

解答

第1問		
解答欄	正解	配点
アイ, ウエ	-1,-2(順不同)	3
オ	8	3
カ	3	4
キ	1	1
ク	3	2
ケ	0	2
コ	1	1
サ, シ	1,3	1
ス	2	1
セ, ソ, タ	2,3,2	2

第3問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウ	7,2,3	4
エ, オ	4,4	3
カ, キク	4,16	4
ケ	0	2
コ	2	2
サシス	400	3
セソタ, チ	560,7	3
ツテト	280	3
ナニヌネ	8400	3
ノハヒ	250	3

第2問		
解答欄	正解	配点
ア	8	2
イウ	90	2
エ	4	2
オ	4	2
カ	1	2
キ	1	1
ク	0	1
ケ	0	2
コ	3	2
サ, シ	7,3	2
ス, セ	2,2	2
ソ, タ	2,4	3
チツ, テ	-3,4	3
ト, ナ	4,5	2
ニ	5	2

第4問		
解答欄	正解	配点
ア	4	2
イ, ウ	0,3(順不同)	3
エ	5	4
オ	3	3
カキク	240	2
ケ, コ	3,0	2
サ	6	2
シ	3	2

解説

第1問

[1]

①の式から絶対値を外すと $-3 < ax - b - 7 < 3$ となり、すなわち $4 < ax - b < 10$ がわかります。

(1)

ア～エ $a = -3, b = -2$ のとき①の式は $4 < -3x + 2 < 10$ となります。それぞれから2を引くと $2 < -3x < 8$ となります。これを -3 で割ると $-\frac{2}{3} > x > -\frac{8}{3}$ となりますので、 P はこの範囲にくる整数からなる集合、すなわち $P = \{-2, -1\}$ となります。

(2) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、①の式は $4 < \frac{x}{\sqrt{2}} - b < 10$ となります。

(i) オ $b = 1$ のとき①の式は $4 < \frac{x}{\sqrt{2}} - 1 < 10$ より $5\sqrt{2} < x < 11\sqrt{2}$ となります。

$5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ ですので $7 < 5\sqrt{2} < 8$ 、 $11\sqrt{2} = \sqrt{242}$ ですので $15 < 11\sqrt{2} < 16$ です。

したがって①をみたす整数は8以上15以下の整数ですのであわせて8個となります。

(ii) カ ①の式は $(b+4)\sqrt{2} < x < (b+10)\sqrt{2}$ となります。 b の値を小さいものから検証します。

$b = 2$ のとき $6\sqrt{2} < x < 12\sqrt{2}$ です。 $6\sqrt{2} = \sqrt{72}$ ですので $8 < 6\sqrt{2} < 9$ 、 $12\sqrt{2} = \sqrt{288}$ ですので $16 < 12\sqrt{2} < 17 (= \sqrt{289})$ です。すなわち①をみたす整数は9以上16以下の8個です。

$b = 3$ のときは $7\sqrt{2} < x < 13\sqrt{2}$ です。 $7\sqrt{2} = \sqrt{98}$ より $9 < 7\sqrt{2} < 10$ 、 $13\sqrt{2} = \sqrt{338}$ より $18 (= \sqrt{324}) < 13\sqrt{2} < 19 (= \sqrt{361})$ ですので①をみたす整数は10以上18以下の9個です。したがって求める値は $b = 3$ となります。

[2]

(1) キ 「 p かつ q 」はすなわち p, q 両方をみたすという条件ですので不等式で表すと $3 < x \leq 5$ と表されます。

これは r である $x \leq 5$ に含まれますが一致しません。すなわち「『 p かつ q 』ならば r 」は成立しますがその逆は成立しないので「 p かつ q 」は r であるための1)十分条件であるが必要条件でないことがわかります。

ク \bar{p} とは p ではない、という条件ですすなわち「 $x < -1$ または $5 < x$ 」です。ということで「 \bar{p} かつ q 」は不等式で表すと $5 < x < 6$ となり、 $x \leq 5$ に対して含む、含まれるの関係がいずれもありません。ということで「 \bar{p} かつ q 」は r であるための3)必要条件でも十分条件でもないことがわかります。

ケ \bar{q} は「 $x \leq 3$ または $6 \leq x$ 」です。「 p または \bar{q} 」はすなわち p, \bar{q} どちらかをみたしていればよいという条件です。ということでこれを不等式で表すと「 $x \leq 5$ または $6 \leq x$ 」です。これは r を含みますが含まれません。ということで「 p または \bar{q} 」は r であるための0)必要条件であるが十分条件でないことがわかります。

(2) コ $a > 0$ ですので問題の不等式は両辺を a で割って
$$\left(x - \frac{2}{a}\right)(x - a - 1) \leq 0$$
とできます。すなわち A は $\frac{2}{a}$ と $a+1$ の間の値全体です。ということで $\frac{2}{a}$ と $a+1$ との大小で場合分けすることになります。

$\frac{2}{a} < a+1$ を考え、整理すると $a^2 + a - 2 > 0$ より $(a+2)(a-1) > 0$ となります。

これを解くことで $1 < a$ となります。

同様に考えると $0 < a < 1, a = 1, 1 < a$ で場合分けすることになります。

サ、シ $0 < a < 1$ のとき $(a+2)(a-1) < 0$ となりますのでたどることで $\frac{2}{a} > a+1$ となります。ということで $A = \{x | \underline{1a+1} \leq x \leq \underline{3\frac{2}{a}}\}$ となります。

ス $a = 1$ のとき問題の不等式は $(x-2)^2 \leq 0$ となります。これをみたす x は $x = 2$ のみですので $A = \{2\}$ となります。

セ～タ 「 p かつ q 」は「 $3 < x \leq 5$ 」ですので $B = \{x | 3 < x \leq 5\}$ です。すなわち $A \cap B$ が空集合となる場合はこの範囲に入っていない場合です。 a で場合分けして考えましょう。

$0 < a < 1$ のときは $\frac{2}{a} \leq 3$ または $5 < a+1$ のときに空集合となります。これを解くと $\frac{2}{3} \leq a$ または $4 < a$ ですので条件から

$\frac{2}{3} \leq a < 1$ となります。

$a = 1$ のとき $A = \{2\}$ ですので B に含まれず、すなわち $A \cap B$ が空集合となります。

$1 < a$ のときは $1 + a \leq 3$ または $5 < \frac{2}{a}$ のときに空集合となります。これを解くと $a \leq 2$ または $a < \frac{2}{5}$ ですので条件から $1 < a \leq 2$ となります。

これらを合わせて、求める範囲は $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ となります。

第2問

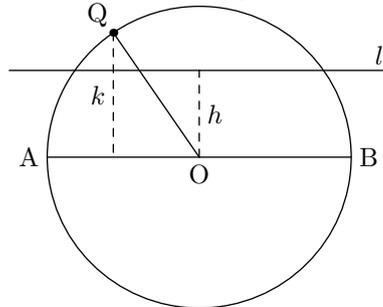
- (1) ア 正弦定理から $\frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R$ です。 $AB=8$ ですので $2R = \frac{8}{\sin \angle APB}$ となります。

イウ $0^\circ < \angle APB < 180^\circ$ ですので $\sin \angle APB$ は正の値をとります。
したがって R が最小となる場合は $\sin \angle APB$ が最大となる場合
です。

その場合の角度は $\angle APB = 90^\circ$ となります。

- エ $\angle APB = 90^\circ$ を代入すると $2R = \frac{8}{\sin 90^\circ}$ となりますので
 $R = \frac{4}{\sin 90^\circ} = 4$ となります。

- (2) オ 直線 l が円 C と共有点をもつ場合は、 C 上の点と l との距離が h となりうる場合です。



C の中心を O とすると O は線分 AB の中点であり、 C 上に点 Q をとると Q と直線 AB との距離は $OQ \cdot \sin \angle QOA$ と表せます。

C の直径は 8 ですので半径は 4 となり、すなわち

$OQ \cdot \sin \angle QOA = 4 \sin \angle QOA$ となります。

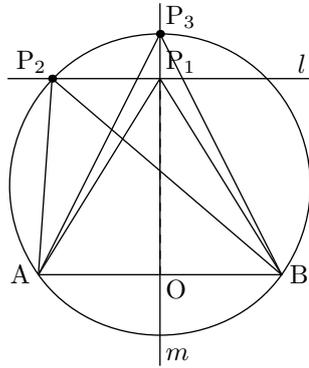
$0^\circ \leq \angle QOA \leq 180^\circ$ より Q と直線 AB との距離

($= OQ \cdot \sin \angle QOA$) を k とすると $0 \leq k \leq 4$ となります。

すなわち $h \leq 4$ であれば C 上に距離が h となる点がありますので
すなわち l と共有点をもつこととなります。

- (i) カ R は円 C 上にくるときに最小となります。いま l は C と共有点をもちますので P を円 C と l との交点にとることができます。

線分 AB は円 C の直径ですのでこのとき $\angle APB = 90^\circ$ となります。
すなわち三角形 ABP は 直角三角形 となります。



(ii)

キ $\angle AP_3B$ と $\angle AP_2B$ は三角形 ABP_2 の外接円の弧 AB に対する円周角ですので $\angle AP_3B = \angle AP_2B$ が成り立ちます。

ク $\angle AP_1B = \angle AP_3B + \angle P_3AP_1 + \angle P_3BP_1$ ですので $\angle AP_3B < \angle AP_1B < 90^\circ$ となり、すなわち $\sin \angle AP_3B < \sin \angle AP_1B$ がわかります。

ケ 三角形 ABP_1 の外接円の半径を R_1 とすると $2R_1 = \frac{AB}{\sin \angle AP_1B}$

となるので $R_1 = \frac{4}{\sin \angle AP_1B}$ となります。

同様に三角形 ABP_2 の外接円の半径を R_2 とすると

$R_2 = \frac{4}{\sin \angle AP_2B}$ となります。

いま $0 < \sin \angle AP_3B < \sin \angle AP_1B$ であり $\sin \angle AP_3B = \sin \angle AP_2B$

ですので $0 < \sin \angle AP_2B < \sin \angle AP_1B$ となり、これより

$\frac{4}{\sin \angle AP_1B} < \frac{4}{\sin \angle AP_2B}$ となり、すなわち $R_1 < R_2$ がわかります。

コ ここまでの考察により P を l と m の交点にとらない場合の R は l と m との交点にとった場合より大きくなることがわかりましたので、 P を l と m との交点にとった場合が最小となります。ここに P がくるとき $PA=PB$ が成り立ちますので三角形 ABP は 二等辺三角形 となります。

(3) (i)

サ、シ $\sqrt{7} < 4$ ですので $\angle APB = 90^\circ$ です。

$h = CP \sin \angle ACP$ ですので $\sin \angle ACP = \frac{\sqrt{7}}{4}$ となります。

$\angle ACP \leq 90^\circ$ より $\cos \angle ACP = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ACP} = \frac{3}{4}$ となります。

これより $\tan \angle ACP = \frac{\sin \angle ACP}{\cos \angle ACP} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ となります。

ス、セ 三角形 ACP に余弦定理を適用します。

$AP^2 = AC^2 + PC^2 - 2AC \cdot PC \cos \angle ACP$ に値を代入するこ

とで

$$AP = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ となります。}$$

ソ, タ 同様に余弦定理を適用します。

$$\cos \angle APC = \frac{AP^2 + PC^2 - AC^2}{2 \cdot AP \cdot PC} = \frac{8 + 4^2 - 4^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ となります。}$$

チ～テ $\angle PCB = 180^\circ - \angle PCA$ ですので

$$\cos \angle PCB = -\cos \angle PCA = -\frac{3}{4} \text{ となります。}$$

(ii)

ト, ナ $h = 8$ のとき R が最小となる場合は $AP = AB$ となる場合です。このとき $PC = 8$ となりますので

$$AP = BP = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \text{ となります。これより}$$

$$\cos \angle APB = \frac{AP^2 + PB^2 - AB^2}{2 \cdot AP \cdot PB} = \frac{80 + 80 - 64}{2 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \text{ となります。}$$

したがって $0^\circ < \angle APB < 180^\circ$ より

$$\sin \angle APB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle APB} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \text{ となります。}$$

$$\therefore 2R = \frac{8}{\sin \angle APB} \text{ より } R = \frac{4}{\frac{4}{5}} = 5 \text{ となります。}$$

第3問

[1]

(1)

ア～ウ G の式を $y = x^2 + kx + l$ とおきます。2点 $(2,0)(0,3)$ を通るとして
いますので $0 = 2^2 + 2k + l, 3 = 0^2 + 0 \cdot k + l$ が成り立ちます。
整理すると $2k + l = -4, l = 3$ ですので $k = -\frac{7}{4}$ となり、 G の方
程式は $y = x^2 - \frac{7}{4}x + 3$ となります。

(2)エ, オ G の頂点を (p, q) とすると G の式は $y = (x - p)^2 + q$ と表せます。
いま $(2,0)(0, a)$ を通るとしてありますので代入して
 $0 = (2 - p)^2 + q, a = p^2 + q$ となります。差をとると
 $a = p^2 - (2 - p)^2$ すなわち $a = 4p - 4$ となりますのでここから
 $p = \frac{a+4}{4}$ がわかります。

カ～ク $0 = (2 - p)^2 + q$ より
 $q = -(2 - p)^2 = -\left(2 - \frac{a+4}{4}\right)^2 = -\left(\frac{4-a}{4}\right)^2 = -\frac{(a-4)^2}{16}$ が
わかります。

ケ, コ $1 \leq p \leq 2$ なのですから $1 \leq \frac{a+4}{4} \leq 2$ がわかります。これを
整理すると $0 \leq a \leq 4$ となります。
また、 $-\frac{9}{4} \leq q \leq -\frac{1}{4}$ なので $-\frac{9}{4} \leq -\frac{(a-4)^2}{16} \leq -\frac{1}{4}$ です。
符号に注意すると $4 \leq (a-4)^2 \leq 36$ となりますので $2 \leq |a-4| \leq 6$
です。

いま p の条件から $0 \leq a \leq 4$ でなければならないことがわかって
いますので $a - 4 \leq 0$ となり、これより $-6 \leq a - 4 \leq -2$ がわか
ります。これを整理すると $-2 \leq a \leq 2$ です。

よって共通部分をとることで $0 \leq a \leq 2$ であることがわかります。

[2]

(1)

サ～ス 価格が50円上がると50皿減るということは1円上がると $\frac{50}{50}(=1)$ 皿減るということです。すなわち売り上げ数はある値 N を用いて $N - x$ 皿と表されます。

$x = 200$ のときこの値は200ですので $N - 200 = 200$ が成り立ちます。

これより $N = 400$ ですので売り上げ数は $400 - x$ と表されることがわかります。

(2)

セ～チ 利益は売り上げ金額から経費を引くことで求めますから売り上げを S 円、経費を C 円とおきます。

売り上げ金額は1皿あたりの価格と売り上げ数の積としていきますのでこの値を計算します。

1皿あたり x 円、また売り上げ数は①の式を用いて $(400 - x)$ 皿としますのですなわち $S = x(400 - x) = -x^2 + 400x$ です。

次に経費を考えます。経費は賃貸料と材料費の合計で計算します。材料は予想売り上げ数の分だけ仕入れ、また1皿あたり160円ですので材料費はこれらの積なのですなわち $(400 - x) \cdot 160$ (円) と表されます。

また賃貸料は6000円ですのでこれを加算して

$C = 6000 + 160 \cdot (400 - x) = 70000 - 160x$ となります。

これより利益は $y = S - C = -x^2 + 560x - 7 \cdot 10000$ となります。

(3)

ツ～ト 利益の最大とはすなわち y の最大値です。②の式を平方完成すると

$y = -(x - 280)^2 + 280^2 - 70000$ とできます。

1皿あたり280円にすると売り上げ数は120皿と予想できますのでどちらも値として成立します。ということで280円のときに利益が最大になります。

ナ～ネ 平方完成した式に $x = 280$ を代入して利益を計算すると

$y = 280^2 - 70000 = 78400 - 70000 = 8400$ 円となります。

(4)

ノ～ヒ 利益が7500円以上とはすなわち $y \geq 7500$ となることですので②の式を代入します。すると

$-x^2 + 560x - 70000 \geq 7500$ です。移項して整理すると
 $x^2 - 560x + 77500 \leq 0$ となります。

平方完成により $(x - 280)^2 + 77500 - 78400 = (x - 280)^2 - 900$
 $= (x - 280 + 30)(x - 280 - 30) = (x - 250)(x - 310)$ となります
ので利益が 7500 円になるような価格は $250 \leq x \leq 310$ となりま
す。

250 円ならば売り上げ予想は 150 皿となりますので値として適切
です。したがって最も安い価格は250円となります。

第4問

- (1) ア データは47個ありますので中央値は小さいほうから $\frac{47+1}{2} = 24$ 番目の値です。

ヒストグラムから75人未満は $12+11=23$ 個、100人未満は $23+4=27$ 個ありますので、中央値を含む階級は75人以上100人未満です。問題文には平均値が96.4人とあり、これは75人以上100人未満の階級に含まれます。したがって中央値と ${}_4$ 平均値は同じ階級に含まれることがわかります。

- イ、ウ 第1四分位数は中央値をとるデータの手前まで(中央値と同一の値が何個であっても23個)の中央値ですので、12番目の値です。

ヒストグラムから50人未満は12個ありますのですなわち第1四分位数は25人以上50人未満の階級に含まれます。

また、これより下の階級は度数が0ですので最小値もこの階級に含まれることがわかります。

さらに、この階級はヒストグラムでもっとも度数が大きいですので最頻値もこの階級に含まれることがわかります。

したがって第1四分位数と ${}_0$ 最小値と ${}_3$ 最頻値が同じ階級に含まれることがわかります。

(なお、第3四分位数は125人以上150人未満の階級、最大値は225人以上250人未満の階級に含まれる)

- (2) エ それぞれ検証しましょう。

- (I) 小学生数の第1四分位数は550人付近、第3四分位数は575人付近なので四分位範囲は25人程度です。

一方、外国人数の第1四分位数は50人付近、第3四分位数は150人付近なので四分位範囲は100人程度です。

したがって四分位範囲は外国人数のほうが大きいといえますので、誤りといえます。

- (II) 旅券取得者数は最小が150人未満、最大が500人以上ですので範囲は350人より大きいです。

一方、外国人数の最小は25人付近、最大は250人付近ですので範囲は225人程度です。

したがって範囲は旅券取得者数のほうが大きいので正しいといえます。

- (III) 旅券取得者数と小学生数については、旅券取得者数が多いところでも小学生数はあまり変化していないように読み取れます。

一方、旅券取得者数が多いところは外国人数は多くなっている傾向がみられます。

したがって相関係数は旅券取得者数と外国人数の相関係数の
ほうが大きいといえますので、誤りといえます。

これらより、正しいものは 5(I) 誤、(II) 正、(III) 誤 となります。

(3) オ 問題文の等式を代入すると

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}\{x_1f_1 + (x_1 + h)(f_2) + \cdots + (x_1 + (k-1)h)f_k\} \\ &= \frac{1}{n}(x_1f_1 + x_1f_2 + \cdots + x_1f_k) \\ &\quad + \frac{1}{n}\{hf_2 + 2hf_3 + \cdots + (k-1)hf_k\} \\ &= \frac{x_1}{n}(f_1 + f_2 + \cdots + f_k) + \frac{h}{n}\{f_2 + 2f_3 + \cdots + (k-1)f_k\}\end{aligned}$$

となります。 $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = n$ に注意すると

$$3\bar{x} = x_1 + \frac{h}{n}\{f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \cdots + (k-1)f_k\} \text{ と変形できます。}$$

カ～ク いま階級の幅がすべて 100、度数が 0 でない最小の階級値は $\frac{50+150}{2} = 100$ ですので、得られた式を利用すると

$$\bar{x} = 100 + \frac{100}{47}(25 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = 100 + \frac{6600}{47}$$

となります。 $\frac{6600}{47} = 140 + \frac{20}{47} < 140.5$ ですので四捨五入すると \bar{x} は $100+140=240$ となります。

(4) ケ、コ $l = 1, 2, \dots, k$ において

$$(x_l - \bar{x})^2 f_l = \{x_l^2 - 2\bar{x} \cdot x_l + (\bar{x})^2\} f_l = x_l^2 f_l - 2\bar{x} \cdot x_l f_l + (\bar{x})^2 f_l \text{ と}$$

できます。ここから \bar{x} の多項式と考えて項別に計算しましょう。

すると \bar{x} の項の係数は $2(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k)$ 、

$(\bar{x})^2$ の係数は $f_1 + f_2 + \cdots + f_k$ となります。

$\frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k)$ がデータの平均ですのですなわち

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k = n\bar{x} \text{ です。}$$

さらに $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = n$ ですので

$$s^2 = \frac{1}{n}\{(x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \cdots + x_k^2 f_k) - 2\bar{x} \cdot n\bar{x} + (\bar{x})^2 \cdot n\}$$

となります。

サ ここから $s^2 = \frac{1}{n}\{(x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \cdots + x_k^2 f_k) - n(\bar{x})^2\}$ となります
のですなわち

$$s^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \cdots + x_k^2 f_k) - n(\bar{x})^2 \text{ となります。}$$

シ ①の式と $\bar{x} = 240$ を使用すると

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{47}(100^2 \cdot 4 + 200^2 \cdot 25 + 300^2 \cdot 14 + 400^2 \cdot 3 + 500^2 \cdot 1) - 240^2 \\ &= \frac{3030000}{47} - 57600 = 64468 + \frac{4}{47} - 57600 = 6868 + \frac{4}{47} \text{ と計算で}\end{aligned}$$

きます。

したがって最も近いものは 36900 といえます。

所感

第1日程の問題より難しいものが多い印象でした。

第1問

[1]

不等式の問題と集合の問題を合わせたような小問です。
少ないですが(2)(ii)は少々面倒な検証をすることになります。

[2]

集合と論理の分野に2次関数の要素を合わせた小問です。
場合分けをするので面倒です。

第2問

図形と計量に関する問題です。
分量は多いですが複雑な計算は求められませんので、解きやすいと思います。

第3問

2次関数に関する問題です。

[1]

ひねりはないですが文字を含んだ計算に注意しましょう。

[2]

共通テストらしい問題といえます。変数設定はちゃんと読みましょう。

第4問

データの分析に関する問題です。問題数が多く、また細かい検証や桁の大きい計算が求められるので、かなり難しいといえます。