解答

第１問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**2,8**	**2**
ウ, エ, オ, カ	**2,5,3,2**	**3**
キ, ク	**6,4**	**2**
ケ	**1**	**3**
コ, サ	**2,4**	**2**
シ	**8**	**2**
ス, セ	**1,0**	**2**
ソ	**2**	**3**
タ, チ	**2,2**	**3**
ツ, テ	**1,1**	**3**
トナ, ニ	**14,4**	**2**
ヌネ	**14**	**3**

第２問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	**1**	**2**
イ, ウ, エ, オ	**4,5,8,5**	**3**
カ, キ	**9,5**	**2@**
クケ, コサ	**81,25**	**3@**
シ	**0**	**1#**
ス, セ, ソ	**1,4,0**	**4**
タチ, ツテ	**34,68**	**2**
トナ	**34**	**3**
ニ	**1**	**3**
ヌ	**4**	**2**
ネ	**0**	**3**
ノ	**4**	**2**

第３問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**1,3**	**2**
ウ, エ, オ, カキ	**2,9,2,27**	**3**
ク, ケ	**1,3**	**2**
コ, サ	**1,3**	**2**
シ, ス	**2,9**	**2**
セ, ソタ	**5,27**	**3**
チ	**9**	**2**
ツ, テト, ナ	**1,27,0**	**4**

第４問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イウ	**3,13**	**2**
エオ	**16**	**3**
カキ, ク	**18,7**	**3**
ケ	**2**	**2**
コサ, シ	**23,9**	**2**
スセソ	**765**	**4**
タ	**3**	**4**

第５問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**2,3**	**3**
ウ	**3**	**3**
エオ, カ	**11,7**	**2**
キ, ク	**5,4**	**3**
ケ	**3**	**3**
コサ, シス	**15,12**	**3**
セ	**4**	**3**

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとまって入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。
  (上記の場合、第１問はアに 2、イに 8 を入れた場合のみ 2 点が加わる)
- 配点に#のついたものを得点するためには、配点欄に@が付いている問題をすべて正解していることが必要です。
  (上記の場合、第２問でカに 8、シに 0 を入れた場合、カキが誤答となるためシの得点も入らない)

解説

第 1 問

[1]

(1)

ア, イ　$a=1$ とすると①は $4bx^2+16x-b-8=0$ より $(4x^2-1)b+16x-8=0$ と変形できます。
$4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$ であり $16x-8=8(2x-1)$ ですので、さらに
$(2x-1)\underline{(2bx+b+8)}=0$ と変形できます。

(2)

ウ〜カ　$b=2$ のとき①の左辺は $(2a+6)x^2+(5a+11)x-10$ となります。
a の降べき順に書き換えると $(2x^2+5x)a+(6x^2+11x-10)$ と変形できます。
$6x^2+11x-10=(2x+5)(3x-2)$ と変形できますので
$(2x^2+5x)a+(6x^2+11x-10)=(2x+5)\cdot ax+(2x+5)(3x-2)=\underline{(2x+5)\{(a+3)x-2\}}$ がわかります。

キ, ク　このとき①の解は $a\neq -3$ ならば $x=-\dfrac{5}{2}, \dfrac{2}{a+3}$ となります。
$a=2\sqrt{2}$ ならば $\dfrac{2}{a+3}=\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{2\cdot(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{6-4\sqrt{2}}{3^2-2\cdot 2^2}=\underline{6-4\sqrt{2}}$ となりますので、これが①の解になります。

ケ　$a=-3$ であれば①は $-4x-10=0$ と変形できますので、解は $x=-\dfrac{5}{2}$ のみとなります。なので十分条件といえます。
一方、$\dfrac{2}{a+3}=-\dfrac{5}{2}$ となる場合を考えると $a=-\dfrac{19}{5}$ があげられます。このとき①の解は $x=-\dfrac{5}{2}$ だけとなります。
(実際、①は $-\dfrac{8}{5}x^2-8x-10=0$ より $-\dfrac{2}{5}(2x+5)^2=0$ となります)
なので反例があることから必要条件でないことがわかります。
したがって、あてはまるものは $_1$<u>十分条件であるが必要条件ではない</u>となります。

[2]

(1) コ 三角形 OAH は H が直角の三角形ですので $\mathrm{AH}=\mathrm{AO}\sin\alpha$ すなわち$\underline{\mathrm{AH}=2\sin\alpha}$がわかります。

サ さらに計算して$\underline{\mathrm{PH}=4\sin\alpha}$がわかります。

シ 三角形 $\mathrm{O'BH'}$ は $\mathrm{H'}$ を直角とする三角形ですので $\mathrm{BH'}=\mathrm{BO'}\sin\beta=4\sin\beta$ となり、すなわち$\underline{\mathrm{PB}=8\sin\beta}$がわかります。

ス, セ 三角形 PAB に正弦定理を適用すると $\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\angle\mathrm{PBA}}=\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{PAB}}=2R_1$ ですので、すなわち $_1\dfrac{\mathrm{PA}}{\underline{\sin\beta}}={}_0\dfrac{\mathrm{PB}}{\underline{\sin\alpha}}=2R_1$ がわかります。

ソ 上記の式を変形することで $\mathrm{PA}\sin\alpha=\mathrm{PB}\sin\beta$ が成り立ちますので、さらに代入すると $(4\sin\alpha)\cdot\sin\alpha=(8\sin\beta)\cdot\sin\beta$ となり、すなわち $4\sin^2\alpha=8\sin^2\beta$ より $\sin^2\alpha=2\sin^2\beta$ です。
α,β は 0° より大きく 180° より小さいため $\sin\alpha,\sin\beta$ はいずれも正となることから、
$\underline{\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta}$がわかります。

タ, チ $\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\beta}=2R_1$ に代入することで $\dfrac{4\sin\alpha}{\sin\beta}=2R_1$ となります。
さらに $\dfrac{4\cdot\sqrt{2}\sin\beta}{\sin\beta}=2R_1$ とできますので、$\underline{R_1=2\sqrt{2}}$がわかります。

(2) ツ $\angle\mathrm{QAB}=\gamma,\angle\mathrm{QBA}=\delta$ とおくと、前問の α を γ に、β を δ に置き換えた式がそのまま使えることがわかります。したがって $\dfrac{\mathrm{QA}}{\sin\delta}=2R_2$ より $2R_2=\dfrac{4\cdot\sqrt{2}\sin\delta}{\sin\delta}$ となりますので、$_1\underline{R_1=R_2}$がわかります。

テ 三角形 APB、AQB それぞれにおける正弦定理により $2R_1=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}},2R_2=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AQB}}$ がわかります。
いま $R_1=R_2$ ですので $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AQB}}$ が成り立ちますので、$_1\underline{\sin\angle\mathrm{APB}=\sin\angle\mathrm{AQB}}$がわかります。

(3)

ト〜ニ 正弦定理から $2R_1=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$ ですので、$\sin\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R_1}=\dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{\underline{4}}$ がわかります。

ヌネ 三角形 APB に余弦定理を適用することで $\mathrm{AB}^2=\mathrm{PB}^2+\mathrm{PA}^2-2\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PA}\cdot\cos\angle\mathrm{APB}$ となります。
いま $\sin\angle\mathrm{APB}=\sin\angle\mathrm{AQB}$ であるので $\angle\mathrm{APB}=180^\circ-\angle\mathrm{AQB}$ です。
$\angle\mathrm{APB}<\angle\mathrm{AQB}$ より $180^\circ-\angle\mathrm{AQB}<\angle\mathrm{AQB}$ となるので $\angle\mathrm{AQB}>90^\circ$ がわかり、これより $\angle\mathrm{APB}<90^\circ$ がわかります。
したがって $\cos\angle\mathrm{APB}>0$ なので $\cos^2\angle\mathrm{APB}=1-\sin^2\angle\mathrm{APB}=\dfrac{2}{16}$ より $\cos\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ がわかります。
これより $\mathrm{PB}=\sqrt{2}\mathrm{PA}$ を代入して $(2\sqrt{7})^2=2\mathrm{PA}^2+\mathrm{PA}^2-2\cdot(\sqrt{2}\mathrm{PA})\cdot\mathrm{PA}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となり、整理すると $28=2\mathrm{PA}^2$ より$\underline{\mathrm{PA}=\sqrt{14}}$がわかります。

第２問

[1]

(1) ア C_1 は点 $(0,1)$ を通りますので仮定した二次関数に代入すると $1 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c$ がわかり、これより $\underline{c=1}$が成り立ちます。

イ〜オ C_1 は点 $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ と $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通りますので、代入により
$\frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + 1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 1 = 0$ がわかります。
a, b の連立方程式として解くことで $a = -\frac{4}{5}, b = -\frac{8}{5}$ が得られますので、C_1 のグラフの式は
$\underline{y = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1}$となります。
(多項式のグラフが点 $(t,0)$ を通るときその式が $x - t$ で因数分解できることを利用して、
$y = a\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ から計算する方法もあります)

カ, キ C_1 を表す式を平方完成すると $y = -\frac{4}{5}(x+1)^2 + 1 + \frac{4}{5}$ となりますので、頂点の y 座標は $1 + \frac{4}{5} = \underline{\frac{9}{5}}$ となります。

ク〜サ C_1 の頂点は $\left(-1, \frac{9}{5}\right)$ であることがわかりました。C_3 は C_1 を y 軸で対称移動させた図形に等しい (仮定で通るとする 3 点が y 軸に関して対称であるため) ですので、C_3 の頂点は $\left(1, \frac{9}{5}\right)$ です。
C_2 の式を $y = px^2 + qx + r$ とおくと $p + q + r = p - q + r = \frac{9}{5}, \frac{9}{4}p + \frac{3}{2}q + r = 0$ となりますので、連立して解くと $q = 0, p = -\frac{36}{25}, r = \frac{81}{25}$ が得られ、すなわち C_2 の式は $y = -\frac{36}{25}x^2 + \frac{81}{25}$ となります。
これより C_2 の頂点の y 座標は$\underline{\frac{81}{25}}$となります。
(y 軸で対称な 2 点を通ることから頂点の x 座標が 0 であることを利用して、$p\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + r = p\cdot 1 + r - \frac{9}{5}$ から p を計算する方法もあります)

シ 大きな噴水の高さは $\frac{81}{25}$、小さな噴水の高さは $\frac{9}{5}$ ですので、大きな噴水の高さを小さな噴水の高さで割ると $\frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{5}} = \frac{9}{5}$ より、大きな噴水の高さは小さな噴水の高さの $\frac{9}{5}(= 1.8)$ 倍となります。
したがって選択肢では $_0$<u>およそ 2 倍</u>が適当といえます。

(2)

ス〜ソ 新たな仮定で得られる C_2' の式を $y = p'x^2 + q'x + r$ とおくと、まず C_1, C_3 の頂点を通ることから $p' + q' + r' = p' - q' + r' = \frac{9}{5}$ がわかります。
$(p' + q' + r') - (p' - q' + r') = 0$ から $q' = 0$ が得られますので、すなわち $y = p'x^2 + r'$ と表せます。
したがって頂点の x 座標は 0 ですので $r' = 5$ がわかります。
よって $p' = -\frac{16}{5}$ が得られますので、C_2' の式は $y = -\frac{16}{5}x^2 + 5$ となります。
点 P_2' の y 座標は 0 ですので、$-\frac{16}{5}x^2 + 5 = 0$ を解くことで P_2' の x 座標がわかります。
解くと $x = \pm\frac{5}{4}$ であり、P_2' の x 座標は正ですので、$x = \frac{5}{4}$ になることがわかります。
P_2 の x 座標は $\frac{3}{2}$ でしたので、x 座標の変化は $\frac{5}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$ となり、すなわち$\underline{\frac{1}{4}}$だけ $_0\underline{\mathrm{P}_1}$の方にきていることがわかります。

[2]

(1) タチ 最頻値は度数 (その階級に属する数) が最大の階級の階級値 (階級の範囲の中央値) です。
総平均時間では 32 以上 36 未満の階級の度数が最大ですので、最頻値はその階級値である$\underline{34}$です。

ツテ 行動者平均時間では 64 以上 72 未満の階級の度数が最大ですので、最頻値は$\underline{68}$です。

トナ 総平均時間で平均値を計算しましょう。最小の階級の階級値を $0+26$ と表して、以降は階級が上がるごとに階級値が 4 増えることを利用します (たとえば 36 以上 40 未満は最小の階級から 3 段階上なので階級値は $4 \cdot 3 + 26$ と表現できる)。すると
$m = 26 + 4 \times \dfrac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4}{47} = 26 + \dfrac{400}{47}$ がわかります。
$8 = \dfrac{376}{47} < \dfrac{400}{47} < \dfrac{423}{400} < 9$ ですので、$26 + 8 \leq m < 26 + 9$ すなわち$\underline{34 \leq m < 35}$がわかります。

ニ それぞれ検証します。

(a) 箱ひげ図で最大値はひげの右端、最小値はひげの左端の値として表されます。
令和 3 年の総平均時間の最大値は 50 未満で、行動者平均時間の最小値は 50 より大きいですので、この文は正しいといえます。

(b) 箱ひげ図で四分位範囲は箱の横幅として表されます。
平成 28 年の総平均時間の四分位範囲は 8 程度で、行動者平均時間の最小値は 13 程度ですので、この文は正しいといえます。

(c) H は最大値から第 3 四分位数 (箱ひげ図で箱の右端の値) を引いた値ですので、右側のひげの長さとして表されています。
H_1 は 20 程度、H_2 は 8 程度、H_3 は 34 程度、H_4 は 25 程度ですので、$\dfrac{H_2}{H_1}$ は 0.4 程度、$\dfrac{H_4}{H_3}$ は 0.7 程度となり、すなわち $\dfrac{H_2}{H_1} < \dfrac{H_4}{H_3}$ より、この文は誤りといえます。

よってあてはまるものは $_1$<u>(a) 正、(b) 正、(c) 誤</u>となります。

(2) ヌ 行動者平均時間の散布図は図 5 ですので、これで確認します。「通勤・通学」の時間が 60 以下 (60 の線より左) でかつ「移動」の時間が 75 以下 (70 と 80 の中間にある線より下) にきている丸は白丸だけ 4 個ありますので、重複がないことから都道府県の数は$\underline{4}$であることがわかります。

ネ 各データに対して、調査対象者が n_1 人、そのうち回答が 0 分だった人が n_2 人で、総平均時間が t_1 分、行動者平均時間が t_2 分とおきます。このとき得られた時間を合計すると平均の計算方法からその値は $n_1 t_1$ に等しく、また $(n_1 - n_2)t_2$ にも等しくなります。
したがって $t_2 = \dfrac{n_1}{n_1 - n_2} t_1$ となりますので、t_1 が同じ値なら t_2 の値は $\dfrac{n_1}{n_1 - n_2}$ が大きいほど大きくなります。
$\dfrac{n_1}{n_1 - n_2} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{n_2}{n_1}}$ であるので $1 - \dfrac{n_2}{n_1}$ が小さいほど、すなわち $\dfrac{n_2}{n_1}$ が大きいほど行動者平均時間が大きくなることがわかります。
ここから $_0$<u>点 A では「通勤・通学」の時間が 0 である人数の割合が他 3 つより大きい</u>ということが導かれます。

ノ 相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで求められます。すなわち求める値を r とおくと $r = \dfrac{64.4}{11.8 \times 7.9}$ がその値となります。
$11.8 < 12, 7.9 < 8$ を利用すると $r > \dfrac{64.4}{12 \times 8} = \dfrac{64.4}{96}$ と、大体 $\dfrac{2}{3}$ 程度となりますので、選択肢であてはまるものは $_4\underline{0.69}$といえます。
(実際に計算すると $\dfrac{64.4}{11.8 \times 7.9} = 0.69 + 0.01 \times \dfrac{7.82}{11.8 \times 7.9}$ となり、概算があっていることが確認できます)

第３問

(1)ア, イ　2 人であいこが出る場合は「2 人ともグー」「2 人ともチョキ」「2 人ともパー」の場合です。いずれも互いに排反ですので確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\underline{\dfrac{1}{3}}$ となります。

ウ, エ　2 回目で優勝者が決まる場合は 1 回目であいこになり、2 回目であいこにならない場合です。したがって確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\underline{\dfrac{2}{9}}$ となります。

オ〜キ　3 回目で優勝者が決まる場合は 1 回目と 2 回目であいこになり、3 回目であいこにならない場合ですので、確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\underline{\dfrac{2}{27}}$ となります。

(2)ク, ケ　1 回目で優勝者が決まる場合は、3 人で 2 種類の手を出しており、かつそのうち勝つ側の手を出しているのが 1 人である場合に限られます。(すなわち「1 人がグーで 2 人がチョキ」「1 人がチョキで 2 人がパー」「1 人がパーで 2 人がグー」のいずれか)
これらから、確率は $3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\underline{\dfrac{1}{3}}$ となります。

コ, サ　1 回目であいこになる場合は、3 人が同じ手をだすか、3 人が異なる手を出すかのいずれかになります。
これらから、確率は $3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\underline{\dfrac{1}{3}}$ となります。

シ, ス　1 回目で 2 人が残る場合は優勝者が決まらず、かつあいこにならない場合ですので、その確率は $1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}$ です。
2 回目で 2 人から優勝者が決まる確率は (1)(i) で計算した $\dfrac{2}{3}$ ですので、求める確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\underline{\dfrac{2}{9}}$ となります。
ここから人数の推移が $3\to3\to1$ となる確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$ であること、2 回目で優勝者が決まる確率が $\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{3}$ であることがわかります。

セ〜タ　3 回目で優勝者が決まる場合、1 回目であいこになりその次から数えて 2 回目で優勝者が決まるか、1 回目で 2 人が残りその次から数えて 2 回目で優勝者が決まるかになります。
これより、求める確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}=\underline{\dfrac{5}{27}}$ となります。

(3)　チ　2 回目を 2 人で行う場合、3 回目に進むにはあいこである必要があります。このとき 3 回目は 3 人で行いますので、$(2,2)$ は起こりえませんが $(2,3)$ は起こりえます。
2 回目を 3 人で行う場合、1 回目で負けた人はいませんので残った人数により $(3,2)$ も $(3,3)$ も起こりえます。
よって正しいものは $_9$<u>$(2,3)$ と $(3,2)$ と $(3,3)$ だけ</u>となります。

ツ〜ナ　ルール 1 とルール 2 では 2 回目を 2 人で行ってそれがあいこになった場合のみ違いが生じますので、この確率の差を計算します。
ルール 1 では 1 回目で 2 人残り、2 回目であいこになり、3 回目で勝負が決まると優勝者が決まりますので、その確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{27}$ です。
ルール 2 では 1 回目で 2 人残り、2 回目であいこになり、3 回目で勝者が 1 人になると優勝者が決まりますので、その確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$ です。
したがって確率の差は $\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{27}$ ですので、ルール 1 はルール 2 より $\underline{\dfrac{1}{27}}$ だけ優勝者が決まる確率が $_0$<u>大きく</u>なります。

第４問

(1)

ア〜ウ $702=2\cdot351=2\cdot3\cdot117=2\cdot3^2\cdot39=\underline{2\cdot3^3\cdot13}$ とできます。

エオ 702 が上記のように素因数分解できることから、702 の正の約数は $2^a3^b17^c$ の形式です。
$a=0,1$、$b=0,1,2,3$、$c=0,1$ から任意に選べますので、すなわち約数の個数は $2\cdot4\cdot2=\underline{16}$ 個となります。

(2)

カ〜ク $9x-23y=9(x-3y)+4y=4\{2(x-3y)+y\}+(x-3y)=4(2x-5y)+(x-3y)$ とできます。
そこで $x-3y=1, 2x-5y=0$ を考えると $2x-5y=2(x-3y)+y=y+2$ なので $y=-2$ となり、$x=-5$ が得られます。
$9(x+23)-23(y+9)=9x-23y$ であることを利用すると $9\cdot(-5+23)-23\cdot(-2+9)=1$ がわかりますので、9 と 23 が互いに素であることから、整数回のうち x が正で最小であるものは$\underline{x=18, y=7}$ とわかります。

(3) ケ (A) から n は 9 の倍数なので $n=9m$ と表されます。ここで m と 78 が 2 以上の公約数 d をもっているとすると、$9d$ は n と 702 の公約数であり、9 より大きいので 9 が最大公約数でなくなります。
なのであてはまる条件は $_2$$\underline{m\text{ と }78\text{ の最大公約数は }1}$となります。

コ〜シ x, y が $9x=23y+6$ をみたすならば、k を整数として $9(x+23k)=23(y+9k)+6$ が成り立ちます。なのですべての整数解は k を整数として$\underline{x=16\cdot6+23k, y=7\cdot9k}$と表せます。

ス〜ソ $18\cdot6=108=23\cdot4+16$ なので、$k=-4$ から検証すると、$m=16,39,62,85\cdots$ となります。
$m=16,39,62$ は 78 と 2 以上の公約数をもちますので、最小の m は 85 です。したがってそのときの n の値は $85\cdot9=\underline{765}$ となります。

(4) タ それぞれ検証しましょう。

(a) (3) と同様に $9m=23y+4$ から考えると $m=16\cdot4+23k=64+23k$ とできます。
$k=-2$ から考えると $m=18,41,\cdots$ となりますので、$m=41$ の値 $9\cdot41=369$ が条件をみたす値となります。したがってれは正しいといえます。

(b) 24 で割った余りが 7 であるとすると、その値は整数 k を用いて $2k+7$ と表せます。
$24k+7=3\cdot(8k+2)+1$ よりこの値は 3 で割り切れませんので、$3^2(=9)$ でも割り切れません。すなわち 24 で割った余りが 7 ならば 9 を約数にもたないことがわかります。したがって 702 との最大公約数は 9 になりませんので、これは誤りといえます。

(c) 24 で割った余りが 6 であるとすると、その値は整数 k を用いて $24k+6=6\cdot(4k+1)$ とおけます。そのためその値はつねに 6 の倍数となります。したがってこれが 9 を約数にもつならばその値は 6 と 9 の最小公倍数である 18 を約数にもちます。よって 702 との最大公約数は 18 以上になりますので、これは誤りといえます。

よってあてはまるものは $_3$<u>(a) 真、(b) 偽、(c) 偽</u>となります。

第５問

(1)　ア　直線 AD は線分 AD を辺とする多角形を含む平面に含まれます。したがってこの考えから直線 AD は $_2$平面 ACFD上にくることがわかります。

イ　同様に考えて、直線 BE は $_3$平面 BCFE上にくることがわかります。

(2)　ウ　4 点 A,B,E,D が同一円周上にくることから $\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PED}, \angle\mathrm{PBA} = \angle\mathrm{PDE}$ がわかります。これより三角形 PAB と PED が相似だとわかり、その比は $\mathrm{AB} : \mathrm{ED} = 3 : 9 = \underline{1 : 3}$ となります。

エオ　相似比から $\mathrm{PE} : \mathrm{PA} = 3 : 1$ より $\mathrm{PE} = 3\mathrm{PA}$ であり、また $\mathrm{PE} = \mathrm{PB} + \mathrm{BE}$ ですので$\underline{3\mathrm{PA} = \mathrm{PB} + 11}$がわかります。

カ　同様に $\mathrm{PD} = 3\mathrm{PB} = \mathrm{PA} + \mathrm{AD}$ より$\underline{3\mathrm{PB} = \mathrm{PA} + 7}$がわかります。

キ, ク　上記 2 式を PA, PB の連立方程式として解くことで$\underline{\mathrm{PA} = 5, \mathrm{PB} = 4}$がわかります。

ケ　平面 BCFE と球面 S の共通部分も円になりますので、四角形 BCFE は円に内接する四角形となります。したがって方べきの定理により $\mathrm{PC} \cdot \mathrm{PF} = \mathrm{PB} \cdot \mathrm{PE}$ が成り立ちます。
これより $\mathrm{PC} \cdot (\mathrm{PC} + 17) = 4 \cdot (4 + 11)$ より $\mathrm{PC}^2 + 17\mathrm{PC} - 60 = 0$ となり、
因数分解で $(\mathrm{PC} + 20)(\mathrm{PC} - 3) = 0$ が成り立ちます。
$\mathrm{PC} > 0$ ですので、$\underline{\mathrm{PC} = 3}$であることがわかります。

コサ　同様にして三角形 PBC と PFE が相似であることがわかり、その相似比は $\mathrm{PC} : \mathrm{PE} = 3 : 15 = 1 : 5$ であるので、$\mathrm{EF} = 5\mathrm{BC} = \underline{15}$ がわかります。

シス　三角形 PCA と PDF が相似であり比が $\mathrm{PC} : \mathrm{PD} = 3 : 12 = 1 : 4$ ですので、$\mathrm{DF} = 4\mathrm{AC} = \underline{12}$ がわかります。

セ　三角形 PDE において $\mathrm{PD}^2 + \mathrm{DE}^2 = 12^2 + 9^2 = 225$、$\mathrm{PE}^2 = 225$ ですので $\angle\mathrm{PDE}$ は直角です。
三角形 PDF において $\mathrm{PD}^2 + \mathrm{DF}^2 = 12^2 + 12^2 = 288$、$\mathrm{PF}^2 = 20^2 = 400$ ですので、$\angle\mathrm{ADF}$ は鈍角です。
三角形 DEF において $\mathrm{DE}^2 + \mathrm{DF}^2 = 9^2 + 12^2 = 225$、$\mathrm{EF}^2 = 225$ ですので $\angle\mathrm{EDF}$ は直角です。
ここからまず直線 DE と平面 ACFD が垂直であることがわかります。
次にここから平面 ABED と平面 DEF のなす角が $\angle\mathrm{ADE}$ に等しいことがわかりますので、これらは垂直ではないことがわかります。
また直線 AC は平面 ACFD に含まれること、平面 ACFD が直線 DE に垂直なことから直線 AC と DE は (ねじれの位置にくるが) 垂直であることがわかります。
これらより、あてはまるものは $_4$(a) 偽、(b) 真、(c) 真とわかります。

所感

基本的な問題と応用が問われる問題がちょうどよい配分で置かれているようです。共通問題がはまりやすいので、時間配分は意識しましょう。

第 1 問

[1]

数と式に関する問題です。少し難しい因数分解があるように見えますが解答欄から逆算するのも有効です。最後の問題は早合点して重解の可能性を見落とさないようにしましょう。

[2]

三角比の正弦や余弦を利用した問題です。下手に図形的性質を考えたらはまりますので、式変形をもとに解き進めましょう。

第 2 問

[1]

二次関数へのモデル化を利用した問題です。この解説では愚直に通る点を利用して係数を連立方程式の解として導いていますが、工夫するといろいろ速くできそうです。

[2]

データの分析に関する問題です。面倒な計算がありますが、読解面は素直にできると思います。

第 3 問

場合の数と確率に関する問題です。前に計算したものをうまく利用することが肝要です。

第 4 問

整数の性質に関する問題です。今回は桁数も控え目なので解きやすい部類です。

第 5 問

立体図形と平面幾何に関する問題です。問題文で解き進める方針が示されていますので、高得点をとりやすいと思います。