解答

第１問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	**2**	**1**
イ, ウ	**2,4**	**2**
エ, オ	**a,5**	**3**
カ, キ	**0,8**	**2**
ク, ケ	**1,6**	**2**
コ	**1**	**1**
サ, シ	**1,5**	**2**
ス, セ, ソ	**1,6,1**	**2**
タ	**8**	**2**
チ	**b**	**2**
ツ	**6**	**3**
テ, ト	**0,5**	**3**
ナニヌ	**360**	**2**
ネ	**9**	**3**

第２問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**3,6**	**2**
ウ, エ	**0,6**	**2**
オ, カ	**2,2**	**2**
キ, ク	**5,3**	**2**
ケ, コ	**3,2**	**2**
サシ, ス	**-1,2**	**2**
セ, ソ	**0,1**	**2**
タ, チ	**1,2**	**2**
ツテ, ト	**21,4**	**4**
ナ	**0**	**3**
ニ	**4**	**3**
ヌ	**3**	**4**

第３問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**2,4**	**2**
ウエ, オ, カ, キ	**-1,2,5,2**	**3**
ク	**4**	**2**
ケ, コ, サシ	**2,4,40**	**3**
スセ, ソタ	**-2,-4**	**1**
チ, ツテ	**2,10**	**1**
トナ, ニ	**-1,1**	**4**
ヌ	**3**	**43**

第４問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**1,3**	**2**
ウ	**0**	**2**
エ, オ	**2,4**	**2**
カ	**4**	**2**
キ	**4**	**2**
ク	**3**	**2**
ケ	**4**	**2**
コ, サ, シ	**4,6,4**	**2**
ス, セ	**1,2**	**2**
ソ	**0**	**2**

解説

第 1 問

[1]

(1) ア $\log_a b$ とは $a^t = b$ となるような実数 t の値ですので、$t = \log_3 x$ ならば $3^t = x$ すなわち 2$\underline{x = 3^t}$が成り立ちます。

イ, ウ 代入により $\log_2 x = \log_2(3^t) =$ 2$\underline{t\log_2 3}$がわかり、すなわち 4$\underline{t = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}}$がわかります。

(2)

エ, オ 前の問題で $\log_3 x = \dfrac{1}{\log_2 3}\log_2 x$ が得られましたので

$f(x) = \log_2 x + \dfrac{1}{\log_2 3}\log_2 x = \left(1 + \dfrac{1}{\log_2 3}\right)\log_2 x$ より $A =$ a$\underline{1 + \dfrac{1}{\log_2 3}}$、

$g(x) = (\log_2 x)\cdot\left(\dfrac{1}{\log_2 3}\log_2 x\right) = \dfrac{1}{\log_2 3}(\log_2 x)^2$ より $B =$ 5$\underline{\dfrac{1}{\log_2 3}}$がわかります。

カ, キ $AX > BX^2$ を変形すると $BX\left(X - \dfrac{A}{B}\right) < 0$ となります。

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{1 + \frac{1}{\log_2 3}}{\frac{1}{\log_2 3}} = \log_2 3 + 1 > 0$ であり、$B > 0$ なので条件をみたす X の範囲は

0$\underline{0}< X <$8$\underline{1 + \log_2 3}$となります。

ク, ケ $1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$、$0 = \log_2 1$ ですので $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 6$ となります。

よって底が 1 より大きいことから$\underline{1 < x < 6}$が求める範囲となります。

コ 同様に考えると $\log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \dfrac{\log_2 x}{-1} =1\underline{-\log_2 x}$と変形できます。

サ, シ 同様に $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$ ですので、

$F(x) = -\log_2 x - \log_3 x = -(\log_2 x + \log_3 x) =1\underline{-f(x)}$、

$G(x) = (-\log_2 x)\cdot(-\log_3 x) = (\log_2 x)\cdot(\log_3 x) =5\underline{g(x)}$がわかります。

ス〜ソ ここから $F(x) > G(x)$ は $-f(x) > g(x)$ と変形できますのでここまで出た A, B, X を利用すると $-AX > BX^2$ となり、すなわち $BX\left(X + \dfrac{A}{B}\right) < 0$ と変形できます。

$\dfrac{A}{B} = \log_2 6 > 0$ でしたのでこれをみたす X は $-\log_2 6 < X < 0$ であることがわかります。

すなわち $\log_2 \dfrac{1}{6} < \log_2 x < \log_2 1$ より$\underline{\dfrac{1}{6} < x < 1}$が求める範囲となります。

[2]

(1) タ 加法定理または倍角公式により $_{8}\underline{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$がわかります。

チ それぞれ計算すると $\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} = 2\dfrac{\sin x}{\cos x} = 2\tan x$、

$\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 - \tan^2 x$ となりますので、

$_{b}\underline{\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$がわかります。

ツ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = \dfrac{1}{\tan 2x} = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$ であり $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \tan x$ ですので

$\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\cdot\tan x = _{6}\underline{\dfrac{1-\tan^2 x}{2}}$がわかります。

(2)

テ, ト $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $0 < \tan x < 1$ より $0 < 1 - \tan^2 x < 1$ がわかりますので、

$_{0}\underline{0} < \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} <_{5}\underline{\dfrac{1}{2}}$がわかります。

(3)

ナ〜ヌ $\dfrac{\pi}{2} = 90^\circ$ ですので $\dfrac{\pi}{2} - 2x = 90^\circ - 2x$ がわかり、すなわち $2x = 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ です。

これより$\underline{x = \dfrac{\pi}{360}}$がわかります。

ネ $x = \dfrac{\pi}{360}$ のとき $x = 0.5^\circ$ ですので $\dfrac{\pi}{2} - x = 89.5^\circ$ です。

(2) の結果により $x = \dfrac{\pi}{360}$ を代入すると $0 < \dfrac{\tan 89^\circ}{\tan 89.5^\circ} < \dfrac{1}{2}$ がわかります。

これより $\tan 89.5^\circ > 2\tan 89^\circ = 114.58$ と計算できますので、$\tan 89.5^\circ$ の値は $_{9}$<u>110 以上</u>であることがわかります。

第２問

(1)ア, イ　$(x^3)' = 3x^2, (x^2)' = 2x$ などから$\underline{f'(x) = 3x^2 - 6x}$となります。

ウ, エ　$f'(x) = 3x(x-2)$ と因数分解できますので $0 < x < 2$ で $f'(x) < 0$、$x < 0$ と $2 < x$ で $f'(x) > 0$ となります。
極大値は $f'(x)$ が正から負に変わる値でとりますので、すなわち$\underline{x = 0}$のときにとり、その値は $f(0) = \underline{6}$ となります。

オ, カ　極小値は $f'(x)$ が負から正に変わる値でとりますので、$\underline{x = 2}$のときにとります。またその値は $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 6 = \underline{2}$ となります。

キ, ク　$3 \leq x \leq 5$ の範囲では $f'(x) > 0$ となりますので、x が大きいほど $f(x)$ も大きくなります。
したがってこの範囲では$\underline{x = 5}$のときに最大値、$\underline{x = 3}$のときに最小値をとります。

ケ, コ　$1 \leq x \leq 3$ の範囲では $x = 2$ で減少から増加にかわりますので、このときに最小となります。
また最大値をとる可能性がある値は $x = 1, 3$ のいずれかであることもわかります。
$f(1) = 4, f(3) = 6$ ですので、$\underline{x = 3}$で最大値、$\underline{x = 2}$で最小値をとることがわかります。

(2)

サ〜ス　$x = t+1$ で最大、$x = t$ で最小となる場合、$f'(t) \geq 0, f'(t+1) \geq 0$ である必要があります。
$f'(x) \geq 0$ となる x は $x \leq 0$ と $2 \leq x$ でしたので $t \leq 0, 2 \leq t+1$ または $t \leq t+1 \leq 0$ または $2 \leq t \leq t+1$ となるような t が求める範囲となります。
これらより $t \leq -1, 2 \leq t$ となり、この範囲では $t \leq x \leq t+1$ で $f'(x) \geq 0$ が成り立ちますので、$f(x)$ はその範囲で単調増加となります。
これより、条件をみたす範囲は$\underline{t \leq -1, 2 \leq t}$となります。

セ, ソ　$x = t$ で最大、$x = t+1$ で最小となる場合、$f'(t) \leq 0, f'(t+1) \leq 0$ である必要があります。
$f'(x) \leq 0$ となる x は $0 \leq x \leq 2$ でしたので $0 \leq t \leq t+1 \leq 2$ となる t が求める範囲です。
これより $0 \leq t \leq 1$ となり、この範囲では $t \leq x \leq t+1$ で $f'(x) \leq 0$ が成り立ちますので、$f(x)$ はその範囲で単調減少となります。
これより、条件をみたす範囲は$\underline{0 \leq t \leq 1}$であることがわかります。

タ, チ　$f(t+1) = (t+1)^3 - 3(t+1)^2 + 6 = (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) - 3 \cdot (t^2 + 2t + 1) + 6 = t^3 - 3t + 4$ となりますので
$0 \leq t \leq 1$ のとき $M(t) - m(t) = f(t) - f(t+1) = (t^3 - 3t^2 + 6) - (t^3 - 3t + 4) = -3t^2 + 3t + 2$ となります。
平方完成を利用すると $M(t) - m(t) = -3\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 2 + \dfrac{3}{4}$ と変形できますので、$\underline{t = \dfrac{1}{2}}$のときにこの値が最大となることがわかります。

(3)

ツ〜ト　$0 \leq x \leq 1$ において $f(x)$ は単調減少であり、$f(1) > 0$ ですので求める面積は $\int_0^1 f(t)dt$ で表せます。
x^4 の $x = t$ における微分係数は $\dfrac{(t+h)^4 - t^4}{h}$ を $h \neq 0$ で考えたうえで h を 0 に近づけることで計算できます。
$(t+h)^4 = t^4 + 4t^3h + 6t^2h^2 + 4th^3 + h^4$ ですので $\dfrac{(t+h)^4 - t^4}{h} = 4t^3 + 6t^2h + 4th^2 + h^3$ がわかり、したがって微分係数は $4t^3$ であることがわかります。
これはすなわち $(x^4)' = 4x^3$ であり、逆をいうと x^3 の原始関数が積分定数を C として $\dfrac{x^4}{4} + C$ と表せることになります。

これを利用すると求める面積は
$\int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{t^4}{4} - t^3 + 6t\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 6 = \underline{\frac{21}{4}}$ と計算できます。
(同様に二項定理を応用すると n が正の整数のときに $(x^n)' = nx^{n-1}$ であること、x^n の原始関数が積分定数を C として $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ と表せることが導けます)

(4) ナ $f(x) - g(x) = (x^3 - 3x^2 + 6) - (x^3 - 6x^2 + 6x + 2) = 3x^2 - 6x + 4 = 3(x-1)^2 + 1 \geq 1$ ですので $f(x) - g(x)$ は $_0$つねに正の値をとることがわかります。

ニ このため $y = f(x)$ のグラフは $y = g(x)$ のグラフの上側にあり、共有点をもたないことがわかります。したがって求める面積も $_4\int_r^{r+1}\{f(x) - g(x)\}dx$で表せることがわかります。

ヌ $0 \leq r \leq 1$ のときは $f(r) = M(r), f(r+1) = m(r)$ でしたので、この範囲では $S = 4 - \{M(r) - m(r)\}$ と表せます。
またこの範囲では $M(r) - m(r)$ は増加してから減少することがわかっていますので、$-\{M(r) - m(r)\}$ は増減が逆になることから
S は $_3$減少してから増加することがわかります。

第３問

(1)ア, イ 線分の長さの 2 乗は x 座標の差の 2 乗と y 座標の差の 2 乗との和で表されますので、すなわち $\underline{\mathrm{AP}^2=(x-2)^2+(y-4)^2}$です。

ウ〜キ $m=1$ のとき②は $\mathrm{AP}^2-\mathrm{OP}^2=0$ となります。
$\mathrm{AP}^2=x^2+y^2-4x-8y+20$ ですので左辺に代入して計算すると $-4x-8y+20=0$ となります。
これを整理すると$\underline{y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}}$となります。

ク 直線 OA の傾きは $\dfrac{4}{2}=2$ であり、これと P の軌跡となる直線の傾きの積は $2\cdot-\dfrac{1}{2}=-1$ ですので、P の軌跡は直線 OA に垂直な直線です。
また線分 OA の中点の座標は $(1,2)$ であり $2=-\dfrac{1}{2}\cdot1+\dfrac{5}{2}$ をみたしますので、P は線分 OA の中点を通ることがわかります。
すなわち、できる直線は ${}_4$<u>直線 OA に垂直で、線分 OA の中点を通る</u>ことがわかります。

ケ〜シ 同様に②の左辺を計算すると
$\mathrm{AP}^2-2\mathrm{OP}^2=-x^2-y^2-4x-8y+20$ となります。
x^2,y^2 の係数が 1 になるように調整すると $x^2+y^2+4x+8y-20=0$ となりますので、平方完成をしてまとめると
$\underline{(x+2)^2+(y+4)^2=40}$となります。

ス〜タ 得られた式から P の軌跡は円であることがわかり、中心の座標は$\underline{(-2,-4)}$であることがわかります。

チ〜テ また、半径は $\sqrt{40}=\underline{2\sqrt{10}}$ であることがわかります。

(2) トナ ③の式に代入して整理すると
$(k+1)x^2+(k+1)y^2-4x-8y+(20-q)=0$ となります。
これが直線の式になる場合、x^2,y^2 の係数が 0 になる必要がありますので、$\underline{k=-1}$であることがわかります。

ニ $k=-1$ のとき得られる式は $-4x-8y+(20-q)=0$ となりますので、$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{20-q}{8}$ と変形できます。
この式は$k=-1,q=0$のときに得られた直線と傾きが等しいですので、すなわち ${}_1$<u>q によらず直線 OA と垂直</u>であることがわかります。

ヌ $k=1$ のときに得られる式は $2x^2+2y^2-4x-8y+(20-q)=0$ となります。
x^2,y^2 の係数を 1 にして整理すると $x^2+y^2-2x-4y+10-\dfrac{q}{2}=0$ より $(x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{q}{2}-5$ となります。
これが円を表す式になる場合、$\dfrac{q}{2}-5>0$ が必要十分であることがわかります。
よってその条件は整理することで ${}_3\underline{q>10}$となることがわかります。

第４問

(1)ア, イ　$\alpha - p = qi$ の両辺を 2 乗することで $\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 = -q^2$ となりますので、
$\alpha^2 - {}_1\underline{2p}\alpha + {}_3\underline{(p^2+q^2)} = 0$ が成り立つことがわかります。

(2)

ウ〜オ　順に計算すると
$x^3 = (x^2 - 2px + p^2 + q^2)x + 2px^2 - (p^2+q^2)x$
$= (x^2 - 2px + p^2 + q^2)(x+2p) + (4p^2x - 2p^3 - 2pq^2) - (p^2+q^2)x$
$= (x^2 - 2px + p^2 + q^2)(x+2p) + (3p^2 - q^2)x - (2p^3 + 2pq^2)$ となりますので、
$Q(x) = x + {}_0\underline{2p}$、$R(x) = {}_2\underline{(3p^2-q^2)}x - {}_4\underline{(2p^3+2pq^2)}$がわかります。

(3)　カ　$\alpha^3 = (p+qi)^3 = p^3 + 3\cdot p^2\cdot(qi) + 3\cdot p\cdot(qi)^2 + (qi)^3$ であり、$i^2 = -1, i^3 = -i$ となることから
${}_4\underline{\alpha^3 = p^3 + 3p^2qi - 3pq^2 - q^3i}$となります。

キ　$\alpha^3 = (p^3 - 3pq^2) + (3p^2q - q^3)i$ となりますので、これが実数になるならば虚部をみて ${}_4\underline{3p^2 - q^3} = 0$ が成り立つことがわかります。

ク　(1) において $\alpha^2 - 2p\alpha + (p^2+q^2) = 0$ すなわち $P(\alpha) = 0$ がわかっています。
また $x^3 = Q(x)P(x) + R(x)$ と表せますので、これに $x = \alpha$ を代入することで $\alpha^3 = Q(\alpha)P(\alpha) + R(\alpha)$ となり、すなわち ${}_3\underline{\alpha^3 = R(\alpha)}$がわかります。

ケ　ここから $\alpha^3 = m\alpha + n$ とできます。$\alpha = p + qi$ を右辺に代入すると
$\alpha^3 = m(p+qi) + n = (mp+n) + mqi$ となりますので、α^3 が実数になるならば ${}_4\underline{mq = 0}$がわかります。

(4)

コ〜シ　$(s+t)^4 = (s+t)^3\cdot(s+t) = (s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3)\cdot(s+t)$
$= (s^4 + 3s^3t + 3s^2t^2 + st^3) + (s^3t + 3s^2t^2 + 3st^3 + t^4) = \underline{s^4 + 4s^3t + 6s^2t^2 + 4st^3 + t^4}$ と計算できます。

ス, セ　上記の式に $s = p, t = qi$ を代入すると $i^4 = 1$ であることから
$\alpha^4 = {}_1\underline{p^4 - 6p^2q^2 + q^4} + ({}_2\underline{4p^3q - 4pq^3})i$ であることがわかります。

ソ　x^4 を $P(x)$ で割った商を $A(x)$、余りを $bx + c$ とおくと $x^4 = A(x)P(x) + bx + c$ となります。
同様にして $\alpha^4 = b\alpha + c = (bp + c) + bqi$ となりますので、α^4 の虚部は bq と表せます。
従って $bq = 4p^3q - 4pq^3$ すなわち $bq = (4p^3 - 4pq^2)\cdot q$ より x の係数 b は ${}_0\underline{4p^3 - 4pq^2}$と表せます。

所感

本試験とは変わって込み入った計算が多くなっています。計算間違いも起こしやすくなります。

第 1 問

[**1**]

対数関数を利用した問題です。(1) は底の変換公式を導き出すだけなのでやりやすいですが、(2) はやや面倒な比較がきます。

[**2**]

三角関数を利用した問題です。少し変わった式で比較していますが、最終的に使いやすい形になっているはずです。

第 2 問

微積分を利用した問題です。標準的な問題の中に x^3 の原始関数を計算したり思わぬ結果を利用したりするので、ここで詰まる人が出てきそうです。

第 3 問

図形と式に関する問題です。アポロニウスの円をもとに発展させていますが、式を作っていけば完答は難しくないはずです。

第 4 問

複素数に関する問題です。多項式の計算が求められますので、混乱を起こさないようにしたいです。