

解答

第1問 (30)		
解答欄	解答	配点
アイ	-8	2
ウエ	-4	1
オ,カ	2,2	2
キ,ク	4,4	2
ケ,コ	7,3	3
サ	0	3
シ	7	3
ス	4	2
セソ	27	2
タ,チ	5,6	2
ツ,テト	6,11	3
ナ	6	2
ニヌ,ネノ,ハ	10,11,2	3

第2問 (30)		
解答欄	解答	配点
ア	2	2
イ	5	2
ウ	1	2
エ	2	3
オ	2	3
カ	7	3
キ,ク	4,3	3
ケ,コ	4,3	3
サ	2	3
シ,ス,セソ	5,3,57	3
タ,チ	0,0	3

第3問 (20)		
解答欄	解答	配点
アイウ	320	3
エオ	60	3
カキ	32	3
クケ	30	3
コ	2	3
サシス	260	2
セソタチ	1020	3

第4問 (20)		
解答欄	解答	配点
アイ	11	2
ウエオカ	2310	3
キク	22	3
ケコサシ	1848	3
スセソ	770	2
タチ	33	2
ツテトナ	2310	2
ニヌネノ	6930	3

第5問 (20)		
解答欄	解答	配点
アイ	90	2
ウ	3	2
エ	4	3
オ	3	3
カ	2	2
キ	3	3
ク,ケ,コ	3,6,2	3
サ	7	2

解説

第1問

[1]

ア～エ $|x+6| \leq 2$ は $-2 \leq x+6 \leq 2$ と置き換えられますので、それぞれから6を引くことで $-8 \leq x \leq -4$ がわかります。

オ～ク $|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leq 2$ のとき、 x を $(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$ と置き換えることで $-8 \leq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leq -4$ がわかります。

$1-\sqrt{3} < 0$ ですのでそれぞれをこの値で割ることで不等号の向きが変わり、
 $\frac{-8}{1-\sqrt{3}} \geq (a-b)(c-d) \geq \frac{-4}{1-\sqrt{3}}$ がわかります。

$\frac{1}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ と変形できますので、これを利用することで

$\frac{-4}{-2} \cdot (1+\sqrt{3}) \leq (a-b)(c-d) \leq \frac{-8}{-2} \cdot (1+\sqrt{3})$ すなわち

$2+2\sqrt{3} \leq (a-b)(c-d) \leq 4+4\sqrt{3}$ がわかります。

ケ、コ ①、②をそれぞれ展開すると $ac+bd-ad-bc = 4+4\sqrt{3}$, $ab+cd-ad-bc = -3+\sqrt{3}$ となります。

$(a-d)(c-b) = ac+bd-ab-cd = ac+bd-ad-bc - (ab+cd-ad-bc)$ ですので、①から②を引くことで

$(a-d)(c-b) = (4+4\sqrt{3}) - (-3+\sqrt{3}) = 7+3\sqrt{3}$ がわかります。

[2]

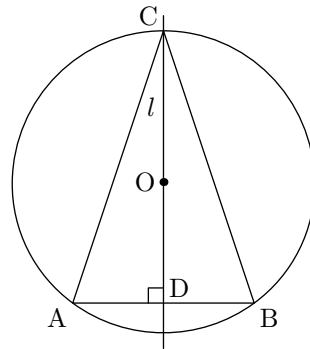
(1) サ A,B,C を頂点とする三角形を考えます。すると正弦定理により $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2 \cdot 5$ が成り立ちますので $\sin \angle ACB = \frac{AB}{10} = \frac{3}{5}$ がわかります。

シ 三角関数の相互関係により $\sin^2 \angle ACB + \cos^2 \angle ACB = 1$ ですので、

$$\cos^2 \angle ACB = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \text{ です。}$$

いま $\angle ACB$ は鈍角ですので $\cos \angle ACB < 0$ となり、すなわち $\cos \angle ACB = -\frac{4}{5}$ がわかります。

ス



O を通り直線 AB に垂直な直線 l を考えます。三角形 ABC において辺 AB を底辺とすると高さは線分 CD の長さとなり、その最大値は D が直線 l と線分 AB の交点になり、C と D の間に O がくる場合となります。

三角形 OAB は $OA = OB$ の二等辺三角形ですので D は線分 AB の中点となり、すなわち $AD = \frac{AB}{2} = 3$ となることから $OD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ となるので、 $\tan \angle OAD = \frac{4}{3}$ がわかります。

セソ CD が最大となる場合は $CD = OD + 5$ となる場合ですのでこのとき $CD = 9$ です。したがってこのときの三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$ と計算できます。

(2)

タ、チ 余弦定理により $\cos \angle QPR = \frac{PQ^2 + RP^2 - QR^2}{2 \cdot PQ \cdot RP} = \frac{8^2 + 9^2 + 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{120}{144} = \frac{5}{6}$ と計算できます。

ツ～ト $\sin \angle QPR = \sqrt{1 - \frac{5^2}{6^2}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ と計算できますので、三角形 PQR の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot RP \cdot \sin \angle QPR = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 6\sqrt{11} \text{ と計算できます。}$$

ナ T は線分 TH の長さが最大になるようにとることになります。このとき線分 TH は球の中心を通りますので、 $PH^2 = SH^2 + SP^2$ などから $PH^2 = QH^2 = RH^2 = 5^2 - SH^2$ がわかります。

したがって $PH = QH = RH$ がわかります。

ニ～ハ 球 S を平面 α で切断すると切り口は三角形 PQR の外接円になります。この半径を R とすると正弦定理により $\frac{QR}{\sin \angle QPR} = 2R$ となりますので $R = \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$ です。

これより $SH = \sqrt{5^2 - R^2} = 5\sqrt{1 - \frac{9}{11}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ がわかりますので、 $TH = 5 + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ です。

よって三角錐 TPQR の体積は $\frac{1}{3} \cdot \text{TH} \cdot \Delta\text{PQR} = \frac{1}{3} \cdot \left(5 + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right) \cdot 6\sqrt{11} = 2 \cdot 5 \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{2}) =$
 $10(\sqrt{11} + \sqrt{2})$ と計算できます。

第2問

[1]

- (1) ア データは52個あるので中央値が26番目と27番目の間にきます。したがって第1四分位数は13番目と14番目の間にきます。
度数は1000円以上1400円未満が2、1400円以上1800円未満が7、1800円以上2200円未満が11です。合計すると1800円未満は9、2200円未満は20ですので、第1四分位数は21800以上2200未満にくることがわかります。
- イ 第3四分位数は39番目と40番目の間にきます。
度数の総和を考えると2600円未満は27、3000円未満は37、3400円未満は45となりますので、第3四分位数は53000以上3400未満にくることがわかります。
- ウ 第1四分位数を q_1 、第3四分位数を q_3 とおくと四分位範囲は $q_3 - q_1$ です。
ここまでで $1800 \leq q_1 < 2200$ と $3000 \leq q_3 < 3400$ がわかりましたので、 $-2200 < q_1 \leq -1800$ より $3000 - 2200 < q_3 - q_1 < 3400 - 1800$ すなわち $800 < q_3 - q_1 < 1600$ が得られますので、四分位範囲は1800より大きく1600より小さいことがわかります。
- (2) エ それぞれ検証します。
- 0 地域Eは19市あるので中央値は10番目、第1四分位は5番目の値です。すなわち小さいほうから5番目は第1四分位の値と一致します。
図2をみると第1四分位数を表す箱の下辺は2000より上すなわち2000より大きい値をさしていることがわかりますので、誤りといえます。
 - 1 範囲は最大値(ひげの上端)と最小値(ひげの下端)の差であらわされます。
地域Eは最小値が1000以上で最大値が3800以下なので範囲は2800以下ですが、地域Wは最小値が1400以下で最大値が4800以上ですので範囲は3400以上あります。
よって地域Wの範囲は地域Eの範囲より大きいので、誤りといえます。
 - 2 中央値は箱の中間を横切る線として表現されます。地域Eでは2200あたり、地域Wでは2600以上をさしていますので、地域Wのほうが大きいです。ということで正しいといえます。
 - 3 値2600と箱ひげ図との関係でみると、地域Eは中央値と第3四分位の間、地域Wは第1四分位と中央値の間にきています。
ということで割合は地域Eは半分を超えますが地域Wは半分以下になります。なので地域Wのほうが大きくなることはないので、誤りといえます。
- これらより、あてはまるものは選択肢2の文となります。
- オ 地域Eのデータを e_1, \dots, e_{19} とおくと、平均 \bar{e} は $\bar{e} = \frac{e_1 + \dots + e_{19}}{19}$ となります。
また分散は $\frac{(e_1 - \bar{e})^2 + \dots + (e_{19} - \bar{e})^2}{19}$ と計算できます。ここで偏差とは平均との差ですのですなわち $|e_1 - \bar{e}|$ などとなります。
 $|e_1 - \bar{e}|^2 = (e_1 - \bar{e})^2$ ですので、分散はそれぞれの偏差の2乗を合計して地域Eの市の数で割った値と表現されます。
なお、選択肢の4は標準偏差の説明です。
- (3) カ 相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで求められます。
計算すると $\frac{124000}{590 \cdot 570} = \frac{1240}{59 \cdot 57} = \frac{1240}{3363} = 0,368\dots$ となるので、70.37と求められます。
($0.3 = \frac{1008.9}{3363}$ 、 $0.4 = \frac{1345.2}{3363}$ ですので、大雑把な絞り込みもできます)

[2]

(1)

キ, ク C_1 は P_0 と M すなわち $(0, 3)(4, 3)$ を通ります。 x^2 の係数を a 、 x の係数を k 、 定数項を m とおくと $m = 3, a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 3 = 3$ となりますので $m = 3, b = -4a$ となり、 すなわち C_1 の方程式は $y = ax^2 - 4ax + 3$ と表せます。

ケ, コ C_1 の式を平方完成すると $y = a(x - 2)^2 + 3 - 4a$ と表せますので、 シュートの高さは $x = 2$ の値である $-4a + 3$ となります。

サ ボールが最も高くなるときの地上の位置は、 プロ選手が 2、 花子さんが $2 - \frac{1}{8p}$ となります。

花子さんのシュートの高さは $2 - \frac{(16p - 1)^2}{64p}$ であり、 この値はゴールの高さである 3 より大きくないといけませんので、 少なくとも $\frac{(16p - 1)^2}{64p} < 0$ が必要です。 $16p - 1 = 0$ では不等式が成り立ちませんので $(16p - 1)^2 > 0$ がわかることから $\frac{1}{64p} < 0$ となり、 これより $p < 0$ がわかるので、 すなわち $2 - \frac{1}{8p} > 2$ です。

ということでボールが最も高くなるときの地上の位置は 2 つねに花子さんのほうが M の x 座標に近いことがわかります。

(2)

シ~ソ $AD = \frac{\sqrt{3}}{15}$ ですので D の y 座標は $3 + \frac{\sqrt{3}}{15}$ です。

また D の x 座標は $3.8 = \frac{19}{5}$ ですので C_1 の式に D の座標を代入すると

$3 + \frac{\sqrt{3}}{15} = a \cdot \left(\frac{19}{5}\right)^2 - 4a \cdot \frac{19}{5} + 3$ が成り立ちます。

$4 = \frac{20}{5}$ を利用するなどして計算すると $-\frac{1}{5} \cdot \frac{19}{5} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{15}$ となりますので $a = -\frac{5\sqrt{3}}{57}$ がわかります。

すなわち C_1 の方程式は $y = -\frac{5\sqrt{3}}{57}(x^2 - 4x) + 3$ となります。

タ プロ選手のシュートの高さを $a = -\frac{5\sqrt{3}}{57}$ にして計算すると $3 + \frac{20\sqrt{3}}{57}$ です。

おおよその値を計算すると $3 + \frac{34.6}{57} = 3 + 0.6 + \frac{0.2}{57}$ より 3.6 程度となりますので、 0 プロ選手のシュートの高さのほうが大きくなります。

チ シュートの高さの差は 0.2 くらいであり、 ボールの直径は 0.2 としていますので、 ボール 0 約 1 個分の 差があることがわかります。

第3問

(1)

ア～ウ 球1の色(5通り)を決めた後、球2は球1と異なる色(4通り)、球3は球2と異なる色(4通り)、球4は球3と異なる色(4通り)が選べるので、塗り方は $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320$ 通りになります。

(2)

エオ 球1の色(5通り)を決めた後、球2は球1と異なる色(4通り)、球3は球1球2いずれとも異なる色(3通り)が選べるので、塗り方は $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 通りとなります。

(3)

カキ 赤を2回使う場合、赤く塗れる球の組は1,3か2,4の2組です。いずれの場合も、残り2つは赤でなければ任意ですので、塗り方は $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ 通りとなります。

(4)

クケ 球2から球6はすべて球1とひもでつながっていますので、球1に使った色はそれ以上使えません。したがって赤と青は球2から球6に割り当てることになります。

さらに赤は3回、青は2回使いますので球2から球6はいずれも赤か青になります。

したがって球2から球6のうち赤にする球を選び、球1を赤青以外の3色から選ぶことになり、塗り方は ${}_5C_3 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 = 30$ 通りとなります。

(5)

コ 球3と球4が同色になる場合、この2球を同一視することができます。すなわち球3と球4をあわせて球3と考えることで選択肢2の図とみなすことができます。

サ～ス 図Fの塗り方のうち球3と球4とが同じ色になるものは図Cと同じになることがわかりましたので、すなわち60通りです。

図Fは図Bと同じように考えられますので塗り方は320通りあり、すなわち図Dの塗り方は $320 - 60 = 260$ 通りになるとわかります。

(6)

セ～チ まずは球4と球5がつながっていない状態で塗り方を考えます。球5から考えて以降はひもでつながる球と異なる4色を任意に選べますので塗り方は $5 \cdot 4^4 = 1280$ 通りとなります。

そのうち球4と球5が同じ色になる場合は、(5)の考察からこの2球を同一視して図Dの塗り方と同じ数になることがわかります。

これより、図Gでの塗り方は $1280 - 260 = 1020$ 通りになることがわかります。

第4問

(1)

アイ $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ 、 $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ ですので、両方を割り切る最大の素数は11です。

ウ～カ 正方形、すなわち横と縦の長さが等しくなる場合、辺の長さは赤い長方形の辺の長さの最小公倍数です。すなわち縦に 21 行、横に 5 列並べることで得られる一辺 $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \underline{2310}$ の正方形が最小となります。

キク 462 と 110 の最大公約数は $2 \cdot 11 = 22$ ですので、横と縦の長さの差は 22 の倍数になります。すなわち正方形でなければ差の最小値は22です。

ケ～シ 横に a 列縦に b 行ならべて長方形を作るとき、縦が横より 22 だけ長くなる場合 $110b - 462a = 22$ より $5b - 21a = 1$ がわかります。

$5b - 21a = 5(b - 4a) - a$ とできますので $a = -1, b = -4$ がこの等式をみたす 1 組としてみつかります。ここから整数解は整数 k を用いて $a = 5k - 1, b = 21k - 4$ とできますので、 a としてありうる最小の整数は $k = 1$ のときの $a = 4$ ($b = 17$) です。

このとき、よこの長さは $462 \cdot 4 = \underline{1848}$ となります。

(2)

ス～ソ できる長方形の縦の長さは赤と青の長方形の縦の長さの公倍数です。 $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ ですので、最小のものは縦の長さが最小公倍数である $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \underline{770}$ となります。

タチ $363 = 3 \cdot 11^2$ ですので、462 と 363 の最大公約数は $3 \cdot 11 = \underline{33}$ です。

ツ～ナ 33 の倍数で 770 の倍数でもある最小のものはこの 2 数の最小公倍数ですので、すなわち $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \underline{2310}$ です。

ニ～ノ 2310 の倍数ならば縦にならべることは可能ですので、横に並べる場合を小さい値から考えていきます。赤い長方形を横に x 列、青い長方形を横に y 列並べることを考えると、 $462x + 363y = 2310$ より $14x + 11y = 70$ です。

いま $x = 5, y = 0$ が解の 1 つとわかっていますので整数解は $x = 5 + 11k, y = -14k$ となりますが、このとき x, y がともに正の値になる k はありません。

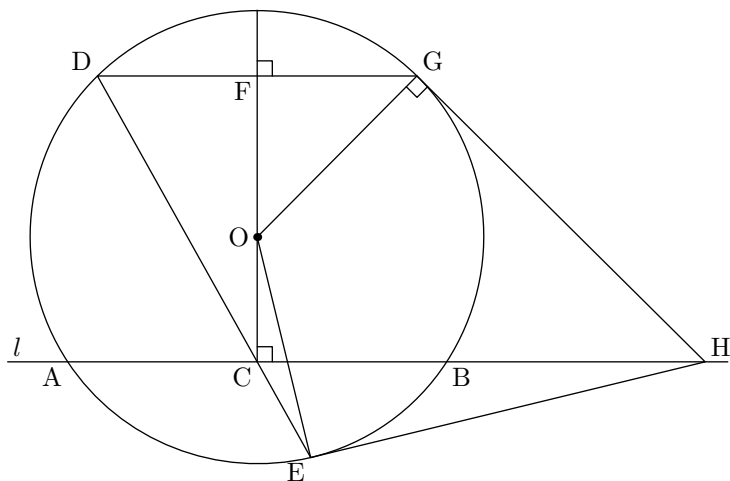
つぎに $2 \cdot 2310$ の正方形を考えると、同様に $14 + 11y = 140$ となり、整数解が $x = 10 + 11k, y = -14k$ となりますが、やはり正の値になる k はありません。

さらに $3 \cdot 2310$ の正方形を考えて同様にすると整数解は $x = 15 + 11k, y = -14k$ となり、 $k = -1$ のとき正の整数解 $(x, y) = (4, 14)$ がみつかります。

したがって求める最小の長さは $3 \cdot 2310 = \underline{6930}$ であることがわかります。

第5問

(1)



アイ Eが円O上の点ですので、直線EHが円Oの接線であるためには $\angle OEH = 90^\circ$ を示すことになります。

ウ 三角形OABが $OA=OB$ の二等辺三角形であること、Hが直線AB上にくることから $\angle OCH = 90^\circ$ がわかります。

また直線GHはGにおける円Oの接線ですので $\angle OGH = 90^\circ$ もわかります。

すなわち $\angle OCH + \angle OGH = 180^\circ$ ですので、4点C,G,H,Qが同一円周上にくることがわかります。

エ このことから $\angle CHG + \angle COG = 180^\circ$ がわかります。

さらに $\angle COG + \angle FOG = 180^\circ$ もわかりますので、 $\angle CHG = \angle FOG$ がわかります。

オ 三角形ODGは $OD=OG$ の二等辺三角形であり $DG \perp OF$ ですので $\angle FOG = \angle FOD$ がわかり、すなわち $\angle GOD = 2\angle FOG$ がわかります。

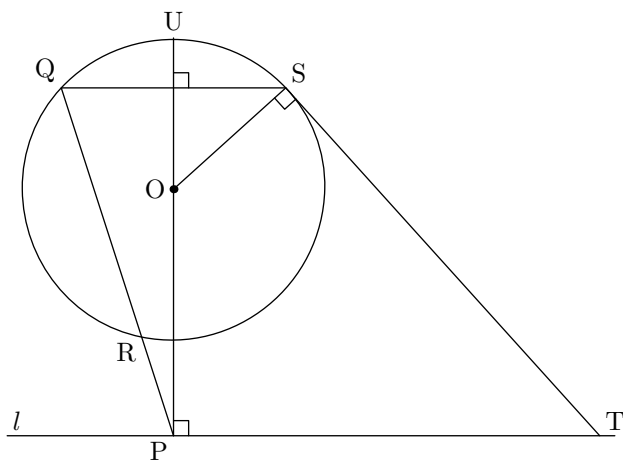
また、円周角の定理により $\angle GED = 2\angle FOG$ もわかります。

これにより $\angle FOG = \angle DEG$ がわかります。

カ D,C,Eはこの順に一直線上にきますので、 $\angle DEG = \angle CEG$ です。したがって $\angle CHG = \angle CEG$ となることから、4点C,G,H,Eが同一円周上にくることがわかります。

これより $\angle OEH = \angle OCH = 90^\circ$ なので証明が完成します。

(2)



キ (1)での考察と同様に、 $\angle OPT = \angle OST = 90^\circ$ ですので $\angle POS + \angle PTS = 180^\circ$ がわかります。
さらに直線 OP と円 O との交点のうち線分 OP 上にこないものを U とおくと、 $\angle SOU + \angle POS = 180^\circ$
より $\angle PTS = \angle SOU$ がわかり、また $\angle QOS = 2\angle SOU = 2\angle QRS$ がわかりますので、すなわち
 $\angle SOU = \angle QRS$ となり、 $\angle PTS = 3\angle QRS$ がわかります。

ク～コ $\angle PRS + \angle QRS = 180^\circ$ でありまた $\angle PTS = \angle QRS$ より $\angle PRS + \angle PTS = 180^\circ$ ですので、3点 P,T,S
を通る円は O,R も通ります。

すなわち 3点 O,P,R を通る円は T も通り、また $\angle OPT = 90^\circ$ ですので線分 OT が直径になります。

したがって半径は $\frac{OT}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ となります。

サ OT が直径ですので三角形 ORT は $\angle ORT = 90^\circ$ の直角三角形です。

したがって三平方の定理 $OT^2 = OR^2 + RT^2$ がわかり、線分 OR は円 O の半径ですので
 $RT = \sqrt{OT^2 - OR^2} = \sqrt{54 - 5} = 7$ がわかります。

所感

細かい計算がいろいろ見られました。選択問題は傾向が割れており、ひとそれぞれにやりやすいものがあったと思われます。

第1問

[1]

不等式に関する問題です。絶対値のはずしかたや不等号の変形に少し注意です。最後はいろいろ試すことになるかもしれません。

[2]

図形と計量に関する問題です。三角比の知識や運用が問われます。また、面積や体積が最大になる条件がどうなるかは直感でいけると思いますがちゃんと説明しようとするとなんて手がかかるかもしれません。

第2問

[1]

データの分析に関する問題です。問題数は少なくないですが面倒な計算は少ないので解きやすいと思います。

[2]

二次関数に関する問題です。放物線が出る状況を取り上げたもので、細かい計算が多く手がかります。

第3問

場合の数に関する問題です。前半は単純ですが、後半は図の同一視といった考え方や応用を見つけないと大変です。

第4問

整数の性質に関する問題です。数が大きいですが公約数も大きく、また考えるであろう不定方程式は比較的簡単に解が1つみつかるので、計算が得意なら解きやすい部類です。

第5問

図形の性質に関する問題です。円の性質をひとつひとつ使って進めていくことになります。図を描くのが好きならば比較的解きやすいと思われます。