ} - (\angle BCR + \angle CBR) = 90^{\circ}$ ですので、 $\angle BRC$ の大きさは $_390^{\circ}$ に等しいことがわ かります。

[2]

- (1) サ 三角形 OAH は H が直角の三角形ですので $AH = AO \sin \alpha$ すなわち $AH = 2 \sin \alpha$ がわかります。
 - シ さらに計算して $PH = 4\sin\alpha$ がわかります。
 - ス 三角形 O'BH' は H' を直角とする三角形ですので BH' = BO' $\sin\beta = 4\sin\beta$ となり、 すなわちPB = $8\sin\beta$ がわかります。
 - セ,ソ 三角形 PAB に正弦定理を適用すると $\frac{\mathrm{PA}}{\sin \angle \mathrm{PBA}} = \frac{\mathrm{PB}}{\sin \angle \mathrm{PAB}} = 2R_1$ ですので、すなわち $_1\frac{\mathrm{PA}}{\sin \beta} = _0\frac{\mathrm{PB}}{\sin \alpha} = 2R_1$ がわかります。
 - タ 上記の式を変形することで $PA\sin\alpha = PB\sin\beta$ が成り立ちますので、さらに代入すると $(4\sin\alpha)\cdot\sin\alpha = (8\sin\beta)\cdot\sin\beta$ となり、すなわち $4\sin^2\alpha = 8\sin^2\beta$ より $\sin^2\alpha = 2\sin^2\beta$ です。 α,β は 0° より大きく 180° より小さいため $\sin\alpha,\sin\beta$ はいずれも正となることから、 $\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$ がわかります。
 - チ,ツ $\frac{\mathrm{PA}}{\sin\beta} = 2R_1$ に代入することで $\frac{4\sin\alpha}{\sin\beta} = 2R_1$ となります。 さらに $\frac{4\cdot\sqrt{2}\sin\beta}{\sin\beta} = 2R_1$ とできますので、 $\underline{R_1 = 2\sqrt{2}}$ がわかります。
- (2) テ $\angle {\rm QAB} = \gamma, \angle {\rm QBA} = \delta$ とおくと、前問の α を γ に、 β を δ に置き換えた式がそのまま使えることがわかります。 したがって $\frac{{\rm QA}}{\sin\delta} = 2R_2$ より $2R_2 = \frac{4\cdot\sqrt{2}\sin\delta}{\sin\delta}$ となりますので、 $_1R_1 = R_2$ がわかります。
 - ト 三角形 APB、AQB それぞれにおける正弦定理により $2R_1 = \frac{AB}{\sin \angle APB}$, $2R_2 = \frac{AB}{\sin \angle AQB}$ がわかります。 いま $R_1 = R_2$ ですので $\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AB}{\sin \angle AQB}$ が成り立ちますので、 $1 \frac{\sin \angle APB}{\sin \angle AQB}$ がわかります。

(3)

ナ〜ヌ 正弦定理から
$$2R_1=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$$
 ですので、 $\sin\angle\mathrm{APB}=\frac{\mathrm{AB}}{2R_1}=\frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$ がわかります。

ネノ 三角形 APB に余弦定理を適用することで $AB^2 = PB^2 + PA^2 - 2PB \cdot PA \cdot \cos \angle APB$ となります。 いま $\sin \angle APB = \sin \angle AQB$ であるので $\angle APB = 180^\circ - \angle AQB$ です。

 $\angle APB < \angle AQB$ より $180^\circ - \angle AQB < \angle AQB$ となるので $\angle AQB > 90^\circ$ がわかり、これより $\angle APB < 90^\circ$ がわかります。

したがって $\cos \angle APB > 0$ なので $\cos^2 \angle APB = 1 - \sin^2 \angle APB = \frac{2}{16}$ より $\cos \angle APB = \frac{\sqrt{2}}{4}$ がわかります。

これより PB = $\sqrt{2}$ PA を代入して $(2\sqrt{7})^2 = 2$ PA $^2 +$ PA $^2 - 2 \cdot (\sqrt{2}$ PA $) \cdot$ PA $\cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$ となり、整理すると 28 = 2PA 2 よりPA = $\sqrt{14}$ がわかります。

第3問

[1]

(1)

- ア〜エ 平方完成をすることで $f(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2 \cdot 3x + 20 = 3(x+3)^2 + 20 3 \cdot 3^2 = 3(x+3)^2 7$ とできますので、y = f(x) のグラフの頂点は(-3, -7)にくることがわかります。
 - オ y=f(x) のグラフは頂点の y 座標が負である下に凸のグラフですので、f(x)=0 は異なる 2 つの実数 解をもつことがわかります。

また頂点の x 座標が負であり、y 軸との交点の y 座標は f(0)=20>0 ですので、これらより 2 次方程式 f(x)=0 は 2異なる 2 つの負の解をもつことがわかります。

(2)

- カ〜ケ 平行移動により $g(x)=f(x-s)-5=3(x-s)^2+18(x-s)+20-5$ が成り立ちます。 展開すると $g(x)=3x^2-6sx+3s^2+18x-18s+15$ となりますので、x でまとめると $g(x)=3x^2+(18-6s)x+3(s^2-6s+5)$ となります。
- コ, サ g(x)=0 が正の解と負の解を 1 つずつもつ条件は、g(x) が最小値をもつことから g(0)<0 が必要十分です。

 $g(0) = 3(s^2 - 6s + 5) = 3(s - 1)(s - 5)$ ですので g(0) < 0 から1 < s < 5が得られます。

(3)

シ, ス y = h(x) のグラフは頂点が $(t - 3, t^2 - 6t - 7)$ である放物線であり、

 $h(x)=3x^2-6tx+3t^2+18x-18t+20+t^2-6t=3x^2+(18-6t)x+4t^2-24t+20$ がわかります。 h(x)=0 が異なる 2 つの正の解をもつためには y 切片が正、かつ軸の x 座標が正、かつ頂点の y 座標が負であることが必要十分です。

これを式で表すと $h(0) > 0.6t - 18 > 0.t^2 - 6t - 7 < 0$ となります。

 $h(0)=4(t^2-6t+5)=4(t-1)(t-5)$ ですので h(0)>0 から t<1 または 5< t、 6t-18>0 から t>3、 $t^2-6t-7=(t+1)(t-7)<0$ から -1< t<7 ですので、すべての条件を合わせると求める範囲は5< t<7となります。

[2]

(1) セ C_1 は点 (0,1) を通りますので仮定した二次関数に代入すると $1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$ がわかり、これより c=1が成り立ちます。

テ,ト C_1 を表す式を平方完成すると $y=-\frac{4}{5}(x+1)^2+1+\frac{4}{5}$ となりますので、頂点の y 座標は $1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$ となります。

ナ~ネ C_1 の頂点は $\left(-1,\frac{9}{5}\right)$ であることがわかりました。 C_3 は C_1 を y 軸で対称移動させた図形に等しい (仮定で通るとする 3 点が y 軸に関して対称であるため) ですので、 C_3 の頂点は $\left(1,\frac{9}{5}\right)$ です。 C_2 の式を $y=px^2+qx+r$ とおくと $p+q+r=p-q+r=\frac{9}{5},\frac{9}{4}p+\frac{3}{2}q+r=0$ となりますので、連立して解くと $q=0,p=-\frac{36}{25},r=\frac{81}{25}$ が得られ、すなわち C_2 の式は $y=-\frac{36}{25}x^2+\frac{81}{25}$ となります。 これより C_2 の頂点の y 座標は $\frac{81}{25}$ となります。

(y軸で対称な 2点を通ることから頂点の x 座標が 0 であることを利用して、 $p\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+r=p\cdot 1+r-\frac{9}{5}$ から p を計算する方法もあります)

ノ 大きな噴水の高さは $\frac{81}{25}$ 、小さな噴水の高さは $\frac{9}{5}$ ですので、大きな噴水の高さを小さな噴水の高さで割ると $\frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{5}} = \frac{9}{5}$ より、大きな噴水の高さは小さな噴水の高さの $\frac{9}{5} (=1.8)$ 倍となります。したがって選択肢では $_0$ およそ $_2$ 倍が適当といえます。

(2)

第4問

- (1) アイ 最頻値は度数 (その階級に属する数) が最大の階級の階級値 (階級の範囲の中央値) です。 総平均時間では 32 以上 36 未満の階級の度数が最大ですので、最頻値はその階級値である34です。
 - ウエ 行動者平均時間では64以上72未満の階級の度数が最大ですので、最頻値は68です。
 - オカ 総平均時間で平均値を計算しましょう。最小の階級の階級値を 0+26 と表して、以降は階級が上がる ごとに階級値が 4 増えることを利用します (たとえば 36 以上 40 未満は最小の階級から 3 段階上なので 階級値は $4\cdot 3+26$ と表現できる)。すると

階級値は
$$4\cdot 3+26$$
 と表現できる)。すると $m=26+4\times\frac{0\cdot 6+1\cdot 10+2\cdot 15+3\cdot 8+4\cdot 4+5\cdot 4}{47}=26+\frac{400}{47}$ がわかります。 $8=\frac{376}{47}<\frac{400}{47}<\frac{423}{400}<9$ ですので、 $26+8\leq m<26+9$ すなわち $34\leq m<35$ がわかります。 それぞれ 検証します

- (a) 箱ひげ図で最大値はひげの右端、最小値はひげの左端の値として表されます。 令和3年の総平均時間の最大値は50未満で、行動者平均時間の最小値は50より大きいですので、 この文は正しいといえます。
- (b) 箱ひげ図で四分位範囲は箱の横幅として表されます。 平成28年の総平均時間の四分位範囲は8程度で、行動者平均時間の最小値は13程度ですので、この文は正しいといえます。
- (c) H は最大値から第 3 四分位数 (箱ひげ図で箱の右端の値) を引いた値ですので、右側のひげの長さとして表されています。 H_1 は 20 程度、 H_2 は 8 程度、 H_3 は 34 程度、 H_4 は 25 程度ですので、 $\frac{H_2}{H_1}$ は 0.4 程度、 $\frac{H_4}{H_3}$ は 0.7 程度となり、すなわち $\frac{H_2}{H_1} < \frac{H_4}{H_3}$ より、この文は誤りといえます。
- よってあてはまるものは₁(a) 正、(b) 正、(c) 誤となります。
- (2) ク 行動者平均時間の散布図は図5ですので、これで確認します。「通勤・通学」の時間が60以下(60の線より左)でかつ「移動」の時間が75以下(70と80の中間にある線より下)にきている丸は白丸だけ4個ありますので、重複がないことから都道府県の数は4であることがわかります。
 - ケ 各データに対して、調査対象者が n_1 人、そのうち回答が 0 分だった人が n_2 人で、総平均時間が t_1 分、行動者平均時間が t_2 分とおきます。このとき得られた時間を合計すると平均の計算方法からその値は n_1t_1 に等しく、また $(n_1-n_2)t_2$ にも等しくなります。

したがって $t_2=\frac{n_1}{n_1-n_2}t_1$ となりますので、 t_1 が同じ値なら t_2 の値は $\frac{n_1}{n_1-n_2}$ が大きいほど大きくなります。

 $\frac{n_1}{n_1-n_2}=\frac{1}{1-\frac{n_2}{n_1}}$ であるので $1-\frac{n_2}{n_1}$ が小さいほど、すなわち $\frac{n_2}{n_1}$ が大きいほど行動者平均時間が大きくなることがわかります。

ここから $_0$ 点 A では「通勤・通学」の時間が 0 である人数の割合が他 3 つより大きいということが導かれます。

コ 相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで求められます。すなわち求める値を r とおくと $r=\dfrac{64.4}{11.8\times7.9}$ がその値となります。

11.8 < 12, 7.9 < 8 を利用すると $r > \frac{64.4}{12 \times 8} = \frac{64.4}{96}$ と、大体 $\frac{2}{3}$ 程度となりますので、選択肢であてはまるものは $_40.69$ といえます。

まるものは $_40.69$ といえます。 (実際に計算すると $\frac{64.4}{11.8\times7.9}=0.69+0.01\times\frac{7.82}{11.8\times7.9}$ となり、概算があっていることが確認できます)

(3)

サ,シ データ全体で考えた平均を m_T とし、0 であるデータを除いたもので考えた平均を m_P としましょう。 このデータでは $m_T=\frac{1+2+3+0+0+0}{6}=1$ ですので、 $s_T^2=\frac{(1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2+(0-1)^2+(0-1)^2+(0-1)^2}{6}=\frac{8}{6}=\underline{4}$ 3 となります。

$$s_T^2 = \frac{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2}{6} = \frac{8}{6} = \underline{4}$$
3 となります。

- ス, セ また $m_P=\frac{1+2+3}{3}=2$ であり $s_P^2=\frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3}=\frac{2}{3}$ ですので、 $s_T^2-s_P^2=\frac{2}{3}$ が
- ソ,タ データを 12 個に増やすと $m_T = \frac{1+2+3+0\times 9}{12} = \frac{1}{2}$ となり、 $s_T^2 = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2\times 9}{12} = \frac{44}{4}\times\frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ となりますので、 $s_T^2 s_P^2 = \frac{11}{12} \frac{8}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ となります。
 - チ 得られたデータを比較すると $\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$ ですので、 $0(\underline{\mathbf{a}})$ の方が大きいことがわかります。

所感

基本的な問題と応用が問われる問題がちょうどよい配分で置かれているようです。はまると時間が足りなくなる可能性も高いです。

第1問

[1]

数と式に関する問題です。少し難しい因数分解があるように見えますが解答欄から逆算するのも有効です。最後の問題は早合点して重解の可能性を見落とさないようにしましょう。

[2]

集合に関する問題です。最後は少し思考が必要ですが、要素を 2,3 個具体的に試していけば解き方を思い浮かべられるかもしれません。

第2問

[1]

三角比の正接を使った問題です。図形としても複雑さがないですので、変な読み間違いをしていなければ平易な 問題でしょう。

[2]

正弦や余弦を利用した問題です。下手に図形的性質を考えたらはまりますので、式変形をもとに解き進めましょう。

第3問

[1]

二次関数のグラフ移動を考える問題です。グラフと解の関係を利用して解くことになり、慣れがものをいいそうです。

[2]

二次関数へのモデル化を利用した問題です。この解説では愚直に通る点を利用して係数を連立方程式の解として導いていますが、工夫するといろいろ速くできそうです。

第4問

データの分析に関する問題です。面倒な計算が多いですが、読解面は素直にできると思います。