解答

第１問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ	**6,3,2**	**2**
エ	**2**	**3**
オ, カ, キク	**2,5,18**	**3**
ケ, コサ, シス	**6,17,18**	**3**
セ	**6**	**1**
ソタ, チツ	**11,18**	**3**

第２問 (15)		
解答欄	解答	配点
ア	**3**	**3**
イ	**1**	**2**
ウエオカ	**0402**	**2**
キ, クケ	**3,60**	**2**
コ	**3**	**3**
サシ	**16**	**3**

第３問 (22)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**6,6**	**2**
ウエ	**-1**	**2**
オ, カ	**2,3**	**2**
キ	**0**	**2**
クケ	**-1**	**1**
コ, サ	**0,0**	**1**
シ, ス	**0,1**	**1**
セ	**3**	**2**
ソ, タ	**3,0**	**2**
チ, ツ	**2,0**	**2**
テ, ト	**0,0**	**2**
ナ	**2**	**3**

第４問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア	**0**	**2**
イ, ウ, エ	**1,2,1**	**2**
オ	**3**	**2**
カ	**1**	**2**
キ, クケ	**1,27**	**2**
コ	**0**	**2**
サ	**0**	**4**

第５問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア	**2**	**2**
イ, ウ	**5,5**	**3**
エ, オ, カ, キ	**2,1,1,2**	**3**
ク, ケ	**2,1**	**2**
コ	**2**	**3**
サ, シ	**6,1**	**3**

第６問 (16)		
解答欄	解答	配点
ア	**5**	**1**
イ, ウ	**3,4**	**1**
エ, オ, カ, キ	**3,1,3,9**	**3**
クケ, コ, サ, シ, ス	**-3,5,3,3,3**	**3**
セ	**1**	**2**
ソ	**4**	**2**
タチ	**-1**	**2**
ツテ, トナ, ニ, ヌ, ネ, ノ	**-1,13,2,1,3,2**	**2**

解説

第 1 問

(1) ア $\alpha = \beta$ を θ の式に置き換えると $\theta + \dfrac{\pi}{6} = 2\theta$ となりますので、$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$ が得られます。

イ, ウ $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\theta + \dfrac{\pi}{6} = 2\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ですので、$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \sin\dfrac{\pi}{3} = \underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ がわかります。

エ $\sin\alpha$ の値は C(単位円) を利用すると α の動径と C との交点の y 座標として表されます。
したがって、$\sin\alpha$ と $\sin\beta$ の値が等しいことは ${}_2$<u>P の y 座標と Q の y 座標が等しい</u>と言い換えられます。

オ $\theta \neq \dfrac{\pi}{6}$ ですので $\alpha \neq \beta$ となります。したがって $0 \leq \beta \leq \pi$ の範囲では $\sin\alpha = \sin\beta$ ならば $\beta = \pi - \alpha$
すなわち ${}_2\underline{\alpha + \beta = \pi}$ がわかります。

カ〜ク $\alpha + \beta = \pi$ を θ の式にすると $\theta + \dfrac{\pi}{6} + 2\theta = \pi$ ですので $\underline{\theta = \dfrac{5}{11}\pi}$ がわかります。

ケ $\pi < \beta < 2\pi$ ならば $\sin\alpha = \sin\beta$ が成り立つとき $\alpha = \pi + \phi, \beta = 2\pi - \phi$ とおけるような ϕ が存在することになります。この両辺の和をとることで ${}_6\underline{\alpha + \beta = 3\pi}$ が得られます。

コ〜ス 同様に $\theta + \dfrac{\pi}{6} + 2\theta = 3\pi$ から変形することで $\underline{\theta = \dfrac{17}{18}\pi}$ がわかります。

(2) セ (1) の α, β を利用すると $\alpha = \beta$ ならば $\cos\alpha = \cos\beta$ が成り立ちますので、こちらでも $\underline{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$ が解であることがわかります。

ソ〜ツ $\alpha \neq \beta$ のときは $0 \leq \beta < 2\pi$ より $\alpha = \pi - \phi, \beta = \pi + \phi$ となるような ϕ が存在します。この両辺の和をとることで $\alpha + \beta = 2\pi$ が得られます。
これより $\theta + \dfrac{\pi}{6} + 2\theta = 2\pi$ となり、変形することで $\underline{\theta = \dfrac{11}{18}\pi}$ が得られます。

第２問

(1)　ア　水草 A は 1 日で r 倍になる、としていますので、3 日では r^3 倍になります。したがって $_3\underline{r^3 = 1.32}$が わかります。

イ　常用対数表から 1.32 の常用対数表を探すには数 1.3 の行の列 2 をみます。すると $\log_{10} 1.32 =_1\underline{0.1206}$ がわかります。

ウ〜カ　ここから $\log_{10} r^3 = 0.1206$ がわかります。$\log_{10} r^3 = 3\log_{10} r$ より $3\log_{10} r = 0.1206$ ですので $\log_{10} r = \dfrac{0.1206}{3} = \underline{0.0402}$ が得られます。

(2)　キ　r は 1 日での増加比率 (1 日で r 倍) でしたので、14 日たつと a%の $_3\underline{r^{14}}$倍となります。

クケ　a%の r^{14} 倍を 60%にしたいですので $a \times r^{14} = \underline{60}$ が成り立ちます。

コ　常用対数をとると $\log_{10}(a \times r^{14}) = \log_{10} 60$ であり、それぞれの両辺を整理すると
$\log_{10} a + 14\log_{10} r = 1 + \log_{10} 6$ です。
これより $\log_{10} a = 1 + 0.7782 - 14 \times 0.0402 =_3\underline{1.2154}$がわかります。

サシ　常用対数表で $\log_{10} 1.60 = 0.2041$、$\log_{10} 1.70 = 0.2304$ ですので、$1+\log_{10} 1.6 < \log_{10} a < 1+\log_{10} 1.70$ がわかります。
したがって $\log_{10} 16 < \log_{10} a < \log_{10} 17$ より $16 < a < 17$ がわかりますので、a 以下の最大の整数は $\underline{16}$となります。

第３問

(1)

ア, イ x^3, x^2 の x としての導関数はそれぞれ $3x^2, 2x$ ですので、$f(x) = 2\cdot(3x^2) + 3\cdot(2x) = \underline{6x^2+6x}$ となります。

ウエ $f(x) = 6x(x+1)$ と変形できますので、この値が正から負に変わる$\underline{x=-1}$で $F(x)$ は極大値をとります。

オ, カ $G(x)$ の導関数は $F(x)$ の導関数でもありますので、$G(x)$ と $F(x)$ の差は定数になります。したがって x による部分は変わりませんので、C を積分定数として$\underline{G(x) = 2x^3+3x^2+C}$となります。

キ $G(x)$ の導関数が $F(x)$ の導関数と一致することから、極小値をとる x も等しくなります。すなわち $G(x)$ は$\underline{x=0}$で極小値をとります。

ク 同様に $G(x)$ は $x=-1$ で極大値をとることがわかりますので、$G(-1)=0$ がわかります。
$G(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 + C = -2+3+C = C+1$ ですので、$\underline{C=-1}$が得られます。

(2) コ $F(x)$ が $x=0$ で極小値をとることから、$\underline{f(0)=0}$がわかります。

サ 極小値をとる前後では、導関数 $f(x)$ の符号は $_0$<u>負から正に変わります</u>。

シ $G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることから、$\underline{f(k)=0}$がわかります。

ス 極大値をとる前後では、導関数 $f(x)$ の符号は $_1$<u>正から負に変わります</u>。

セ 極小値が 0 であること、極大値をとる x が極小値をとる x より大きいこと、また $f(x)$ が 2 次関数なので $f(x)=0$ となる x は $x=0,k$ に限られることから、<u>選択肢 3</u>のグラフがあてはまります。

(3)ソ, タ $F(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから、$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x f(t)dt$ が成り立ちます。
$F(0)=0$ も条件でしたので、$\alpha=0$ とすることで $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ であることがわかります (ソ:$_3\underline{x}$、タ:$_0\underline{0}$)。

チ, ツ $F(x)$ の極大値は $F(k)$ ですので、$\int_0^k f(t)dt$ と表せます (チ:$_2\underline{k}$、ツ:$_0\underline{0}$)。

テ, ト $F(x)$ が $x=0$ で極小、$x=k$ で極大となりますので、$0 \leq x \leq k$ において $f(x) \geq 0$ となります。
$f(0) = f(k) = 0$ ですので $F(x)$ の極大値は $_0\underline{y=f(x)}$のグラフと x 軸で囲まれた部分の $_0$<u>面積</u>に等しいです。

ナ 同様に考えると $G(x) - G(\alpha) = \int_\alpha^x f(t)dt$ であり $G(k)=0$ より $G(x) = \int_k^x f(t)dt$ がわかります。
したがって $G(0) = \int_k^0 f(t)dt = -\int_0^k f(t)dt = -F(k)$ がわかります。すなわち $F(k) = -G(0)$ ですので、$F(x)$ の極大値は $_2$<u>$G(x)$ の極小値の -1 倍</u>に等しいことがわかります。

第４問

(1) ア 底面とその対面が一辺の長さ x の正方形、残り 4 辺が高さ y に等しい長さの辺ですので、$8x + 4y = 4$ より ${}_0\underline{2x + y = 1}$がわかります。

イ, ウ $y = 1 - 2x$ と変形でき、$y > 0$ より $1 - 2x > 0$ がわかります。これより $x < \dfrac{1}{2}$ であり、$0 < x$ とあわせて $0 < x < \underline{\dfrac{1}{2}}$ がわかります。

エ $x = \dfrac{1-y}{2}$ と変形できることから $\dfrac{1-y}{2} > 0$ ですので、$y < 1$ がわかり、$0 < y$ とあわせて $0 < y < \underline{1}$ がわかります。

オ 直方体の体積は頂点を共有する 3 辺の長さの積であらわされますので $V = x^2y$ です。
x のみで表したい場合 y を x の式で表せばよいので、$y = 1 - 2x$ を代入して $V = x^2(1 - 2x)$ より ${}_3\underline{V = -2x^3 + x^2}$となります。

カ y のみで表したい場合は $x = \dfrac{1-y}{2}$ を代入して $V = \left(\dfrac{1-y}{2}\right)^2 y$ より ${}_1\underline{V = \dfrac{1}{4}y^3 - \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{4}y}$となります。

キ〜ケ x の式を使った場合は x の微分を利用して $\dfrac{dV}{dx} = -6x^2 + 2x = -2x(3x - 1)$ から考えます。
これより V は $x = 0$ で極小、$x = \dfrac{1}{3}$ で極大となりますので、V は $x = \dfrac{1}{3}$ で最大となります。
y の式を使った場合は $\dfrac{dV}{dy} = \dfrac{3}{4}y^2 - \dfrac{4}{4}y + \dfrac{1}{4} = \dfrac{(3y-1)(y-1)}{4}$ より V は $y = \dfrac{1}{3}$ で極大、$y = 1$ で極小となることがわかります。
いずれの場合も $x = y = \dfrac{1}{3}$ のときに最大となることがわかりますので、V の最大値は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{3} = \underline{\dfrac{1}{27}}$ です。

コ この直方体は頂点を共有する 3 辺の長さがすべて $\dfrac{1}{3}$ で等しいですので、${}_0$<u>立方体</u>になります。

(2) サ それぞれ検証します。

(a) 表面積が 1 である場合、底面 2 面の面積は x^2、残り 4 面の面積は xy と表せますので、条件は $2x^2 + 4xy = 1$ となります。
このとき $xy = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}x^2$ と変形できますので、$V = x^2y = x \cdot (xy) = x \cdot \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}x^2\right) = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{4}x$ となり、すなわち x の 3 次関数にできます。

(b) 対角線の長さが 1 である場合、$x^2 + x^2 + y^2 = 1^2$ が成り立つことから条件は $2x^2 + y^2 = 1$ となります。
$x^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}y^2$ と変形することで $V = x^2y = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}y^2\right) \cdot y = -\dfrac{1}{2}y^3 + \dfrac{1}{2}y$ となり、すなわち y の 3 次関数にできます。

したがってあてはまるものは ${}_0$<u>(a):できる、(b):できる</u>となります。
(ちなみに計算する必要はないが、(a) は $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ の立方体、(b) は $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の立方体が最大となる)

第５問

(1) ア 直線の傾きは x 軸からみた直線とのなす角の正接とみることができます。いま $\angle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{CAB} = \frac{\theta}{2}$ ですので、$_{2}\underline{m = \tan\frac{\theta}{2}}$がわかります。

イ 直線 BP は三角形 ABC の頂点 B における外角を二等分しますので、直線 BP と x 軸正方向とのなす角は $\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$ です。したがって直線 BP の傾きは $_{5}\underline{\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$となります。

ウ 加法定理の等式 $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ に $\alpha = \frac{\theta}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}$ を代入すると $\tan\frac{\theta}{2} = m, \tan\frac{\pi}{4} = 1$ であることから直線 BP の傾きは $\frac{1+m}{1-m}$ であることがわかります。

直線 BP は点 $(1,0)$ を通りますので、その式は $_{5}\underline{y = \frac{m+1}{1-m}(x-1)}$となります。

エ, オ $m = \frac{y}{x+1}$ を代入すると $\frac{m+1}{1-m} = \frac{\frac{y}{x+1}+1}{1-\frac{y}{x+1}} = \frac{y+x+1}{x+1-y}$ より②は $y = \frac{y+x+1}{x+1-y}(x-1)$ となりますので、分母をはらい $y(x+1-y) = (y+x+1)(x-1)$ となります。

展開して $xy + y - y^2 = x^2 - 1 + xy - y$ となりますので、整理して$\underline{x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0}$となります。

カ, キ 平方完成を利用して整理すると $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 1$ より $x^2 + (y-1)^2 = 2$ となりますので、この方程式が表す図形は中心が$\underline{(0,1)}$、半径が$\underline{\sqrt{2}}$の円になります。

ク m の値は $\tan\frac{\theta}{2}$ であり、$0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ ですので $\tan 0 < m < \tan\frac{\pi}{4}$ すなわち $_{2}\underline{0 < m < 1}$がわかります。

ケ 直線 AP の式から $n = \frac{y}{x+1}$ でしたのですなわち $0 < \frac{y}{x+1} < 1$ です。

直線 AP が x 軸に垂直にならないことから $x \neq -1$ がわかり、また $x < -1$ ならばこの式は $-1 < y < 0$ となり $y > 0$ の部分にこないことから $x > -1$ が成り立ち、したがって $_{1}\underline{0 < y < x+1}$が得られます。

コ 得られる図形は $y = 0$ の上にきて $y = x + 1$ の下にくる領域にきますので、<u>選択肢 2</u>の図があてはまります。

(2) サ E の中心が S 上にきて線分 AB が S の直径であることから E における弧 AB の中心角は $\frac{\pi}{2}$ となります。

$\angle\mathrm{APB}$ は E における弧 AB の円周角ですので、$\angle\mathrm{APB} = \frac{\pi}{4}$ がわかります。

これより三角形 ABP の B における外角は $\angle\mathrm{PAB} + \frac{\pi}{4}$ となります。

したがって直線 BQ と x 軸とのなす角は $\frac{1}{2}\cdot\left(\angle\mathrm{PAB} + \frac{\pi}{4}\right) = \angle\mathrm{QAB} + \frac{\pi}{8}$ となり、傾きは $\tan\left(\angle\mathrm{QAB} + \frac{\pi}{8}\right)$ であることがわかります。

(1) と同様に $\tan\angle\mathrm{QAB} = m'$ を利用すると直線 BQ の傾きは $_{6}\underline{\frac{m' + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - m'\tan\frac{\pi}{8}}}$であることがわかります。

シ m' は直線 AQ の傾きですので、すなわち $_{1}\underline{m' = \frac{y}{x+1}}$です。

第６問

(1)　ア　$x^4+(10x^2+25)=(x^2)^2+2\cdot5\cdot x^2+5^2=\underline{(x^2+5)^2}$ と変形できます。

イ, ウ　$-x^2-24x-9+(10x^2+25)=9x^2-24x+16=\underline{(3x-4)^2}$ と変形できます。

エ〜キ　$(x^2+5)^2-(3x-4)^2=\{(x^2+5)+(3x-4)\}\{(x^2+5)-(3x-4)\}$ と変形することで、方程式は $\underline{(x^2+3x+1)(x^2-3x+9)=0}$ と変形できます。

ク〜ス　$x^2+3x+1=0$ は $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$ とできるのでこの解は $\underline{x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}}$ であることがわかり、
$x^2-3x+9=0$ は $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{27}{4}$ とできるので $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ よりこの解は $\underline{x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$ であることがわかります。

(2)　セ　$(x^2+t)^2=x^4+2tx^2+t^2$ なので、左辺に加える式は ${}_{1}\underline{2tx^2+t^2}$ となります。

ソ　$3x^2-4x+3+(2tx^2+t^2)=(3+2t)x^2-4x+(3+t^2)$ よりこの式は x で 1 次以上 2 次以下ですので、これが $(\alpha x+\beta)^2$ の形にできるならば方程式 $(3+2t)x^2-4x+(3+t^2)=0$ は $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ の ${}_{4}$<u>重解</u>をもつことが必要です。

タチ　方程式が重解をもつならば判別式より $4^2-4\cdot(3+2t)(3+t^2)=0$ が必要です。
整理すると $2t^3+3t^2+6t+5=0$ となり、$2t^3+3t^2+6t+5=(t+1)(2t^2+t+5)$ より $\underline{t=-1}$ のときに成り立つことがわかります。

ツ〜ノ　$t=-1$ を代入すると $(3+2t)x^2-4x+(3+t^2)=x^2-4x+4=(x-2)^2$ となりますので、方程式は $(x^2-1)^2=(x-2)^2$ となり、これより $\{(x^2-1)+(x-2)\}\{(x^2-1)-(x-2)\}=0$、さらに $(x^2+x-3)(x^2-x+1)=0$ とできます。
$x^2+x-3=0$ を解くことで解 $\underline{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}}$、$x^2-x+1=0$ を解くことで解 $\underline{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ が得られます。

所感

マークの手間を無視すれば解きやすい問題がそろっています。

第 1 問

三角関数の問題です。関数の増減をイメージすればうまくいくはずです。

第 2 問

指数対数関数の問題です。表の読み方や範囲の評価がわかってれば問題ないでしょう。

第 3 問

関数の微積分に関する問題です。微分の基本的な理解、積分との関係をおさえていけば最後までいけます。

第 4 問

式変形と微分を利用した問題です。(2) では x の式や y の式まで変形する必要がないことに気づきたいです。

第 5 問

図形と式に三角関数を取り入れた問題です。平面幾何の知識も取り入れて挑みましょう。

第 6 問

複素数に関する問題です。解き方は示されているので楽ですが、解答の記入だけは大変です。