解答

第１問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	0	1
イ	2	1
ウ, エ	2,1	2
オ	3	2
カ, キ	5,3	2
ク, ケ	a,7	2
コ	7	2
サ, シ, ス, セ	3,7,5,7	2
ソ	6	2
タ, チ	5,6	2
ツ	2	3
テ	2	2
ト, ナ	3,2	2
ニ	5	2
ヌ	5	3

第２問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	4	1
イウ, エ	-3,2	3
オ	0	1
カ	0	1
キ	3	1
ク	9	1
ケ, コ, サ	5,3,9	3
シ	6	2
スセソ	180	2
タチツ	180	3
テトナ, ニヌ, ネ	300,12,5	3
ノ	4	3
ハ	0	3
ヒ	4	3

第３問 (20)		
解答欄	解答	配点
アイ, ウ	10,5	2
エ	5	2
オ, カ	2,5	1
キ, ク	2,5	1
ケ, コ	4,2	1
サ	2	1
シ	2	2
ス	2	2
セ	4	2
ソ	0	2
タ, チ	3,5	2
ツ	1	2

第４問 (20)		
解答欄	解答	配点
ア, イ	4,4	1
ウ	2	2
エ	3	1
オ, カ	1,2	2
キ	3	1
ク, ケ	2,1	2
コ, サ, シ	0,6,2	3
ス	1	2
セ, ソ	2,3	2
タ, チツ	0,-2	2
テト, ナ	-5,8	2

解説

第 1 問

[**1**]

(1)

ア　$x = \frac{\pi}{6}$ のとき $\sin x = \frac{1}{2}, \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ですので、$_{0}\underline{\sin x < \sin 2x}$がわかります。

イ　$x = \frac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ですので、$_{2}\underline{\sin x > \sin 2x}$がわかります。

(2)

ウ, エ　倍角の公式により $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ですので
$\sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x\underline{(2\cos x - 1)}$ がわかります。

オ　①は $\sin x > 0$ かつ $\cos x > \frac{1}{2}$ と言い換えられます。$0 \leq x \leq 2\pi$ のとき $\sin x > 0$ となるのは $0 < x < \pi$、$\cos x > \frac{1}{2}$ となるのは $0 < x < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < x < \pi$ となりますので、求める範囲は$\underline{0 < x < \frac{\pi}{3}}$となります。

カ, キ　②は $\sin x < 0$ かつ $\cos x < \frac{1}{2}$ となります。同様にそれぞれ $\pi < x < 2\pi$ と $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ となりますので、求める範囲は$\underline{\pi < x < \frac{5}{3}\pi}$となります。

(3)

ク, ケ　$\alpha + \beta = 4x, \alpha - \beta = 3x$ となる α, β を求めると $\alpha = \frac{7}{2}x, \beta = \frac{x}{2}$ となります。
すなわち $\sin 4x - \sin 3x = 2\cos\frac{7}{2}x \sin\frac{x}{2}$ となりますので、$\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つことは $\cos_{\mathsf{a}}\underline{\frac{7}{x}}$ と $\sin_{7}\underline{\frac{x}{2}}$が同符号であると言い換えられます。(正であることが④、負であることが⑤に相当)

コ〜セ　$0 \leq x \leq \pi$ において $0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \frac{7}{2}x \leq \frac{7}{2}\pi$ ですので、この範囲では $\sin\frac{x}{2} \geq 0$ となりますので、⑤を考える必要はありません。
したがって $\cos\frac{7}{2}\pi > 0$ となる x を考えることになり、それを求めると$\underline{0 < x < \frac{\pi}{7}, \frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi}$となります。

(4)

ソ〜チ　まず $\sin 3x > \sin 4x$ を考えると、$\sin 4x - \sin 3x < 0$ ですのですなわち $\cos\frac{7}{2}\pi \sin\frac{\pi}{2} < 0$ より、(3) と同様にして $\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi, \frac{5}{7}\pi < x < \pi$ がわかります。
次に $\sin 4x > \sin 2x$ ですが、これを $\sin\{2 \cdot (2x)\} > \sin(2x)$ と変形して考えると、
$0 \leq x \leq \pi$ で $0 \leq 2x \leq 2\pi$ ですので (2) の結果から $0 < 2x < \frac{\pi}{3}, \pi < 2x < \frac{5}{3}\pi$ がわかり、これより $0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$ がわかります。
$\frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{3}{7}, \frac{1}{2} < \frac{5}{7} < \frac{5}{6}$ ですので合わせることで$\underline{\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{6} < \frac{5}{7}\pi < x < \frac{5}{6}\pi}$となることがわかります。

[2]

(1)

ツ $\log_a b = x$ であるとはすなわち $_2\underline{a^x = b}$が成り立つように x が定義されているということです。

(2)

テ $5^2 = 25$ ですので$\underline{\log_5 25 = 2}$がわかります。

ト, ナ $9 = 3^2, 27 = 3^3$ ですので $27 = 3^3 = (3^2)^{\frac{3}{2}}$ がわかり、すなわち$\underline{\log_9 27 = \dfrac{3}{2}}$がわかります。

ニ $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ はすなわち $2^{\frac{p}{q}} = 3$ ですので、この両辺を q 乗することで $_5\underline{2^p = 3^q}$と変形できることがわかります。

ヌ $\log_a b = \dfrac{p}{q}$ であるとすると $a^p = b^q$ と変形できます。a と a^p の偶奇は等しく、b と b^q の偶奇も等しいので、a, b の偶奇は等しい必要があることがわかります。
このことから $_5$<u>a, b のうち一方が偶数で他方が奇数</u>だと $\log_a b$ は有理数にならないことがわかります。
他の選択肢については、$log_2 4 = 2$ が 0,1,4 の反例、$\log_3 9 = 2$ が 2,3,4 の反例になります。

第２問

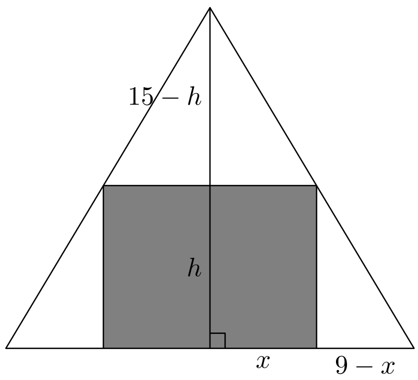
[1]

(1)　ア　$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点において x 座標は $f(x)=0$ が成立します。
いま $f(x)=x^2(k-x)$ ですので $f(x)=0$ となる x は $0,k$ です。
したがって x 軸との共有点は (0,0) と ${}_4\underline{(k,0)}$だとわかります。

イ〜エ　$f(x)=kx^2-x^3$ ですので、導関数は$\underline{f'(x)=-3x^2+2kx}$となります。

オ〜ク　$f'(x)=-x(3x-2k)$ ですので、$x=0,\dfrac{2}{3}k$ のとき $f'(x)=0$ となります。
さらにいま $k>0$ ですので $0<x<\dfrac{3}{2}k$ のとき $f'(x)>0$、$x<0$ または $\dfrac{2}{3}k<x$ のとき $f'(x)<0$ となります。
これより $x=0$ のとき $f'(x)$ は負から正にかわりますので、$x={}_0\underline{0}$のときが極小で、その値は $f(0)={}_0\underline{0}$ となります。
また $x=\dfrac{2}{3}k$ のとき $f'(x)$ は正から負にかわりますので、$x={}_3\underline{\dfrac{2}{3}}k$のときが極大で、その値は $f\left(\dfrac{2}{3}k\right)=\dfrac{4k^2}{9}\cdot\dfrac{k}{3}={}_9\underline{\dfrac{4}{27}}k^3$となります。

(2)



ケ〜サ　円錐において底面の中心と頂点とを含む平面で切断し、円柱の高さを h とおきます。
円柱の上下面の切り口である線分は平行になりますので、$x:9=(15-h):15$ が成り立ちます。
変形すると $15x=135-9h$ となりますので、$h=\dfrac{135-15x}{9}=\dfrac{5}{3}\cdot(9-x)$ と変形できます。
円柱の底面積は πx^2 ですので$\underline{V=\dfrac{5}{3}\pi x^2(9-x)}$がわかります。

シ　(1) の $f(x)$ で $k=9$ とおくと $V=\dfrac{5\pi}{3}f(x)$ とおけます。
$f(x)$ は $0<x<k$ で正の値をとり $0<x<\dfrac{2}{3}k$ で増加、$\dfrac{2}{3}k<x<k$ で減少しますので、最大値は $x=\dfrac{2}{3}k$ のときにとることがわかります。
$k=9$ を代入して$\underline{x=6}$のときに V が最大になることがわかります。

ス〜ソ　最大値は (1) の結果を利用して $\dfrac{5\pi}{3}\cdot\dfrac{4}{27}\cdot 9^3=\underline{180\pi}$ と計算できます。

[2]

(1)

タ〜ツ

$$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^{30}=\frac{900}{10}+3\cdot 90=\underline{180}$$

と計算できます。

テ〜ネ　積分定数を C として不定積分を計算すると

$$\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)=\underline{\frac{1}{300}x^3-\frac{1}{12}x^2+5x}+C$$

となります。

(2)

ノ　$f(x)=\frac{1}{5}x+3$ とすると $S(t)=\frac{1}{10}t^2+3t$ となります。開花は $S(t)=400$ となったときですので $\frac{1}{10}t^2+3t=400$ を計算します。
$t^2+30t-4000=(t+80)(t-50)=0$ と変形できますので、$t>0$ より $t=50$ すなわち $_4$<u>50 日後</u>に開花すると予想できます。

ハ　今度は $x\geq 30$ のときに $f(x)=\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5$ とします。
$x>30$ のときは $f'(x)=\frac{1}{50}x-\frac{1}{6}=\frac{1}{50}\left(x-\frac{25}{3}\right)$ ですので $x>30$ では $f'(x)>0$ がわかります。すなわちこの範囲で $f(x)<f(x+10)$ がわかりますので x を 30 から 40 までの範囲で積分すると右辺は 40 から 50 の範囲で積分した値が出ますので $_0\underline{\int_{30}^{40}f(x)dx<\int_{40}^{50}f(x)dx}$が成り立つことがわかります。

ヒ　40 日後の時点で $S(40)=180+115=295$ であり、$S(50)>295+115=410$ がわかりますので、
$S(t)=400$ となる t は $40<t<50$ をみたすことがわかります。すなわち開花日時は
$_4$<u>40 日後より後で 50 日後より前</u>と予想できます。

第３問

(1)

ア〜エ　中心 (a,b) で半径 r の円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ と表せますので係数を比較して中心$\underline{(10,5)}$, $\underline{\text{半径 }5}$の円であることがわかります。

オ〜ク　Q は線分 OP を 2:3 に内分しますので $x=\dfrac{2}{2+3}s=\underline{\dfrac{2}{5}}s$、$\underline{y=\dfrac{2}{5}t}$がわかります。

ケ〜サ　上記の関係式を変形すると $s=\dfrac{5}{2}x, t=\dfrac{5}{2}y$ となります。
P は C_1 にありますので $(s-10)^2+(t-5)^2=25$ が成り立ちます。したがってこの式に代入すると $\left(\dfrac{5}{2}x-10\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}y-5\right)^2=25$ が成り立ちます。
したがってこの両辺 $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ 倍することで $\left(x-10\cdot\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(y-5\cdot\dfrac{2}{5}\right)^2=4$ となり、
整理することで$\underline{(x-4)^2+(y-2)^2=2^2}$となります。

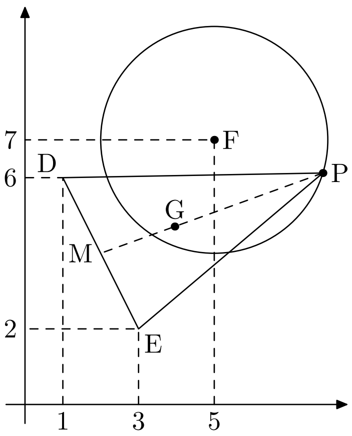
シ　得られた円 C_2 の式において中心の座標は (4,2) です。$4=\dfrac{2}{5}\cdot 10=\dfrac{2}{2+3}\cdot 10, 2=\dfrac{2}{2+3}\cdot 5$ ですので線分 OA を $_{2}\underline{2:3}$に内分していることがわかります。

(2)

ス　P の座標を (s,t)、R の座標を (X,Y) として同様に考えると $X=\dfrac{m}{m+n}s, Y=\dfrac{m}{m+n}t$ より
$\left(\dfrac{m+n}{m}X-10\right)^2+\left(\dfrac{m+n}{m}Y-5\right)^2=5^2$ とでき、
$\left(X-\dfrac{10m}{m+n}\right)^2+\left(Y-\dfrac{5m}{m+n}\right)^2=\left(\dfrac{5m}{m+n}\right)^2$ と変形できます。
すなわちこの円の中心の座標は $\left(\dfrac{m}{m+n}\cdot 10, \dfrac{m}{m+n}\cdot 5\right)$ となりますので、線分 OA を $_{2}\underline{m:n}$に内分することがわかります。

セ　$m>0, n>0$ より $\dfrac{m}{m+n}>0$ ですので半径は $\dfrac{m}{m+n}\cdot 5$ と変形でき、すなわち C_1 の半径の $_{4}\underline{\dfrac{m}{m+n}}$倍であることがわかります。

(3)



ソ　M は線分 DE の中点としていますので、重心の性質から G は線分 MP を $_0\underline{1:2}$に内分します。

タ〜チ　C_3 の中心を F(5,7) とおくと、これまでの考察により G の軌跡は円で、その中心は線分 MF を 1 : 2 に内分する点となります。

M の座標は $\dfrac{1+3}{2}=2, \dfrac{6+2}{2}=4$ より (2,4) となるので、中心の x 座標と y 座標を求める計算式は $\dfrac{5\cdot1+2\cdot2}{1+2}$ と $\dfrac{7\cdot1+2\cdot4}{1+2}$ となるので計算すると$\underline{(3,5)}$となることがわかります。

ツ　G の軌跡となる円の半径は C_3 の半径の $\dfrac{1}{1+2}$ 倍ですので、C_3 の半径が 3 であることから $\dfrac{1}{3}\cdot3=\underline{1}$ と計算できます。

第４問

(1)

ア, イ ①の判別式を D_1 とすると $\dfrac{D_1}{4} = (p+1)^2 - (2p^2 - 2p + 5) = -p^2 + 4p - 4$ と表せます。この値が 0 以上であれば実数解をもちますので、すなわち条件は $-p^2 + 4p - 4 \geq 0$ より $\underline{p^2 - 4p + 4 \leq 0}$ となります。

ウ $p^2 - 4p + 4 = (p-2)^2$ ですので、$p^2 - 4p + 4 \leq 0$ となりうるものは $(p-2)^2 \leq 0$ より $p - 2 = 0$ となる場合のみ、すなわち $\underline{p = 2}$ となる場合に限られます。

エ $S(x) = 0$ の解がすべて実数になるならば $p = 2$ ですのでこのとき
$S(x) = (x-2)(x^2 - 6x + 9) = (x-2)(x-3)^2$ です。すなわち解は $\underline{x = 2, 3}$ となります。

オ, カ $x^2 - 2(p+1)x + 2p^2 - 2p + 5 = 0$ を変形すると $\{x - (p+1)\}^2 = -(p-2)^2$ と変形できますので、虚数解は $\underline{x = p + 1 \pm (p-2)i}$ であることがわかります。
($p - 2$ の符号は気になるところだが、$\pm$ がつくことによりどちらでも同じになる)

(2) キ $x = r$ が $T(x) = 0$ の解ですのですなわち $T(r) = 0$ です。
これより $r^3 + r + q = 0$ がわかりますので $\underline{q = -r^3 - r}$ がわかります。

ク, ケ $T(x) = x^3 + x - r^3 - r$ となりますので、$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ を利用すると
$T(x) = (x^3 - r^3) + (x - r) = (x-r)\underline{(x^2 + rx + r^2 + 1)}$ と変形できることがわかります。

コ $D = r^2 - 4(r^2 + 1) = -3r^3 - 4$ であり、r は実数なので $-3r^2 \leq 0$ です。したがって $D \leq -4 < 0$ となるので $_0\underline{D < 0}$ がつねに成り立つことがわかります。

サ $x^2 + rx + r^2 + 1 = \left(x + \dfrac{r}{2}\right)^2 + \dfrac{3r^2 + 4}{4} = \left(x + \dfrac{r}{2}\right)^2 - \dfrac{D}{4}$ となることから $\left(x + \dfrac{r}{2}\right)^2 = \dfrac{D}{4}$ となります。
いま $D < 0$ なので右辺は負の値となり、すなわち $x + \dfrac{r}{2} = \pm \dfrac{\sqrt{-D}}{2} i$ と変形できます。
これより $x = r$ 以外の解は $_6\underline{x = \dfrac{-r \pm \sqrt{-D}i}{2}}$ と表せます。

シ $-D > 0$ となりますので解の虚部は 0 ではありません。すなわち $_2$互いに共役な虚数であることがわかります。

(3) ス $S(x)$ はつねに $S(2) = 0$ が成り立ちますので、共通の解が $x = 2$ であるような場合は $T(2) = 0$ となる場合を考えればよいことがわかります。
$T(x) = 0$ の実数解は r しかないので、これをみたすには $r = 2$ とするしかありません。すなわちそのような r は $_1$1 個だけ存在することがわかります。

セ, ソ $S(x) = 0$ が $x = 2$ 以外の実数解をもつとすると (1) での考察により $p = 2$ とするしかなく、このとき $x = 3$ が解になります。
すなわち共通解は $x = 3$ とするしかなく、このとき $r = 3$ が決まります。
よって条件を満たす組は $\underline{(p, r) = (2, 3)}$ のみとわかります。

タ〜ナ 共通解が虚数のとき、$S(x) = 0$ の虚数解は $p + 1 \pm (p-2)i$、$T(x) = 0$ の虚数解は $-\dfrac{r}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3r^2 + 4}}{2} i$ ですので、実部を比較して $r = -2p - 2$ となることがわかります。
虚部を比較すると $|p - 2| = \dfrac{\sqrt{3r^2 + 4}}{2}$ より $(p-2)^2 = \dfrac{3r^2 + 4}{4}$ となりますので、代入により
$p^2 - 4p + 4 = \dfrac{12p^2 + 24p + 16}{4}$ となりますので整理して $2p^2 + 10p = 2p(p+5) = 0$ となります。
すなわち $p = 0, -5$ となりますので、対応する r を計算することで $\underline{(p, r) = (0, -2), (-5, 8)}$ がわかります。

所感

うまい発想をすれば解きやすい問題がそろいました。

第１問

[1]

三角関数を利用した問題です。基本的な計算が多いですが範囲を求めるときに混乱しないよう注意しましょう。

[2]

指数対数関数についての問題です。(1) を間違えるわけにはいきません。後半は整数の性質に踏み入ります。

第２問

整式の微積分に関する問題です。
[1] では微分が主体となっており、(1) をどのように (2) に利用するかが問われます。といってもそれほど難しくないはず。
[2] では積分が主体となっています。大き目の数を扱うなどで少々難しいと思われますが、多くの計算が問題文でされているのではまることは少ないでしょう。

第３問

図形と式に関する問題です。内分の計算や意味を誤っていなければ最後まで素直にいけるでしょう。

第４問

複素数に関する問題です。計算しやすいように調整されていますのではまることは少なそうです。最後については虚数解をもつ部分で係数比較で解く方法もあります。