解答

第１問 (20)		
解答欄	解答	配点
アイ	**-8**	**2**
ウエ	**-4**	**1**
オ, カ	**2,2**	**2**
キ, ク	**4,4**	**2**
ケ, コ	**7,3**	**3**
サ	**4**	**3**
シ, ス, セ	**3,6,9**	**2**
ソ, タ, チ	**1,5,7**	**2**
ツ, テ	**1,1**	**3**

第３問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア	**3**	**1**
イ	**2**	**2**
ウ	**5**	**2**
エ	**1**	**2**
オ	**2**	**3**
カ	**2**	**3**
キ	**7**	**3**
ク	**0**	**3**
ケ	**2**	**2**

第２問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	**0**	**3**
イ	**7**	**3**
ウ, エ, オ	**3,3,4**	**3**
カ	**4**	**2**
キク	**27**	**2**
ケ	**1**	**2**
コ	**2**	**2**
サシ, スセ, ソ	**12,10,5**	**3**
タ, チ	**5,6**	**2**
ツ, テト	**6,11**	**3**
ナ	**6**	**2**
ニヌ, ネノ, ハ	**10,11,2**	**3**

第４問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア, イウ	**5,-9**	**3**
エ	**9**	**3**
オ	**5**	**3**
カ	**4**	**3**
キ, ク	**8,3**	**3**
ケ, コ	**4,3**	**3**
サ, シ	**4,3**	**3**
ス	**2**	**3**
セ, ソ, タチ	**5,3,57**	**3**
ツ, テ	**0,0**	**3**

解説

第 1 問

[1]

ア〜エ　$|x+6| \leq 2$ は $-2 \leq x+6 \leq 2$ と置き換えられますので、それぞれから 6 を引くことで$\underline{-8 \leq x \leq -4}$がわかります。

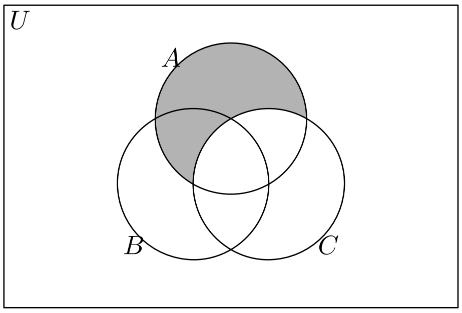
オ〜ク　$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leq 2$ のとき、x を $(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$ と置き換えることで
$-8 \leq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leq -4$ がわかります。
$1-\sqrt{3} < 0$ ですのでそれぞれをこの値で割ることで不等号の向きが変わり、
$\dfrac{-8}{1-\sqrt{3}} \geq (a-b)(c-d) \geq \dfrac{-4}{1-\sqrt{3}}$ がわかります。
$\dfrac{1}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-3} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ と変形できますので、これを利用することで
$\dfrac{-4}{-2} \cdot (1+\sqrt{3}) \leq (a-b)(c-d) \leq \dfrac{-8}{-2} \cdot (1+\sqrt{3})$ すなわち
$\underline{2+2\sqrt{3} \leq (a-b)(c-d) \leq 4+4\sqrt{3}}$がわかります。

ケ, コ　①、②をそれぞれ展開すると $ac+bd-ad-bc = 4+4\sqrt{3}, ab+cd-ad-bc = -3+\sqrt{3}$ となります。
$(a-d)(c-b) = ac+bd-ab-cd = ac+bd-ad-bc)-(ab+cd-ad-bc)$ ですので、①から②を引くことで
$(a-d)(c-b) = (4+4\sqrt{3})-(-3+\sqrt{3}) = \underline{7+3\sqrt{3}}$ がわかります。

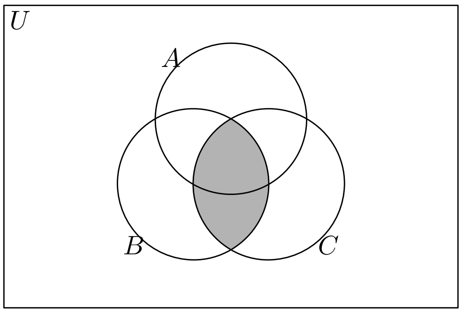
[**2**]

(1)

サ $A \cap \bar{C}$ は A の要素ではあるが C の要素ではないので以下のようになります。



また $B \cap C$ は B と C 両方の共通部分ですので以下のようになります。



これらを合わせたものが $(A \cap \bar{C}) \cup (B \cap C)$ となりますので、選択肢 4の図が該当します。

(2)

シ〜セ $A \cap B$ とはすなわち A と B の両方に属する元の集合ですので、$A \cap B = \{3, 6, 9\}$となります。

ソ〜チ $\bar{A}$ が A の補集合すなわち A に属さない元の集合ですので、$\bar{A} \cap B$ は B には属するが A に属さない元の集合であり、すなわち$\bar{A} \cap B = \{1, 5, 7\}$となります。

ツ $\bar{A} \cap B$ とはすなわち B に属するが A に属さない元の集合です。この集合に C の要素 c があるとすると $c \in B \cap C$ より $c \in (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap C)$ が成り立ちますが $c \notin A$ ですので矛盾します。
よって $\bar{A} \cap B$ の $_1$どの要素も C の要素ではないことがわかります。

テ $A \cap \bar{B}$ に C の要素 c があるとすると $c \in A$ が成り立ちますが $c \notin (A \cap \bar{C})$ と $c \notin (B \cap C)$ が成り立ちますので $c \notin (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap C)$ となり矛盾します。
よって $A \cap \bar{B}$ の $_1$どの要素も C の要素ではないことがわかります。

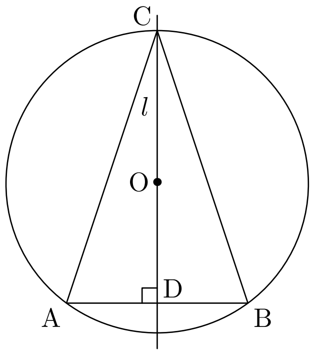
第２問

(1) ア A,B,C を頂点とする三角形を考えます。すると正弦定理により $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = 2\cdot 5$ が成り立ちますので $\sin\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\mathrm{AB}}{10} =_{0} \underline{\dfrac{3}{5}}$がわかります。

イ 三角関数の相互関係により $\sin^2\angle\mathrm{ACB} + \cos^2\angle\mathrm{ACB} = 1$ ですので、
$\cos^2\angle\mathrm{ACB} = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$ です。
いま $\angle\mathrm{ACB}$ は鈍角ですので $\cos\angle\mathrm{ACB} < 0$ となり、すなわち $\cos\angle\mathrm{ACB} =_{7} \underline{-\dfrac{4}{5}}$がわかります。

ウ〜オ 三角形 ABC に余弦定理を適用して $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos\angle\mathrm{ACB}$ を考えます。
いま $\angle\mathrm{ACB}$ は鈍角ですので $\cos\angle\mathrm{ACB} = -\dfrac{4}{5}$ となり、また $\mathrm{AB} = 6, \mathrm{BC} = 5$ を代入して整理すると $\mathrm{AC}^2 + 8\cdot\mathrm{AC} - 11 = 0$ となります。
これより $\mathrm{AC} = -4\pm\sqrt{27} = 4\pm 3\sqrt{3}$ が得られますが、$-4-3\sqrt{3}$ が不適とわかりますので$\underline{\mathrm{AC} = 3\sqrt{3}+4}$ がわかります。

カ

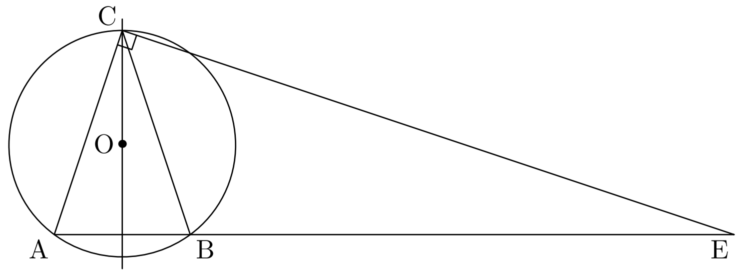


O を通り直線 AB に垂直な直線 l を考えます。三角形 ABC において辺 AB を底辺とすると高さは線分 CD の長さとなり、その最大値は D が直線 l と線分 AB の交点になり、C と D の間に O がくる場合となります。
三角形 OAB は OA = OB の二等辺三角形ですので D は線分 AB の中点となり、すなわち $\mathrm{AD} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} = 3$ となることから $\mathrm{OD} = \sqrt{5^2 - \mathrm{AB}^2} = 4$ となるので、$\tan\angle\mathrm{OAD} =_{4} \underline{\dfrac{4}{3}}$がわかります。

キク CD が最大となる場合は $\mathrm{CD} = \mathrm{OD} + 5$ となる場合ですのでこのとき $\mathrm{CD} = 9$ です。したがってこのときの三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 9 = \underline{27}$ と計算できます。

ケ 三角形 ABC の面積が最大になるように C をとっている場合、辺 AB からみて O と C は同じ側にくることから $\angle\mathrm{ACB}$ は鋭角です。したがってこのとき $\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{4}{5}$ となりますので
$\tan\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\sin\angle\mathrm{ACB}}{\cos\angle\mathrm{ACB}} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} =_{1} \underline{\dfrac{3}{4}}$がわかります。

コ



$\angle \mathrm{ACE} = 90^\circ$ であり、$\angle \mathrm{CAB}$ が鋭角ですので E は直線 AB において A,B,E と順に並ぶようにきます。
これより $\angle \mathrm{BCE} = 90^\circ - \angle \mathrm{ACB}$ となりますので、$\sin \angle \mathrm{BCE} = \cos \angle \mathrm{ACB} =_2 \underline{\frac{4}{5}}$ がわかります。

サ〜ソ 線分 BF の長さが最小となる場合、線分 BF は辺 CE に垂直になります。$\angle \mathrm{EBC}$ が鈍角になることから $\angle \mathrm{BEC}$ と $\angle \mathrm{BCE}$ はいずれも鋭角になり、すなわちこのような F は線分 CE 上にとれることがわかります。
このとき $\mathrm{BF} = \mathrm{BC} \sin \angle \mathrm{BCE}$ がわかります。
$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$ ですので $\mathrm{BF} = 3\sqrt{10} \cdot \frac{4}{5} = \underline{\frac{12\sqrt{10}}{5}}$ がわかります。

(2)

タ、チ 余弦定理により $\cos \angle \mathrm{QPR} = \frac{\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{RP}^2 - \mathrm{QR}^2}{2 \cdot \mathrm{PQ} \cdot \mathrm{RP}} = \frac{8^2 + 9^2 + 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{120}{144} = \underline{\frac{5}{6}}$ と計算できます。

ツ〜ト $\sin \angle \mathrm{QPR} = \sqrt{1 - \frac{5^2}{6^2}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ と計算できますので、三角形 PQR の面積は
$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{PQ} \cdot \mathrm{RP} \cdot \sin \angle \mathrm{QPR} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \underline{6\sqrt{11}}$ と計算できます。

ナ T は線分 TH の長さが最大になるようにとることになります。このとき線分 TH は球の中心を通りますので、$\mathrm{PH}^2 = \mathrm{SH}^2 + \mathrm{SP}^2$ などから $\mathrm{PH}^2 = \mathrm{QH}^2 = \mathrm{RH}^2 = 5^2 - \mathrm{SH}^2$ がわかります。
したがって $_6\underline{\mathrm{PH} = \mathrm{QH} - \mathrm{RH}}$ がわかります。

ニ〜ハ 球 S を平面 α で切断すると切り口は三角形 PQR の外接円になります。この半径を R とすると正弦定理により $\frac{\mathrm{QR}}{\sin \angle \mathrm{QPR}} = 2R$ となりますので $R = \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$ です。
これより $\mathrm{SH} = \sqrt{5^2 - R^2} = 5\sqrt{1 - \frac{9}{11}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ がわかりますので、$\mathrm{TH} = 5 + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ です。
よって三角錐 TPQR の体積は $\frac{1}{3} \cdot \mathrm{TH} \cdot \triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{3} \cdot \left(5 + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right) \cdot 6\sqrt{11} = 2 \cdot 5 \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{2}) = \underline{10(\sqrt{11} + \sqrt{2})}$ と計算できます。

第３問

(1) ア データは 52 個あるので中央値は 26 番目と 27 番目の中間です。

度数は 1000 円以上 1400 円未満が 2、1400 円以上 1800 円未満が 7、1800 円以上 2200 円未満が 11、2200 円以上 2600 円未満が 7 です。

合計すると 2200 円未満は 20、2600 円未満は 27 となりますので、中央値の含まれる階級は $_{3}$2200 以上 2600 未満とわかります。

イ 中央値が 26 番目と 27 番目の間にありましたので第 1 四分位数は 13 番目と 14 番目の間にきます。

1800 円未満の度数の総和は 9 ですので、第 1 四分位数は $_{2}$1800 以上 2200 未満にくることがわかります。

ウ 第 3 四分位数は 39 番目と 40 番目の中間にきます。

度数の総和を考えると 3000 円未満は 37、3400 円未満は 45 となりますので、

第 3 四分位数は $_{5}$3000 以上 3400 未満にくることがわかります。

エ 第 1 四分位数を q_1、第 3 四分位数を q_3 とおくと四分位範囲は $q_3 - q_1$ です。

ここまでで $1800 \leq q_1 < 2200$ と $3000 \leq q_3 < 3400$ がわかりましたので、$-2200 < q_1 \leq -1800$ より $3000 - 2200 < q_3 - q_1 < 3400 - 1800$ すなわち $800 < q_3 - q_1 < 1600$ が得られますので、四分位範囲は $_{1}$800 より大きく 1600 より小さいことがわかります。

(2) オ それぞれ検証します。

0 地域 E は 19 市あるので中央値は 10 番目、第 1 四分位は 5 番目の値です。すなわち小さいほうから 5 番目は第 1 四分位の値と一致します。

図 2 をみると第 1 四分位数を表す箱の下辺は 2000 より上すなわち 2000 より大きい値をさしていることがわかりますので、誤りといえます。

1 範囲は最大値 (ひげの上端) と最小値 (ひげの下端) の差であらわされます。

地域 E は最小値が 1000 以上で最大値が 3800 以下なので範囲は 2800 以下ですが、地域 W は最小値が 1400 以下で最大値が 4800 以上ですので範囲は 3400 以上あります。

よって地域 W の範囲は地域 E の範囲より大きいので、誤りといえます。

2 中央値は箱の中間を横切る線として表現されます。地域 E では 2200 あたり、地域 W では 2600 以上をさしていますので、地域 W のほうが大きいです。ということで正しいといえます。

3 値 2600 と箱ひげ図との関係でみてみると、地域 E は中央値と第 3 四分位の間、地域 W は第 1 四分位と中央値の間にきています。

ということで割合は地域 E は半分を超えますが地域 W は半分以下になります。なので地域 W のほうが大きくなることはないので、誤りといえます。

これらより、あてはまるものは選択肢 2の文となります。

カ 地域 E のデータを $e_1, \cdots, e_{19}$ とおくと、平均 $\bar{e}$ は $\bar{e} = \dfrac{e_1 + \cdots + e_{19}}{19}$ となります。

また分散は $\dfrac{(e_1 - \bar{e})^2 + \cdots + (e_{19} - \bar{e})^2}{19}$ と計算できます。ここで偏差とは平均との差ですのですなわち $|e_1 - \bar{e}|$ などとなります。

$|e_1 - \bar{e}|^2 = (e_1 - \bar{e})^2$ ですので、分散はそれぞれの偏差の $_{2}$2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値と表現されます。

なお、選択肢の 4 は標準偏差の説明です。

(3) キ 相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで求められます。

計算すると $\dfrac{124000}{590 \cdot 570} = \dfrac{1240}{59 \cdot 57} = \dfrac{1240}{3363} = 0,368 \cdots$ となるので、$_{7}$0.37と求められます。

$\left(0.3 = \dfrac{1008.9}{3363}\right.$、$\left.0.4 = \dfrac{1345.2}{3363}\right.$ ですので、大雑把な絞り込みもできます)

ク　x の平均を $\bar{x}$ とおくと $\bar{x}=\dfrac{x_1+\cdots+x_{19}}{19}$ です。

x' の平均を $\bar{x'}$ とおくと $\bar{x'}=\dfrac{x'_1+\cdots+x'_{19}}{19}=\dfrac{\frac{x_1}{1000}+\cdots+\frac{x_{19}}{1000}}{19}=\dfrac{1}{1000}\cdot\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_{19}}{19}\right)=\dfrac{\bar{x}}{1000}$ がわかります。

これより x' の分散は $\dfrac{(x'_1-\bar{x'})^2+\cdots+(x'_{19}-\bar{x'})^2}{19}=\dfrac{\left(\frac{x_1-\bar{x}}{1000}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_{19}-\bar{x}}{1000}\right)^2}{19}$

$=\dfrac{1}{1000^2}\cdot\dfrac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_{19}-\bar{x})^2}{19}$ と計算できますので x の分散の $\dfrac{1}{1000^2}$ 倍、すなわち ${}_{0}\underline{\dfrac{348100}{1000^2}}$ と計算できます。

ケ　同様に計算すると、x' と y' の共分散は x と y の共分散の $\dfrac{1}{1000^2}$ 倍、y' の分散は y の分散の $\dfrac{1}{1000^2}$ 倍となります。

これより x' の標準偏差は x の標準偏差の $\dfrac{1}{1000}$ 倍、y' の標準偏差は y の標準偏差の $\dfrac{1}{1000}$ 倍となりますので、標準偏差を σ_x などとして共分散を v_{xy} などとおくと x' と y' の相関係数は

$\dfrac{v_{x'y'}}{\sigma_{x'}\sigma_{y'}}=\dfrac{\frac{v_{xy}}{1000^2}}{\frac{\sigma_x}{1000}\cdot\frac{\sigma_y}{1000}}=\dfrac{v_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ となるので、x と y の相関係数 ${}_{2}$<u>と等しい</u>ことがわかります。

第４問

[1]

(1)

ア〜ウ　平方完成を利用すると $f(x) = x^2 - 10x + 16 + p = (x-5)^2 - 25 + 16 + p = (x-5)^2 - 9 + p$ と変形できますので、グラフの頂点は$\underline{(5, -9+p)}$にくることがわかります。

(2)　エ　$y = f(x)$ のグラフは下に凸なので頂点が x 軸より上にくるとグラフは x 軸と共有点をもちません。このとき $-9+p>0$ ですので$\underline{p>9}$となることがわかります。

オ　$p=9$ のときは頂点が x 軸に接しますのでその座標は$\underline{(5,0)}$となります。

(3)　カ　$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に -3、y 軸方向に 5 だけ動かすと頂点は $(2, -4+p)$ に移動しますので $g(x) = (x-2)^2 - 4 + p$ となります。これを展開すると$\underline{g(x) = x^2 - 4x + p}$となります。

キ　$|f(x) - g(x)| = |-6x+16|$ ですので、この値は $|-6x+16| = 0$ のときに最小値をとります。
すなわち $-6x+16=0$ より$\underline{x = \frac{8}{3}}$のときに最小となることがわかります。

[2]

(1)

ケ, コ　C_1 は P_0 と M すなわち $(0,3)(4,3)$ を通ります。x^2 の係数を a、x の係数を k、定数項を m とおくと $m = 3, a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 3 = 3$ となりますので $m = 3, b = -4a$ となり、すなわち C_1 の方程式は$\underline{y = ax^2 - 4ax + 3}$と表せます。

サ, シ　C_1 の式を平方完成すると $y = a(x-2)^2 + 3 - 4a$ と表せますので、シュートの高さは $x=2$ の値である$\underline{-4a+3}$となります。

ス　ボールが最も高くなるときの地上の位置は、プロ選手が 2、花子さんが $2 - \dfrac{1}{8p}$ となります。
花子さんのシュートの高さは $2 - \dfrac{(16p-1)^2}{64p}$ であり、この値はゴールの高さである 3 より大きくないといけませんので、少なくとも $\dfrac{(16p-1)^2}{64p} < 0$ が必要です。$16p-1=0$ では不等式が成り立ちませんので $(16p-1)^2 > 0$ がわかることから $\dfrac{1}{64p} < 0$ となり、これより $p<0$ がわかるので、すなわち $2 - \dfrac{1}{8p} > 2$ です。
ということでボールが最も高くなるときの地上の位置は $_2$<u>つねに花子さんのほうが M の x 座標に近い</u>ことがわかります。

(2)

セ〜チ　$\mathrm{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{15}$ ですので D の y 座標は $3 + \dfrac{\sqrt{3}}{15}$ です。
また D の x 座標は $3.8 = \dfrac{19}{5}$ ですので C_1 の式に D の座標を代入すると
$3 + \dfrac{\sqrt{3}}{15} = a \cdot \left(\dfrac{19}{5}\right)^2 - 4a \cdot \dfrac{19}{5} + 3$ が成り立ちます。
$4 = \dfrac{20}{5}$ を利用するなどして計算すると $-\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{19}{5} \cdot a = \dfrac{\sqrt{3}}{15}$ となりますので $a = -\dfrac{5\sqrt{3}}{57}$ がわかります。
すなわち C_1 の方程式は$\underline{y = -\dfrac{5\sqrt{3}}{57}(x^2 - 4x) + 3}$となります。

ツ　プロ選手のシュートの高さを $a = -\dfrac{5\sqrt{3}}{57}$ にして計算すると $3 + \dfrac{20\sqrt{3}}{57}$ です。

おおよその値を計算すると $3 + \dfrac{34.6}{57} = 3 + 0.6 + \dfrac{0.2}{57}$ より 3.6 程度となりますので、$_{0}$<u>プロ選手</u>のシュートの高さのほうが大きくなります。

テ　シュートの高さの差は 0.2 くらいであり、ボールの直径は 0.2 としていますので、ボール $_{0}$<u>約 1 個分</u>の差があることがわかります。

所感

細かい計算が色々見られました。計算が苦手だと苦労しそうです。

第 1 問

[1]

不等式に関する問題です。絶対値のはずしかたや不等号の変形に少し注意です。
最後はいろいろ試すことになるかもしれません。

[2]

集合に関する問題です。基本的な問題が多く、最後も図を利用すれば難しくないでしょう。

第 2 問

図形と計量に関する問題です。三角比の知識や運用が問われます。
また、面積や体積が最大になる条件がどうなるかは直感でいけると思いますがちゃんと説明しようとすると案外手がかかるかもしれません。

第 3 問

データの分析に関する問題です。問題数は少なくないですが面倒な計算は少ないので解きやすいと思います。

第 4 問

二次関数に関する問題です。[1] は最後が 1 次式の絶対値の最小値を問われるので理解していないとはまるかもしれません。
[2] は放物線が出る状況を取り上げたもので、細かい計算が多く手がかかります。