

解答

第1問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	2,8	2
ウ, エ, オ, カ	2,5,3,2	3
キ, ク	6,4	2
ケ	1	3
コ	2	2
サ, シ, ス	3,5,9	2
セ, ソ, タ	0,6,7	2
チ	2	2
ツ	6	2

第2問 (30)		
解答欄	解答	配点
アイ, ウ, エ	11,4,3	3
オ	6	2
カ, キ, ク, ケ	3,2,2,3	3
コ	3	2
サ, シ	2,4	2
ス	8	2
セ, ソ	1,0	2
タ	2	3
チ, ツ	2,2	3
テ, ト	1,1	3
ナニ, ヌ	14,4	2
ネノ	14	3

第3問 (30)		
解答欄	解答	配点
アイ, ウエ	-3,-7	2
オ	2	3
カ, キ, ク, ケ	6,3,6,5	3
コ, サ	1,5	3
シ, ス	5,7	4
セ	1	2
ソ, タ, チ, ツ	4,5,8,5	3
テ, ト	9,5	2@a
ナニ, ヌネ	81,25	3@a
ノ	0	1#a
ハ, ヒ, フ	1,4,0	4

第4問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア	0	2
イ	4	2
ウ	3	2
エ	4	2
オ	4	3@b
カ	0	2#b
キ	4	3
ク, ケ, コ, サ	4,3,0,0	4

注

- 「解答欄」で同じ場所にまとまって入っている解答はすべて正解した場合のみ得点できます。
(上記の場合、第1問はアに2、イに8を入れた場合のみ2点が加わる)
- 配点に#とアルファベットのついたものを得点するためには、配点欄に同じアルファベットと@が付いている問題をすべて正解していることが必要です。
(上記の場合、第3問でテに8、ノに0を入れた場合、テトが誤答となるためノの得点も入らない)

解説

第1問

[1]

(1)

ア, イ $a = 1$ とすると①は $4bx^2 + 16x - b - 8 = 0$ より $(4x^2 - 1)b + 16x - 8 = 0$ と変形できます。
 $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x + 1)(2x - 1)$ であり $16x - 8 = 8(2x - 1)$ ですので、さらに
 $(2x - 1)(2bx + b + 8) = 0$ と変形できます。

(2)

ウ～カ $b = 2$ のとき①の左辺は $(2a + 6)x^2 + (5a + 11)x - 10$ となります。

a の降べき順に書き換えると $(2x^2 + 5x)a + (6x^2 + 11x - 10)$ と変形できます。

$6x^2 + 11x - 10 = (2x + 5)(3x - 2)$ と変形できますので

$(2x^2 + 5x)a + (6x^2 + 11x - 10) = (2x + 5) \cdot ax + (2x + 5)(3x - 2) = \underline{(2x + 5)\{(a + 3)x - 2\}}$ がわかります。

キ, ク このとき①の解は $a \neq -3$ ならば $x = -\frac{5}{2}, \frac{2}{a+3}$ となります。

$a = 2\sqrt{2}$ ならば $\frac{2}{a+3} = \frac{2}{3+2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{3^2-2 \cdot 2^2} = \underline{6-4\sqrt{2}}$ となりますので、
これが①の解になります。

ケ $a = -3$ であれば①は $-4x - 10 = 0$ と変形できますので、解は $x = -\frac{5}{2}$ のみとなります。なので十分条件といえます。

一方、 $\frac{2}{a+3} = -\frac{5}{2}$ となる場合を考えると $a = -\frac{19}{5}$ があげられます。このとき①の解は $x = -\frac{5}{2}$ だけとなります。

(実際、①は $-\frac{8}{5}x^2 - 8x - 10 = 0$ より $-\frac{2}{5}(2x+5)^2 = 0$ となります)

なので反例があることから必要条件でないことがわかります。

したがって、あてはまるものは 1 十分条件であるが必要条件ではない となります。

[2]

- (1) コ $A \cap B$ は A と B の両方に属する要素の集合ですので、 A と B の両方に囲まれた部分が該当します。
また \bar{A} は A に属さない要素の集合ですので、 $\bar{A} \cap \bar{B}$ は A にも B にも囲まれない部分が該当します。
さらに $X \cup Y$ は X と Y 少なくとも一方に属する要素の集合ですので、 $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ は 選択肢 2 の図 で表せることがわかります。

(2)

サ～ス P と Q の両方に属する要素を探すことで $P \cap Q = \{3, 5, 9\}$ がわかります。

セ～タ P にも Q にも属さない要素を探すことで $\bar{P} \cap \bar{Q} = \{0, 6, 7\}$ がわかります。

なお、ド・モルガンの法則を用いて $P \cup Q$ を求めてからそれに属さない要素を探すことでも求められます。

チ $(A \cap B) \subseteq A, (\bar{A} \cap \bar{B}) \subseteq \bar{A}$ であり、 A と \bar{A} には共通の要素がありませんので、 $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ が全体に等しいならば $(A \cap B) = A, (\bar{A} \cap \bar{B}) = \bar{A}$ でなければなりません。

したがって A の要素であるものは B の要素であり、さらに A の要素でないものは B の要素ではないことが必要なので、 $B = A =_2 \{1, 4, 5, 7\}$ となります。

ツ $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ が空集合であるならば、 A の要素であるものは B の要素ではなく、 A の要素でないものは B の要素であることが必要です。

したがって $B = \bar{A} =_6 \{0, 2, 3, 6, 8, 9\}$ となります。

第2問

[1]

(1) アイ 辺 AD と BC が平行であり、線分 AP と DQ は辺 BC に垂直になるようにとっていますので、四角形 APQD は長方形になります。

また、正接 (tan) の値が正であることから $\angle ABC, \angle BCD$ はいずれも鋭角です。

したがって P, Q は辺 BC の内部にくることがわかり、 $BC = 1$ であるので、 $BC = BP + PQ + QC$ より $BP + CQ = BC - PQ = 12 - 1 = 11$ がわかります。

ウ, エ 三角形 ABP が P を直角とする三角形ですので、 $\tan \angle ABC = \frac{AP}{BP}$ が成り立ちます。

したがって $BP = \frac{AP}{\tan \angle ABC} = \frac{4}{3}AP$ がわかります。

オ 三角形 DCQ に着目すると $\tan \angle BCD = \frac{DQ}{CQ}$ より $CQ = \frac{DQ}{\tan \angle BCD} = \frac{1}{2}AP$ が成り立ちます。

したがって $BP + CQ = \frac{4}{3}AP + \frac{1}{2}AP = \frac{11}{6}AP$ より $\frac{11}{6}AP = 11$ ですので、 $AP = 6$ がわかります。

(2)

カ, キ 三角形 ACP が P を直角とする三角形になりますので、

$\tan \angle BCR = \tan \angle BCA = \frac{AP}{CP} = \frac{AP}{CQ + PQ} = \frac{6}{\frac{1}{2} \cdot 6 + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ と計算できます。

ク, ケ 同様に三角形 DBQ に着目すると $\tan \angle CBR = \frac{DQ}{BQ} = \frac{AP}{BP + PQ} = \frac{6}{\frac{4}{3} \cdot 6 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ がわかります。

コ これより $\tan \angle BCR = \frac{1}{\tan \angle CBR}$ が成り立っていることがわかりました。

$\angle BCR, \angle CBR$ はいずれも鋭角であるため、ここから $\angle BCR = 90^\circ - \angle CBR$ すなわち $\angle BCR + \angle CBR = 90^\circ$ がわかります。

よって $\angle BRC = 180^\circ - (\angle BCR + \angle CBR) = 90^\circ$ ですので、 $\angle BRC$ の大きさは 90° に等しいことがわかります。

[2]

(1) サ 三角形 OAH は H が直角の三角形ですので $AH = AO \sin \alpha$ すなわち $AH = 2 \sin \alpha$ がわかります。

シ さらに計算して $PH = 4 \sin \alpha$ がわかります。

ス 三角形 O'BH' は H' を直角とする三角形ですので $BH' = BO' \sin \beta = 4 \sin \beta$ となり、
すなわち $PB = 8 \sin \beta$ がわかります。

セ, ソ 三角形 PAB に正弦定理を適用すると $\frac{PA}{\sin \angle PBA} = \frac{PB}{\sin \angle PAB} = 2R_1$ ですので、すなわち
 $\frac{PA}{\sin \beta} = \frac{PB}{\sin \alpha} = 2R_1$ がわかります。

タ 上記の式を変形することで $PA \sin \alpha = PB \sin \beta$ が成り立ちますので、さらに代入すると
 $(4 \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = (8 \sin \beta) \cdot \sin \beta$ となり、すなわち $4 \sin^2 \alpha = 8 \sin^2 \beta$ より $\sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \beta$ です。
 α, β は 0° より大きく 180° より小さいため $\sin \alpha, \sin \beta$ はいずれも正となることから、
 $\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$ がわかります。

チ, ツ $\frac{PA}{\sin \beta} = 2R_1$ に代入することで $\frac{4 \sin \alpha}{\sin \beta} = 2R_1$ となります。

さらに $\frac{4 \cdot \sqrt{2} \sin \beta}{\sin \beta} = 2R_1$ とできますので、 $R_1 = 2\sqrt{2}$ がわかります。

(2) テ $\angle QAB = \gamma, \angle QBA = \delta$ とおくと、前問の α を γ に、 β を δ に置き換えた式がそのまま使えることがわ
かります。したがって $\frac{QA}{\sin \delta} = 2R_2$ より $2R_2 = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \sin \delta}{\sin \delta}$ となりますので、 $R_1 = R_2$ がわかります。

ト 三角形 APB、AQB それぞれにおける正弦定理により $2R_1 = \frac{AB}{\sin \angle APB}, 2R_2 = \frac{AB}{\sin \angle AQB}$ がわかりま
す。

いま $R_1 = R_2$ ですので $\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AB}{\sin \angle AQB}$ が成り立ちますので、 $\sin \angle APB = \sin \angle AQB$ がわか
ります。

(3)

ナ～ヌ 正弦定理から $2R_1 = \frac{AB}{\sin \angle APB}$ ですので、 $\sin \angle APB = \frac{AB}{2R_1} = \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$ がわかります。

ネノ 三角形 APB に余弦定理を適用することで $AB^2 = PB^2 + PA^2 - 2PB \cdot PA \cdot \cos \angle APB$ となります。

いま $\sin \angle APB = \sin \angle AQB$ であるので $\angle APB = 180^\circ - \angle AQB$ です。

$\angle APB < \angle AQB$ より $180^\circ - \angle AQB < \angle AQB$ となるので $\angle AQB > 90^\circ$ がわかり、これより $\angle APB < 90^\circ$
がわかります。

したがって $\cos \angle APB > 0$ なので $\cos^2 \angle APB = 1 - \sin^2 \angle APB = \frac{2}{16}$ より $\cos \angle APB = \frac{\sqrt{2}}{4}$ がわかり
ます。

これより $PB = \sqrt{2}PA$ を代入して $(2\sqrt{7})^2 = 2PA^2 + PA^2 - 2 \cdot (\sqrt{2}PA) \cdot PA \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$ となり、整理すると
 $28 = 2PA^2$ より $PA = \sqrt{14}$ がわかります。

第3問

[1]

(1)

ア～エ 平方完成をすることで $f(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2 \cdot 3x + 20 = 3(x+3)^2 + 20 - 3 \cdot 3^2 = 3(x+3)^2 - 7$ とできま
すので、 $y = f(x)$ のグラフの頂点は $(-3, -7)$ にくることがわかります。

オ $y = f(x)$ のグラフは頂点の y 座標が負である下に凸のグラフですので、 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数
解をもつことがわかります。

また頂点の x 座標が負であり、 y 軸との交点の y 座標は $f(0) = 20 > 0$ ですので、これらより
2 次方程式 $f(x) = 0$ は 異なる 2 つの負の解をもつことがわかります。

(2)

カ～ケ 平行移動により $g(x) = f(x-s) - 5 = 3(x-s)^2 + 18(x-s) + 20 - 5$ が成り立ちます。

展開すると $g(x) = 3x^2 - 6sx + 3s^2 + 18x - 18s + 15$ となりますので、 x でまとめると
 $g(x) = 3x^2 + (18 - 6s)x + 3(s^2 - 6s + 5)$ となります。

コ、サ $g(x) = 0$ が正の解と負の解を 1 つずつもつ条件は、 $g(x)$ が最小値をもつことから $g(0) < 0$ が必要十分
です。

$g(0) = 3(s^2 - 6s + 5) = 3(s-1)(s-5)$ ですので $g(0) < 0$ から $1 < s < 5$ が得られます。

(3)

シ、ス $y = h(x)$ のグラフは頂点が $(t-3, t^2 - 6t - 7)$ である放物線であり、

$h(x) = 3x^2 - 6tx + 3t^2 + 18x - 18t + 20 + t^2 - 6t = 3x^2 + (18 - 6t)x + 4t^2 - 24t + 20$ がわかります。

$h(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつためには y 切片が正、かつ軸の x 座標が正、かつ頂点の y 座標
が負であることが必要十分です。

これを式で表すと $h(0) > 0, 6t - 18 > 0, t^2 - 6t - 7 < 0$ となります。

$h(0) = 4(t^2 - 6t + 5) = 4(t-1)(t-5)$ ですので $h(0) > 0$ から $t < 1$ または $5 < t$ 、 $6t - 18 > 0$ から
 $t > 3$ 、 $t^2 - 6t - 7 = (t+1)(t-7) < 0$ から $-1 < t < 7$ ですので、すべての条件を合わせると求める
範囲は $5 < t < 7$ となります。

[2]

(1) セ C_1 は点 $(0, 1)$ を通りますので仮定した二次関数に代入すると $1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ がわかり、これより $c = 1$ が成り立ちます。

ソ～ツ C_1 は点 $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ と $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通りますので、代入により

$$\frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + 1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 1 = 0 \text{ がわかります。}$$

a, b の連立方程式として解くことで $a = -\frac{4}{5}, b = -\frac{8}{5}$ が得られますので、 C_1 のグラフの式は

$$y = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1 \text{ となります。}$$

(多項式のグラフが点 $(t, 0)$ を通るときその式が $x - t$ で因数分解できることを利用して、

$$y = a \left(x + \frac{5}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ から計算する方法もあります}$$

テ, ト C_1 を表す式を平方完成すると $y = -\frac{4}{5}(x+1)^2 + 1 + \frac{4}{5}$ となりますので、頂点の y 座標は $1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ となります。

ナ～ネ C_1 の頂点は $\left(-1, \frac{9}{5}\right)$ であることがわかりました。 C_3 は C_1 を y 軸で対称移動させた図形に等しい(仮定で通るとする3点が y 軸に関して対称であるため)ですので、 C_3 の頂点は $\left(1, \frac{9}{5}\right)$ です。

C_2 の式を $y = px^2 + qx + r$ とおくと $p + q + r = p - q + r = \frac{9}{5}, \frac{9}{4}p + \frac{3}{2}q + r = 0$ となりますので、連立して解くと $q = 0, p = -\frac{36}{25}, r = \frac{81}{25}$ が得られ、すなわち C_2 の式は $y = -\frac{36}{25}x^2 + \frac{81}{25}$ となります。

これより C_2 の頂点の y 座標は $\frac{81}{25}$ となります。

(y 軸で対称な2点を通ることから頂点の x 座標が0であることを利用して、 $p \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + r = p \cdot 1 + r = \frac{9}{5}$ から p を計算する方法もあります)

ノ 大きな噴水の高さは $\frac{81}{25}$ 、小さな噴水の高さは $\frac{9}{5}$ ですので、大きな噴水の高さを小さな噴水の高さで割ると $\frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{5}} = \frac{9}{5}$ より、大きな噴水の高さは小さな噴水の高さの $\frac{9}{5}$ (= 1.8) 倍となります。
したがって選択肢では 0 およそ 2 倍が適当といえます。

(2)

ハ～フ 新たな仮定で得られる C'_2 の式を $y = p'x^2 + q'x + r'$ とおくと、まず C_1, C_3 の頂点を通ることから $p' + q' + r' = p' - q' + r' = \frac{9}{5}$ がわかります。

$(p' + q' + r') - (p' - q' + r') = 0$ から $q' = 0$ が得られますので、すなわち $y = p'x^2 + r'$ と表せます。
したがって頂点の x 座標は0ですので $r' = 5$ がわかります。

よって $p' = -\frac{16}{5}$ が得られますので、 C'_2 の式は $y = -\frac{16}{5}x^2 + 5$ となります。

点 P'_2 の y 座標は0ですので、 $-\frac{16}{5}x^2 + 5 = 0$ を解くことで P'_2 の x 座標がわかります。

解くと $x = \pm\frac{5}{4}$ であり、 P'_2 の x 座標は正ですので、 $x = \frac{5}{4}$ になることがわかります。

P_2 の x 座標は $\frac{3}{2}$ でしたので、 x 座標の変化は $\frac{5}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$ となり、すなわち $\frac{1}{4}$ だけ 0 P_1 の方にきていることがわかります。

第4問

(1) ア それぞれ検証します。

(a) 外国人宿泊者数が100である線と日本人宿泊者数が2500である線を引いて散布図を4つの領域に分けると、外国人宿泊者数が100を超えていて日本人宿泊者数が2500を超えている部分は右上の領域になります。

この領域にきている点は(200, 3000)付近の点と(680, 5200)付近の点の2つです。

したがって該当する都道府県は2であるので、正しいといえます。

(b) 日本人宿泊者数が外国人宿泊者数の10倍未満である領域は散布図に付加されている傾き10の直線より下にくる領域です。

この領域には点が1つしか存在しないため、割合が50%(実数にして24)未満であるので、正しいといえます。

したがってあてはまるものは 0(a) 正、(b) 正 です。

イ データは47個ありますので、中央値は24番目の値となります。

したがって、第1四分位は1番目から23番目までのデータでの中央値ですので12番目(P12)、第3四分位は25番目から47番目のデータでの中央値ですので36番目(P36)のデータとなります。

これより、四分位範囲は $1251 - 351 = 900$ となります。

ウ 問題文にしたがって外れ値の基準を計算すると $351 - 1.5 \times 900 = -999$ と $1251 + 1.5 \times 900 = 2601$ より、「-999以下」「2601以上」が外れ値となります。これに該当するデータはP45, P46, P47の3つです。

いずれも外国人宿泊者数でも外れ値となっていますので、求める個数は3であることがわかります。

エ 相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで得られます。計算すると

$\frac{11373}{26 \cdot 552} = \frac{11373}{14352}$ であり、 $14352 \times 0.8 = 11481.6$ より0.8に近い値となりますので、0.79が適切といえます。

(実際に計算すると $0.79 + 0.01 \times \frac{3492}{14352}$)

(2) オ 分散は平均との差の2乗の平均なので、 s_z^2 は $(z_i - \bar{z})^2$ ($i = 1, 2, \dots, 47$) の平均です。

$(z_i - \bar{z})^2 = (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 + 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ となります。

$(x_i - \bar{x})^2$ の平均が s_x^2 、 $(y_i - \bar{y})^2$ の平均が s_y^2 、 $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ の平均が s_{xy} ですので、 $4s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy}$ がわかります。

カ 正の相関があることから相関係数が正、すなわち $\frac{s_{xy}}{s_x s_y} > 0$ であることがわかります。

定義から $s_x \geq 0, s_y \geq 0$ ですので、ここから $s_{xy} > 0$ がわかり、すなわち $s_z^2 - (s_x^2 + s_y^2) = 2s_{xy} > 0$ より $s_z^2 > s_x^2 + s_y^2$ がわかります。

キ それぞれ検証します。

(a) 箱ひげ図では令和4年には外れ値が確認できないため、令和元年で外れ値の都道府県も当然外れ値ではありません。ということで誤りといえます。

(b) ある年の z をその前年の z で割った場合、この値が1未満ならば z は前年とくらべて減少していることがわかります。

令和2年の箱ひげ図を見ると外れ値がなく、最大値が1より小さいです。したがってすべての都道府県で前年比が1未満であるため、すなわちすべての z が前年より減少していることがわかります。なので正しいといえます。(前年比の変化を問われているわけではないことに注意)

(c) 令和4年では前年比が1である値は最小値より大きく第1四分位より小さいことから、前年比が1より小さい都道府県は全体の4分の1より少ないです。

一方前年比が1である値は令和3年の箱ひげ図では中央値より大きく第3四分位より小さいので、前年比が1より小さい都道府県は全体の半分より多いです。

よって令和4年の前年比が1より小さい都道府県の数₄は令和3年のその数より小さいので、正しいといえます。

よってあてはまるものは 4(a) 誤、(b) 正、(c) 正となります。

(3)

ク、ケ 実験結果から23枚以上で割合を合計すると(0.0は無視)、 $2.4 + 0.9 + 0.5 + 0.4 + 0.1 = 4.3\%$ であることがわかります。

コ これは35人のうち23人以上が「キャンペーンAの方がよい」と回答する確率と考えることができます。いま得られた確率は5%未満であるので、方針でたてた仮説は 0誤っていると判断できます。

サ 誤っていると判断した仮説は「キャンペーンAの方がよい」と回答する割合と「キャンペーンBの方がよい」と回答する割合が等しい、というものでしたので、2つの割合は無視できない差があるということになります。

いま「キャンペーンAの方がよい」という回答が多いですので、アンケート結果からもキャンペーンAの方がよいと思っている人が 0多いといえます。

所感

基本的な問題と応用が問われる問題がちょうどよい配分で置かれているようです。はまると時間が足りなくなる可能性も高いです。

第1問

[1]

数と式に関する問題です。少し難しい因数分解があるように見えますが解答欄から逆算するのも有効です。最後の問題は早合点して重解の可能性を見落とさないようにしましょう。

[2]

集合に関する問題です。最後は少し思考が必要ですが、要素を2,3個具体的に試していけば解き方を思い浮かべられるかもしれません。

第2問

[1]

三角比の正接を使った問題です。図形としても複雑さがないですので、変な読み間違いをしていなければ平易な問題でしょう。

[2]

正弦や余弦を利用した問題です。下手に図形的性質を考えたらはまりますので、式変形をもとに解き進めましょう。

第3問

[1]

二次関数のグラフ移動を考える問題です。グラフと解の関係を利用して解くことになり、慣れがものをいいそうです。

[2]

二次関数へのモデル化を利用した問題です。この解説では愚直に通る点を利用して係数を連立方程式の解として導いていますが、工夫するといろいろ速くできそうです。

第4問

データの分析の問題です。概算する実力と読解力が点数に直結します。