解答

第１問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	**7**	**2**
イ, ウ	**7,4**	**2**
エオ, カ	**12,7**	**2**
キク, ケコ	**75,30**	**2**
サ, シ	**3,5**	**2**
ス, セソ	**0,30**	**2**
タチ. ツ	**46.5**	**3**
テ, ト	**2,4**	**3**
ナ	**3**	**2**
ニヌ	**19**	**2**
ネノ, ハ	**25,5**	**2**
ヒ, フヘ	**5,13**	**3**
ホ	**2**	**3**

第２問 (30)		
解答欄	解答	配点
アイ, ウ	**-4,2**	**2**
エ, オカ, キ	**1,-5,4**	**3**
ク	**1**	**3**
ケ	**3**	**2**
コ	**8**	**2**
サ	**2**	**3**
シ	**3**	**2**
ス. セ	**0.5**	**2**
ソ, タ	**5,6**	**3**
チ	**2**	**3**
ツ	**4**	**3**
テ	**2**	**2**

第３問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	**1,2**	**2**
ウ, エ, オ, カ	**1,2,1,4**	**2**
キ, ク	**1,2**	**2**
ケ, コ, サシ	**3,7,24**	**3**
ス, セ, ソ	**1,1,6**	**3**
タ, チ	**5,7**	**4**
ツ, テト	**5,27**	**4**

第４問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ, ウ	**3,2,6**	**2**
エ	**4**	**2**
オ, カ	**2,8**	**3**
キ	**3**	**3**
ク	**5**	**2**
ケ	**2**	**2**
コ	**6**	**3**
サ, シ, ス, セ	**1,0,5,6**	**3**

第５問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア	**2**	**2**
イ	**6**	**2**
ウ, エ	**5,6**	**3**
オ, カキ	**4,11**	**3**
ク, ケ	**1,0**	**3**
コ	**1**	**3**
サ	**2**	**2**
シ	**2**	**2**

解説

第 1 問

[1]

ア　$50(x^2+y^2)-(x+7y)^2=(50x^2+50y^2)-(x^2+14xy+49y^2)=49x^2-14xy+y^2$ と計算できます。
この結果は因数分解できて、結果は $(\underline{7x}-y)^2$ となります。

イ, ウ　②に $y=7x$ を代入することで $7x-4\sqrt{3}x=1$ すなわち $(7-4\sqrt{3})x=1$ となります。
したがって $x=\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$ が成り立ちます。
$(7-4\sqrt{3})\cdot(7+4\sqrt{3})=7^2-4^2\cdot 3$ を利用して分母を有理化すると
$x=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})\cdot(7+4\sqrt{3})}=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{49-48}=\underline{7+4\sqrt{3}}$ がわかります。

エ〜カ　$y=7x$ でしたので $x^2+y^2=x^2+(7x)^2=50x^2$ となります。
$x^2=7^2+(4\sqrt{3})^2+2\cdot 7\cdot 4\sqrt{3}=97+56\sqrt{3}$ ですので
$x^2+y^2-50=50\cdot(x^2-1)=50\cdot(96+56\sqrt{3})=50\cdot 8\cdot(12+7\sqrt{3})=400\cdot\underline{(12+7\sqrt{3})}$ となります。

[2]

キ〜コ　経路 2 を選ぶ場合、道路あで走る部分は P から Q までの区間を除いた部分ですので $(75-x)$km です。
ここを 30km/時間で走りますので、通っている時間は $\underline{\dfrac{75-x}{30}}$ 時間となります。

サ, シ　この空欄には経路 2 で道路いを走る時間が入ります。
道路いは 48km 全部を通り、ここは 80km/時間で走りますので走る時間は $\dfrac{48}{80}=\underline{\dfrac{3}{5}}$ 時間となります。

ス〜ソ　この不等式の左辺が経路 2 を選んだときにかかる時間です。なので右辺に経路 1 を選んだときの時間を入れます。
経路 1 は 30km/時間で $x$km を走り、また考える不等式は経路 2 の方が短くなるようなものですので、
作る不等式は $\dfrac{75-x}{30}+\dfrac{3}{5}{}_0\leq\underline{\dfrac{x}{30}}$ となります。

タ〜ツ　不等式を変形すると $\dfrac{x}{30}+\dfrac{x}{30}>\dfrac{75}{30}+\dfrac{3}{5}$ となりますので計算すると $\dfrac{2x}{30}>2.5+0.6$ より $\dfrac{x}{15}>3.1$ となります。
よってこれより $\underline{x>46.5}$ が得られます。

[3]

テ, ト　外接円の半径を R とすると正弦定理 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2R$ より $\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\mathrm{BC}}{2R}=\dfrac{4}{2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ がわかります。
これより $\angle\mathrm{BAC}$ は小さい方が ${}_2\underline{60^\circ}$、大きい方が ${}_4\underline{120^\circ}$ であることがわかります。

ナ　三角形 ABC の面積を S とおくと $S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}$ が成り立ちます。
わかっている値を代入すると $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot(\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となりますので、整理することで $\underline{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=3}$ がわかります。

ニヌ 余弦定理 $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \cos\angle\mathrm{BAC}$ より $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2 + 2 \cdot (\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}) \cdot \cos\angle\mathrm{BAC}$ がわかります。

いま $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ ですのでこの場合での値を入れると $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \underline{19}$ がわかります。

ネ〜ハ $(\mathrm{AB} + \mathrm{AC})^2 = (\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2) + 2 \cdot (\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}) = 19 + 2 \cdot 3 = \underline{25}$ であり、$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} > 0$ より $\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 5$、すなわち$\underline{\mathrm{AC} = 5 - \mathrm{AB}}$がわかります。

ヒ〜ヘ 代入により $\mathrm{AB} \cdot (5 - \mathrm{AB}) = 3$ となりますので、整理すると $(\mathrm{AB})^2 - 5 \cdot \mathrm{AB} + 3 = 0$ です。

二次方程式の解の公式を利用すると$\underline{\mathrm{AB} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}}$がわかります。

ホ それぞれ検証しましょう。

(a) については、(1) において一組の辺の長さ 4、面積 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$、外接円の半径 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ が等しい三角形を考えており、そこから残り 2 辺の長さが $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ のものと $\frac{\sqrt{19} \pm \sqrt{7}}{2}$ のものが出てきます。

この 2 つの三角形は辺の長さが等しくないものがありますので、合同でないといえ、すなわち (1) の考察で得られるものが反例として使えます。

(b) について、等しい角を $\angle\mathrm{BAC}$、面積を S、外接円の半径を R とすると、(1) での進め方からまず正弦定理により辺 BC がわかり、面積から $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}$、さらに余弦定理により $\mathrm{AB} + \mathrm{AC}$ が決まります。

$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} = t, \mathrm{AB} + \mathrm{AC} = s$ としたとき $\mathrm{AC} = s - \mathrm{AB}$ より $(\mathrm{AB})^2 - s \cdot \mathrm{AB} + t = 0$ より、この三角形は存在すると仮定しているので $\mathrm{AB} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4t}}{2}$ となります。

それぞれについて $\mathrm{AC} = \frac{s \mp \sqrt{s^2 - 4t}}{2}$(複号同順) となることから $(\mathrm{AB}, \mathrm{AC})$ の組として考えられる 2 つの値は互いを入れ替えたものとなりますので、すなわち 3 辺の長さが等しい合同なものとなります。

これらより、正しいものは $\underline{{}_2\text{(a) が偽、(b) が真}}$となります。

第２問

[1]

ア〜ウ $x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$ ですので $(x+4)(x-2)<0$ より $\underline{-4<x<2}$ です。

エ〜キ $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{4}(x-1)^2-1-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{5}{4}$ と変形できますので、$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}-1$ のグラフの頂点の座標は $\underline{\left(1,-\frac{5}{4}\right)}$ です。

ク $-4<x<2$ においては x の係数が負である 1 次式なのでグラフは右下がりの直線、$x\leq -4, 2\leq x$ においては x^2 の係数が正である 2 次式なのでグラフは下に凸の放物線であり、頂点を含みません。
これらの形式に合うものは<u>選択肢 1</u>のグラフになります。

ケ $x^2-9>0$ となる範囲では $-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{9}{8}=-\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{9}{8}+1$ となるので頂点の x 座標は 2 であり、また $x=2$ のとき $x^2-9<0$ なのでグラフは頂点を含まない放物線の一部が使われていることがわかります。
また会話の内容からグラフは<u>選択肢 3</u>であることがわかります。

コ まず $x^2-9<0$ のときは $y=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{9}{8}=-\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{9}{8}+1$ より頂点を含む上に凸の放物線となります。
また $x^2-9>0$ のときは $y=x-\frac{9}{8}$ ですので右上がりの直線となります。
これらより、あてはまるものは<u>選択肢 8</u>のグラフになります。

サ $x^2+2\sqrt{5}-4<0$ のときは $y=\frac{1}{2}$ と定数になりますので x 軸に平行な直線の一部となります。
また $x^2+2\sqrt{5}-4>0$ のときは $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{1}{2}$ となりますので下に凸の放物線の一部になります。
これらより、あてはまるものは<u>選択肢 2</u>のグラフになります。

[2]

(1) シ 除外されるものは 1, 5 となりますので、$\bar{y}=\frac{2+2+3+3+3+3+4+4}{8}=\frac{24}{8}=\underline{3}$ となります。

ス, セ 同様に計算することで $t^2=\frac{2\cdot(3-2)^2+4\cdot(3-3)^2+2\cdot(4-3)^2}{8}=\frac{4}{8}=\underline{0.5}$ となります。

(2)

ソ, タ $\bar{z}=\frac{A}{2}$ より $A=2\bar{z}$、$\bar{y}=\frac{B}{n-2}$ より $B=(n-2)\bar{y}$ ですので、
$\bar{x}=\frac{(2\bar{z})+(n-2)\bar{y}}{n}=_5\underline{\frac{2}{n}}\bar{z}+_6\underline{\frac{n-2}{n}}\bar{y}$ と表せます。

チ $\bar{x}\leq\bar{y}$ のとき $\frac{2}{n}\bar{z}+\frac{n-2}{n}\bar{y}\leq\bar{y}$ ですのでまとめると $\frac{2}{n}\bar{z}\leq\frac{2}{n}\bar{y}$ となりますので、$_2\underline{\bar{z}\leq\bar{y}}$ がわかります。

(3) ツ 分散は「要素と平均の差」の 2 乗の平均ですので、t^2 は m 個の $(a-\bar{y})^2$ と $(8-m)$ 個の $(b-\bar{y})^2$ の平均です。
$a-\bar{y}=a-\frac{ma+(8-m)b}{8}=\frac{(8-m)a-(8-m)b}{8}=\frac{(8-m)(a-b)}{8}$ であり、
$b-\bar{y}=b-\frac{ma+(8-m)b}{8}=\frac{mb-ma}{8}=\frac{m(b-a)}{8}$ ですので
$t^2=\frac{1}{8}\cdot\left\{m\cdot\frac{(8-m)^2(a-b)^2}{8^2}+(8-m)\cdot\frac{m^2(b-a)^2}{8^2}\right\}$

$= \dfrac{(a-b)^2}{8^3} \cdot \{m(8-m)^2 + m^2(8-m)\} = \dfrac{(a-b)^2 \cdot m(8-m)}{8^3} \cdot \{(8-m)+m\}$

$= \dfrac{8m(8-m)(a-b)^2}{8^3} =_4 \underline{\dfrac{m(8-m)(a-b)^2}{64}}$がわかります。

テ　表 1 にある選手の調整後の評点は 4 人とも 2 種類の点数が使われていますので、前問の式にあてはめることができます。

t^2 の比較は $m(8-m)(a-b)^2$ をそれぞれにおいて計算すればよいですので、これらを計算します。

選手あは $4 \cdot (8-4) \cdot (4-5)^2 = 16$、選手いは $2 \cdot (8-2) \cdot (3-4)^2 = 12$、選手うは $4 \cdot (8-4) \cdot (2-4)^2 = 64$、選手えは $6 \cdot (6-2) \cdot (1-3)^2 = 48$ となります。

これらより、t^2 が最大となるのは上記の式で最大となる ${}_2$<u>選手う</u>です。

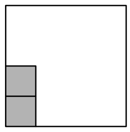
第３問

(1)ア, イ　2 枚目のタイルを貼れる位置は 1 枚目の上側と右側の 2 箇所です。よってそれぞれが選ばれる確率は $\frac{1}{2}$ ですので、配置が図 1 の A となる確率は $\underline{\frac{1}{2}}$ となります。

(2)

ウ〜カ　3 枚のタイルを貼って配置が図 1 の B になる場合は、2 枚貼った時点で図 1 の A の配置になり、さらにいちばん下の段にタイルを貼ることを選んだ場合に限られます。
図 1 の A に追加でタイルを貼れる位置はいちばん下の右側か下から 2 段目の左端の 2 通りです。
よって貼る位置それぞれが選ばれる確率は $\frac{1}{2}$ ずつですので、配置が図 1 の B となる確率は $\frac{1}{2}\cdot\underline{\frac{1}{2}}=\underline{\frac{1}{4}}$ となります。

キ, ク　2 枚目を貼った時点での A 以外の可能な配置を A' とおきます (下図)。



3 枚のタイルを貼って配置が図 1 の C になる場合は、配置 A になって下から 2 段目に 3 枚目を貼るか、配置 A' になっていちばん下に 3 枚目を貼るかのいずれかとなります。
配置 A' に追加でタイルを貼れる位置は 2 箇所ありますので、求める確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{2}}$ となります。

(3)　ケ　3 枚で B の配置になった場合、下から 2 段目の左端に 4 枚目を貼ると配置 E ができます。
3 枚で C の配置になった場合、いちばん下の左から 3 列目に 4 枚目を貼ると配置 E ができます。
3 枚で D の配置になった場合、E にない下から 3 段目のタイルがありますので、配置 E を作ることはできません。
よって可能な配置は $_3$B と C のみとなります。

コ〜シ　B の配置でタイルを貼れる位置は 2 箇所、C の配置では 3 箇所となりますので、4 枚で E の配置になる確率は
$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\underline{\frac{7}{24}}$ となります。

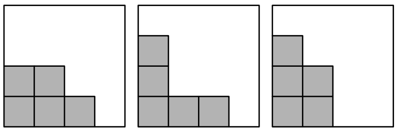
ス　3 枚で B の配置になった場合、F にない左から 3 列目のタイルがありますので、配置 F にはなりません。
3 枚で D の配置になった場合、F にない下から 3 段目のタイルがありますので、こちらも配置 F にはなりません。
3 枚で C の配置になった場合、下から 2 段目にタイルを貼ることで配置 F ができます。
よって可能な配置は $_1$C のみとなります。

セ, ソ　同様に確率を計算すると $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\frac{1}{6}}$ となります。

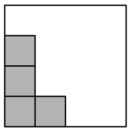
タ, チ　2 枚で A の配置であり、4 枚で E の配置になる場合は 3 枚目で B か C になっています。
それぞれの場合から確率を計算すると $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$ です。
よって 4 枚で E の配置になった場合 2 枚で A の配置だった確率は $\frac{\frac{5}{24}}{\frac{7}{24}}=\underline{\frac{5}{7}}$ となります。

(4)

ツ〜ト 6 枚で図 2 の配置になる場合、5 枚貼った時点で考えられるものは以下の 3 種類があります。



これらを順に P,Q,R とおきます。P,Q,R いずれの場合も 6 枚目を貼れる位置は 3 箇所ずつありますので、図 2 の配置ができる位置にタイルを貼る確率は $\frac{1}{3}$ となります。
また 6 枚で図 2 の配置ができる場合、4 枚貼った時点で左から 4 列目もしくは上から 4 段目にタイルがあってはならないので、4 枚貼った時点でありうるものは E,F と図 1 で F の下にある配置です。この配置を G とおきます。(下図)



4 枚目と 5 枚目でありうる配置の組合せは (E,P)、(E,Q)、(F,P)、(F,R)、(G,Q)、(G,R) の 6 通りです。
4 枚で配置 G ができる確率は 3 枚でありうる場合に配置 C と D があることから $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{24}$ です。
よって求める確率は
$\frac{7}{24}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{24}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{24}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{24}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$
$=\frac{7}{108}+\frac{1}{18}+\frac{7}{108}=\frac{20}{108}=\underline{\frac{5}{27}}$ となります。

第４問

[1]

(1)

ア〜ウ　因数分解はできませんが、積の形を作ることを考えます。
まず y の式で考えることで $(2x-3)y-4x=0$ とできます。
さらに $-4x=-2\cdot(2x-3)-6$ と変形することで
$2xy-4x-3y=(2x-3)y-2\cdot(2x-3)-6=(2x-3)(y-2)-6$ とできます。
これより$\underline{(2x-3)(y-2)=6}$と変形することができます。

エ　この変形で $2x-3$ は 6 の約数である必要があることがわかります。
さらに $2x-3=2(x-2)+1$ より x が整数ならば $2x-3$ は奇数となるので、その値としてありうるものは $-3,-1,1,3$ の 4 通りです。
$y-2$ はどの整数の値もとれますので、$2x-3$ としてありうるものに対してはいずれもとることが可能です。
したがって求める組は$\underline{4\text{ 組}}$となります。

オ, カ　ありうるものは $(2x-3,y-2)=(-3,-2),(-1,-6),(1,6),(3,2)$ であり、これらを解くと $(x,y)=(0,0),(1,-4),(2,8),(3,4)$ となります。
それぞれ xy の値は $0,-4,16,12$ となりますので、求めるものは$\underline{(x,y)=(2,8)}$となります。

(2)　キ　同様に変形すると $(2x-3)(y-2)=3a+6$ より $(2x-3)(y-2)=3(a+2)$ となります。
$y-2$ はどのような整数でもよいですので $2x-3$ が $3(a+2)$ の約数となるような x の個数が 8 個になるものを探します。
ただある整数 k が $3(a+2)$ の約数ならば $-k$ もそうですので、ここから $3(a+2)$ の正で奇数の約数の個数が 4 個となるものを探せばよいことがわかります。
$3(a+2)$ の約数に 5 以上の素数があればその値を p としたとき $2x-3=1,3,p,3p$ の 4 個ができますので、条件をみたします。
$3(a+2)$ の約数のうち奇数の素数が 3 のみの場合、3^3 を約数にもてば $2x-3=1,3,3^2,3^3$ の 4 個ができます。
それぞれで最小の場合を考えると $a+2=5,9$ ですので、求めるものは$\underline{a=3}$となります。

[2]

ク, ケ　M,N をそれぞれ式で表すと $M=a\cdot 7^2+b\cdot 7+c, N=c\cdot 7^2+b\cdot 7+a$ となりますので、
$X=(a\cdot 7^2-c\cdot 7^2)+(b\cdot 7-b\cdot 7)+c-a=({}_5\underline{a-c})\cdot 7^2+{}_2\underline{c-a}$となります。

コ　いま $c-a<0$ ですので、表記することを考えるために正の値になるように調整します。
そのために繰り下がりの考えを利用しましょう。すると
$X=(a-c-1)\cdot 7^2+7\cdot 7+(c-a)=(a-c-1)\cdot 7^2+\underline{6\cdot 7}+(7+c-a)$ と変形できます。

サ〜セ　$X=d\cdot 7^2+e\cdot 7+f, Y=f\cdot 7^2+e\cdot 7+d$ ですので
$X+Y=(d+f)\cdot 7^2+2e\cdot 7+(d+f)$ と表せます。
ここで $d=a-c-1, e=6, f=7+c-a$ でしたので $d+f=6$ となり、これより $X+Y=6\cdot 7^2+12\cdot 7+6$ となります。
表記を考えるときは各位を 0 以上 6 以下にしたいですので、7 以上になった場合は繰り上がりの考えを利用

して動かします。すると

$X+Y=(6+1)\cdot 7^2+(12-7)\cdot 7+6=7\cdot 7^2+5\cdot 7+6=1\cdot 7^3+0\cdot 7^2+5\cdot 7+6$

となりますので、表記は $p={}_{1}\underline{1}$、$q={}_{0}\underline{0}$、$r={}_{6}\underline{6}$、$s={}_{5}\underline{5}$となります。

(今回はたまたま選択肢の番号と値が等しいので大丈夫ですが、定数になったからといって早まってその値でマークしないよう気を付けましょう)

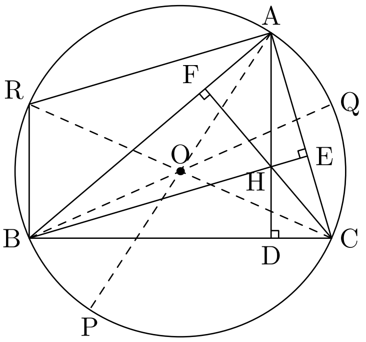
第５問

(1)　ア　三角形の垂心は各頂点から向かい合う辺におろした垂線の交点ですので、直線 AC は向かい合う頂点 B と垂心 H を通る直線 ${}_2\underline{\mathrm{BH}}$に垂直です。

イ　点 Q は直線 BO 上にあり、また BO = QO が成り立ちますので、Q は三角形 ABC の外接円上にきて、線分 BQ はその円の直径であることがわかります。
そのため三角形 BQC は線分 BQ を直径とする円に内接することから $\angle\mathrm{BCQ} = 90^\circ$ がわかり、すなわち直線 BC は直線 ${}_6\underline{\mathrm{CQ}}$と垂直であることがわかります。
問題文に出ている残りの垂直な直線は上記 2 種類のいずれかで説明できます。

ウ, エ　三角形 ADC と直線 BE においてメネラウスの定理を利用します。直線 BE は直線 AD,DC,CA とそれぞれ点 H,B,E で交わりますので
$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}} \cdot \dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ が成り立ちます。
BD : DC = 4 : 1 より $\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DB}+\mathrm{DC}} = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$、AE : EC = 2 : 3 より $\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \dfrac{3}{2}$ ですので
$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{2} = 1$ となり、これより $\underline{\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}} = \dfrac{5}{6}}$がわかります。

オ〜キ



直線 AR と BH がいずれも直線 AC に垂直であることから直線 AR と BH は平行です。
また直線 AH と BR はいずれも直線 BC に垂直ですのでこれらも平行です。
したがって三角形 AHBR は平行四辺形であることがわかり、これよりこの対角線 AB に分けられた三角形 ARB と AHB は面積が等しいことがわかります。
よって三角形 ARB の面積を S_1、三角形 ABC の面積を S_2、三角形 ABD の面積を S_3 とおくと
三角形 AHB の面積が S_1 であることから $\dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AH}+\mathrm{HD}} = \dfrac{5}{5+6} = \dfrac{5}{11}$ がわかり、
$\dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{4}{5}$ であることから
$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{S_1}{S_3} \cdot \dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{5}{11} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{11}$、すなわち S_1 は S_2 の $\underline{\dfrac{4}{11}}$倍だとわかります。

(2)ク, ケ　三角形 ABP は (1) の説明から ∠B が直角です。
また弧 AB に対する円周角でどちらも鋭角であることから ∠APB = ∠ACB が成り立ちます。
したがって ∠ADC が直角であること、∠APB =${}_0\underline{\angle\mathrm{ACD}}$(「ケ」の解答) であることから三角形 ABP と ${}_1\underline{\mathrm{ADC}}$(「ク」の解答) が相似であることがわかります。

コ　それぞれ検証します。
(a) については、∠OAI と ∠HAI を比較します。
角度を正の値だけで考えると $\angle\mathrm{OAI} = |\angle\mathrm{BAI} - \angle\mathrm{BAO}| = |\angle\mathrm{BAI} - \angle\mathrm{BAP}|$ であり、H が三角形 ABC

の内部にくることから $\angle\mathrm{HAI} = |\angle\mathrm{CAI} - \angle\mathrm{CAH}| = |\angle\mathrm{CAI} - \angle\mathrm{CAD}|$ となります。
いま I は内心であるので $\angle\mathrm{BAI} = \angle\mathrm{CAI}$ が成り立ち、上記の結果から $\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{CAD}$ であるので $\angle\mathrm{BAI} - \angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{CAI} - \angle\mathrm{CAH}$ が成り立ち、すなわち $\angle\mathrm{OAI} = \angle\mathrm{HAI}$ がわかります。
符号が同じになることから O と H は直線 AI からみて異なる側にいることもわかりますので、(a) の記述は正しいといえます。
また、$\angle\mathrm{EAH}$ を共有する直角三角形であることから三角形 ADC と AEH も相似であることがわかります。
したがって三角形 ABP と三角形 AEH は相似であることがわかり、相似比は $\mathrm{AB} : \mathrm{AE} = 1 : \sin\angle\mathrm{BAE}$ です。
これより $\mathrm{AO} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AP}, \mathrm{AH} = \mathrm{AP}\sin\angle\mathrm{BAE}$ ですので、$\sin\angle\mathrm{BAE} \neq \dfrac{1}{2}$、すなわち $\angle\mathrm{BAE} \neq 60^\circ$ であるならば $\mathrm{AO} \neq \mathrm{AH}$ が成り立ちます。
もし O と H が直線 AI に関して対称であるならば $\mathrm{AO} = \mathrm{AH}$ が必要ですので、(b) は偽であることがわかります。
したがって正しいものは ${}_1$(a) が真、(b) が偽となります。

(3) サ (2) と同様の議論で三角形 ABP と三角形 ADC が相似であることがわかりますので、$\angle\mathrm{BAP} ={}_2\underline{\angle\mathrm{CAD}}$ がわかります。

シ 今度は H が三角形 ABC の外部にきますので、$\angle\mathrm{HAI} = \angle\mathrm{CAI} + \angle\mathrm{CAH}$
もしくは $\angle\mathrm{HAI} = 360^\circ - (\angle\mathrm{CAI} + \angle\mathrm{CAH})$ です。
また $\angle\mathrm{CAH} = 180^\circ - \angle\mathrm{CAD}$ ですので $\angle\mathrm{CAI} + \angle\mathrm{CAH} = \angle\mathrm{CAI} + 180^\circ - \angle\mathrm{CAD}$ となります。
$\angle\mathrm{BAI} > \angle\mathrm{BAO}$ ならば $\angle\mathrm{CAI} > \angle\mathrm{CAD}$ より $\angle\mathrm{CAI} + \angle\mathrm{CAH} > 180^\circ$ となりますので、
$\angle\mathrm{OAI} + \angle\mathrm{HAI} = (\angle\mathrm{BAI} - \angle\mathrm{BAP}) + \{360^\circ - (\angle\mathrm{CAI} + 180^\circ - \angle\mathrm{CAD})\} = 180^\circ$ となります。
また $\angle\mathrm{BAI} < \angle\mathrm{BAO}$ ならば $\angle\mathrm{CAI} - \angle\mathrm{CAD} < 0$ ですので、
$\angle\mathrm{OAI} + \angle\mathrm{HAI} = (\angle\mathrm{BAP} - \angle\mathrm{BAI}) + (180^\circ - \angle\mathrm{CAD} + \angle\mathrm{CAI}) = 180^\circ$ となります。
いずれの場合でも、$\angle\mathrm{OAI} +{}_2\underline{\angle\mathrm{HAI}} = 180^\circ$ が成り立ちます。

所感

共通問題については本試験とうってかわって手のこんだ計算をさせる問題が増えています。
また、選択問題の難易度の差も本試験とは異なる方面で大きいので、合わないものを選ぶと大変です。

第１問

[1]

根号を含んだ連立方程式を考える問題です。2 乗したりするので計算間違いも出そうです。

[2]

日常の出来事を関数を使って考えようとする問題です。計算は簡単ですが使う数字は正しく選びましょう。

[3]

三角比を図形で考える問題です。(2) は前問題をうまく利用すると少し楽できます。

第２問

[1]

絶対値記号を取り入れた二次式の関数を考える問題です。必要な係数を素早く求められるかが勝負になりそうです。

[2]

データの分析に関する問題です。元のデータと部分的に取り出したデータを比較することになる問題であり、(3) は面倒な計算が必要になります。

第３問

場合の数と確率に関する問題です。最後は少し面倒ですが、その直前までなら問題用紙の図に確率を書きこむなりすれば楽に解けると思います。

第４問

整数の性質に関する問題です。少し手を加えた不定方程式の計算と 7 進法の問題で構成されています。
不定方程式は苦手だと最後の問題ではまりそうです。

第５問

平面図形に関する問題です。うまく利用できる性質を総動員して見つけないと時間を食う難問が揃っているようです。