## 解答

| 第１問 | | |
|---|---|---|
| 解答欄 | 正解 | 配点 |
| アイ, ウエ | **-1,-2(順不同)** | **3** |
| オ | **8** | **3** |
| カ | **3** | **4** |
| キ | **8** | **2** |
| クケ | **90** | **2** |
| コ | **4** | **2** |
| サ | **4** | **2** |
| シ | **1** | **2** |
| ス | **1** | **1** |
| セ | **0** | **1** |
| ソ | **0** | **2** |
| タ | **3** | **2** |
| チ, ツ | **4,5** | **2** |
| テ | **5** | **2** |

| 第２問 | | |
|---|---|---|
| 解答欄 | 正解 | 配点 |
| アイウ | **400** | **3** |
| エオカ, キ | **560,7** | **3** |
| クケコ | **280** | **3** |
| サシスセ | **8400** | **3** |
| ソタチ | **250** | **3** |
| ツ | **5** | **4** |
| テ | **3** | **3** |
| トナニ | **240** | **2** |
| ヌ, ネ | **3,0** | **2** |
| ノ | **6** | **2** |
| ハ | **3** | **2** |

| 第３問 | | |
|---|---|---|
| 解答欄 | 正解 | 配点 |
| アイ, ウエ | **11,12** | **2** |
| オカ, キク | **17,24** | **2** |
| ケ, コサ | **9,17** | **3** |
| シ, ス | **1,3** | **3** |
| セ, ソ | **1,2** | **3** |
| タチ, ツテ | **17,36** | **3** |
| トナ, ニヌ | **12,17** | **4** |

| 第４問 | | |
|---|---|---|
| 解答欄 | 正解 | 配点 |
| ア, イ, ウ, エ | **3,2,1,0** | **3** |
| オ | **3** | **3** |
| カ | **8** | **3** |
| キ | **4** | **3** |
| クケ, コ, サ, シ | **12,8,4,0** | **4** |
| ス | **3** | **2** |
| セソタ | **448** | **2** |

| 第５問 | | |
|---|---|---|
| 解答欄 | 正解 | 配点 |
| ア | **5** | **2** |
| イ, ウ, エ | **2,6,7** | **2** |
| オ | **1** | **1** |
| カ | **2** | **2** |
| キ | **2** | **1** |
| ク, ケコ | **2,15** | **2** |
| サシ | **15** | **3** |
| ス, セソ | **3,15** | **2** |
| タ, チ | **4,5** | **2** |
| ツ, テ | **5,3** | **3** |

# 解説

## 第 1 問

**[1]**

①の式から絶対値を外すと $-3 < ax - b - 7 < 3$ となり、
すなわち $4 < ax - b < 10$ がわかります。

(1)

ア〜エ $a = -3, b = -2$ のとき①の式は $4 < -3x + 2 < 10$ となります。それぞれから 2 を引くと $2 < -3x < 8$ となります。これを $-3$ で割ると $-\dfrac{2}{3} > x > -\dfrac{8}{3}$ となりますので、$P$ はこの範囲にくる整数からなる集合、すなわち$\underline{P = \{-2, -1\}}$となります。

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、①の式は $4 < \dfrac{x}{\sqrt{2}} - b < 10$ となります。

(i) オ $b = 1$ のとき①の式は $4 < \dfrac{x}{\sqrt{2}} - 1 < 10$ より $5\sqrt{2} < x < 11\sqrt{2}$ となります。
$5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ ですので $7 < 5\sqrt{2} < 8$、$11\sqrt{2} = \sqrt{242}$ ですので $15 < 11\sqrt{2} < 16$ です。
したがって①をみたす整数は 8 以上 15 以下の整数ですのであわせて$\underline{8}$個となります。

(ii) カ ①の式は $(b + 4)\sqrt{2} < x < (b + 10)\sqrt{2}$ となります。$b$ の値を小さいものから検証します。
$b = 2$ のとき $6\sqrt{2} < x < 12\sqrt{2}$ です。$6\sqrt{2} = \sqrt{72}$ ですので $8 < 6\sqrt{2} < 9$、$12\sqrt{2} = \sqrt{288}$ ですので $16 < 12\sqrt{2} < 17(= \sqrt{289})$ です。すなわち①をみたす整数は 9 以上 16 以下の 8 個です。
$b = 3$ のときは $7\sqrt{2} < x < 13\sqrt{2}$ です。$7\sqrt{2} = \sqrt{98}$ より $9 < 7\sqrt{2} < 10$、$13\sqrt{2} = \sqrt{338}$ より $18(= \sqrt{324}) < 13\sqrt{2} < 19(= \sqrt{361})$ ですので①をみたす整数は 10 以上 18 以下の 9 個です。したがって求める値は$\underline{b = 3}$となります。

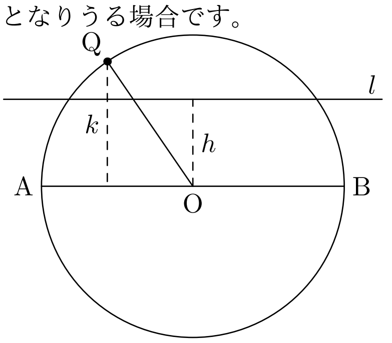
[**2**]

(1)　キ　正弦定理から $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}=2R$ です。AB=8 ですので $2R=\underline{\dfrac{8}{\sin\angle\mathrm{APB}}}$ となります。

クケ　$0^\circ<\angle\mathrm{APB}<180^\circ$ ですので $\sin\angle\mathrm{APB}$ は正の値をとります。
したがって $R$ が最小となる場合は $\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となる場合です。
その場合の角度は $\angle\mathrm{APB}=\underline{90^\circ}$ となります。

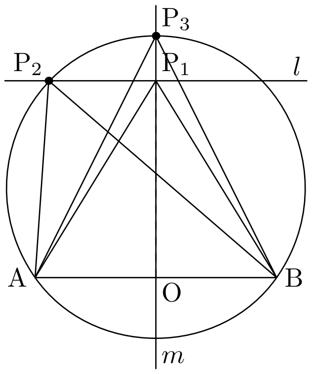
コ　$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ を代入すると $2R=\dfrac{8}{\sin 90^\circ}$ となりますので
$R=\dfrac{4}{\sin 90^\circ}=\underline{4}$ となります。

(2)　サ　直線 $l$ が円 C と共有点をもつ場合は、C 上の点と $l$ との距離が $h$ となりうる場合です。




C の中心を O とすると O は線分 AB の中点であり、C 上に点 Q をとると Q と直線 AB との距離は $\mathrm{OQ}\cdot\sin\angle\mathrm{QOA}$ と表せます。
C の直径は 8 ですので半径は 4 となり、すなわち
$\mathrm{OQ}\cdot\sin\angle\mathrm{QOA}=4\sin\angle\mathrm{QOA}$ となります。
$0^\circ\leq\angle\mathrm{QOA}\leq 180^\circ$ より Q と直線 AB との距離
$(=\mathrm{OQ}\cdot\sin\angle\mathrm{QOA})$ を $k$ とすると $0\leq k\leq 4$ となります。
すなわち $\underline{h\leq 4}$ であれば C 上に距離が $h$ となる点がありますのですなわち $l$ と共有点をもつことになります。

(i)　シ　$R$ は円 C 上にくるときに最小となります。いま $l$ は C と共有点をもちますので P を円 C と $l$ との交点にとることができます。
線分 AB は円 C の直径ですのでこのとき $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ となります。すなわち三角形 ABP は $_1$<u>直角三角形</u>となります。




(ii)

ス $\angle \mathrm{AP_3B}$ と $\angle \mathrm{AP_2B}$ は三角形 $\mathrm{ABP_2}$ の外接円の弧 AB に対する円周角ですので ${}_1\underline{\angle \mathrm{AP_3B} = \angle \mathrm{AP_2B}}$が成り立ちます。

セ $\angle \mathrm{AP_1B} = \angle \mathrm{AP_3B} + \angle \mathrm{P_3AP_1} + \angle \mathrm{P_3BP_1}$ ですので $\angle \mathrm{AP_3B} < \angle \mathrm{AP_1B} < 90^\circ$ となり、すなわち ${}_0\underline{\sin \angle \mathrm{AP_3B} < \sin \angle \mathrm{AP_1B}}$がわかります。

ソ 三角形 $\mathrm{ABP_1}$ の外接円の半径を $R_1$ とすると $2R_1 = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin \angle \mathrm{AP_1B}}$
となるので $R_1 = \dfrac{4}{\sin \angle \mathrm{AP_1B}}$ となります。
同様に三角形 $\mathrm{ABP_2}$ の外接円の半径を $R_2$ とすると
$R_2 = \dfrac{4}{\sin \angle \mathrm{AP_2B}}$ となります。
いま $0 < \sin \angle \mathrm{AP_3B} < \sin \angle \mathrm{AP_1B}$ であり $\sin \angle \mathrm{AP_3B} = \sin \angle \mathrm{AP_2B}$ ですので $0 < \sin \angle \mathrm{AP_2B} < \sin \angle \mathrm{AP_1B}$ となり、これより $\dfrac{4}{\sin \angle \mathrm{AP_1B}} < \dfrac{4}{\sin \angle \mathrm{AP_2B}}$ となり、すなわち ${}_0\underline{R_1 < R_2}$がわかります。

タ ここまでの考察により P を $l$ と $m$ の交点にとらない場合の $R$ は $l$ と $m$ との交点にとった場合より大きくなることがわかりましたので、P を $l$ と $m$ との交点にとった場合が最小となります。ここに P がくるとき PA=PB が成り立ちますので三角形 ABP は ${}_3$<u>二等辺三角形</u>となります。

(3)チ, ツ $h = 8$ のとき $R$ が最小となる場合は $\mathrm{AP} = \mathrm{AB}$ となる場合です。
このとき $\mathrm{PC} = 8$ となりますので
$\mathrm{AP} = \mathrm{BP} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ となります。これより
$\cos \angle \mathrm{APB} = \dfrac{\mathrm{AP}^2 + \mathrm{PB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2 \cdot \mathrm{AP} \cdot \mathrm{PB}} = \dfrac{80 + 80 - 64}{2 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}} = \dfrac{3}{5}$ となります。
したがって $0^\circ < \angle \mathrm{APB} < 180^\circ$ より
$\sin \angle \mathrm{APB} = \sqrt{1 - \cos^2 \angle \mathrm{APB}} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \underline{\dfrac{4}{5}}$ となります。

テ $2R = \dfrac{8}{\sin \angle \mathrm{APB}}$ より $R = \dfrac{4}{\frac{4}{5}} = \underline{5}$ となります。

## 第 2 問

**[1]**

(1)

ア〜ウ　価格が 50 円上がると 50 皿減るということは 1 円上がると $\frac{50}{50}(=1)$ 皿減るということです。すなわち売り上げ数はある値 $N$ を用いて $N-x$ 皿と表されます。
$x=200$ のときこの値は 200 ですので $N-200=200$ が成り立ちます。
これより $N=400$ ですので売り上げ数は$\underline{400-x}$と表されることがわかります。

(2)

エ〜キ　利益は売り上げ金額から経費を引くことで求めますから売り上げを $S$ 円、経費を $C$ 円とおきます。
売り上げ金額は 1 皿あたりの価格と売り上げ数の積としていますのでこの値を計算します。
1 皿あたり $x$ 円、また売り上げ数は①の式を用いて $(400-x)$ 皿としますのですなわち $S=x(400-x)=-x^2+400x$ です。
次に経費を考えます。経費は賃貸料と材料費の合計で計算します。材料は予想売り上げ数の分だけ仕入れ、また 1 皿あたり 160 円ですので材料費はこれらの積なのですなわち $(400-x)\cdot 160(\text{円})$ と表されます。
また賃貸料は 6000 円ですのでこれを加算して
$C=6000+160\cdot(400-x)=70000-160x$ となります。
これより利益は $y=S-C=\underline{-x^2+560x-7\cdot 10000}$ となります。

(3)

ク〜コ　利益の最大とはすなわち $y$ の最大値です。②の式を平方完成すると
$y=-(x-280)^2+280^2-70000$ とできます。
1 皿あたり 280 円にすると売り上げ数は 120 皿と予想できますのでどちらも値として成立します。ということで$\underline{280}$円のときに利益が最大になります。

サ〜セ　平方完成した式に $x=280$ を代入して利益を計算すると
$y=280^2-70000=78400-70000=\underline{8400}$ 円となります。

(4)

ソ〜チ　利益が 7500 円以上とはすなわち $y \geq 7500$ となることですので②の式を代入します。すると

$-x^2 + 560x - 70000 \geq 7500$ です。移項して整理すると

$x^2 - 560x + 77500 \leq 0$ となります。

平方完成により $(x-280)^2 + 77500 - 78400 = (x-280)^2 - 900$
$= (x-280+30)(x-280-30) = (x-250)(x-310)$ となりますので利益が 7500 円になるような価格は $250 \leq x \leq 310$ となります。

250 円ならば売り上げ予想は 150 皿となりますので値として適切です。したがって最も安い価格は<u>250</u>円となります。

[**2**]

(1)　ツ　それぞれ検証しましょう。

(I) 小学生数の第 1 四分位数は 550 人付近、第 3 四分位数は 575 人付近なので四分位範囲は 25 人程度です。
一方、外国人数の第 1 四分位数は 50 人付近、第 3 四分位数は 150 人付近なので四分位範囲は 100 人程度です。
したがって四分位範囲は外国人数のほうが大きいといえますので、誤りといえます。

(II) 旅券取得者数は最小が 150 人未満、最大が 500 人以上ですので範囲は 350 人より大きいです。
一方、外国人数の最小は 25 人付近、最大は 250 人付近ですので範囲は 225 人程度です。
したがって範囲は旅券取得者数のほうが大きいので正しいといえます。

(III) 旅券取得者数と小学生数については、旅券取得者数が多いところでも小学生数はあまり変化していないように読み取れます。
一方、旅券取得者数が多いところは外国人数は多くなっている傾向がみられます。
したがって相関係数は旅券取得者数と外国人数の相関係数のほうが大きいといえますので、誤りといえます。

これらより、正しいものは $_5$<u>(I) 誤、(II) 正、(III) 誤</u>となります。

(2)　テ　問題文の等式を代入すると

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}\{x_1f_1+(x_1+h)(f_2)+\cdots+(x_1+(k-1)h)f_k\}\\ &= \frac{1}{n}(x_1f_1+x_1f_2+\cdots+x_1f_k)\\ &\quad +\frac{1}{n}\{hf_2+2hf_3+\cdots+(k-1)hf_k\}\\ &= \frac{x_1}{n}(f_1+f_2+\cdots+f_k)+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+\cdots+(k-1)f_k\}\end{aligned}$$

となります。$f_1+f_2+\cdots+f_k=n$ に注意すると
$_3\underline{\bar{x}=x_1+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots+(k-1)f_k\}}$と変形できます。

ト～ニ　いま階級の幅がすべて 100、度数が 0 でない最小の階級値は $\frac{50+150}{2}=100$ ですので、得られた式を利用すると
$\bar{x}=100+\frac{100}{47}(25+2\cdot 14+3\cdot 3+4\cdot 1)=100+\frac{6600}{47}$
となります。$\frac{6600}{47}=140+\frac{20}{47}<140.5$ ですので四捨五入すると
$\bar{x}$ は 100+140=<u>240</u>となります。

(3)ヌ, ネ $l=1,2\cdots k$ において

$(x_l-\bar{x})^2 f_l=\{x_l^2-2\bar{x}\cdot x_l+(\bar{x})^2\}f_l=x_l^2 f_l-2\bar{x}\cdot x_l f_l+(\bar{x})^2 f_l$ とできます。ここから $\bar{x}$ の多項式と考えて項別に計算しましょう。

すると $\bar{x}$ の項の係数は $2(x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k)$、

$(\bar{x})^2$ の係数は $f_1+f_2+\cdots+f_k$ となります。

$\dfrac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+\cdots x_kf_k)$ がデータの平均ですのですなわち

$x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k=n\bar{x}$ です。

さらに $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$ ですので

$s^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1^2f_1+x_2^2f_2+\cdots+x_k^2f_k)-2\bar{x}\cdot{}_{3}\underline{n\bar{x}}+(\bar{x})^2\cdot{}_{0}\underline{n}\ \}$

となります。

ノ ここから $s^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1^2f_1+x_2^2f_2+\cdots+x_k^2f_k)-n(\bar{x})^2\}$ となりますのですなわち

$s^2=\dfrac{1}{n}(x_1^2f_1+x_2^2f_2+\cdots+x_k^2f_k)-{}_{6}\underline{(\bar{x})^2}$ となります。

ハ ①の式と $\bar{x}=240$ を使用すると

$s^2=\dfrac{1}{47}(100^2\cdot 4+200^2\cdot 25+300^2\cdot 14+400^2\cdot 3+500^2\cdot 1)-240^2$

$=\dfrac{3030000}{47}-57600=64468+\dfrac{4}{47}-57600=6868+\dfrac{4}{47}$ と計算できます。

したがって最も近いものは ${}_{3}\underline{6900}$ といえます。

## 第３問

(1) (i)

ア〜エ 確率を求める事象の余事象は「箱の中の 2 個の球がどちらも白球である」ですのでこれを計算しましょう。
袋 A から白球を取り出して箱に入れる確率は $\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$、袋 B から白球を取り出して箱に入れる確率は $\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$ ですので箱の中に 2 個の白球が入る確率は $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ です。
よって求める確率は $1-\frac{1]}{12}=\underline{\frac{11}{12}}$ となります。

(ii)

オ〜ク 赤球を取り出す確率は箱に入っている赤球の数により変動しますので、それぞれの個数になる確率を計算します。
赤球が 0 個である確率は (i) で計算した $\frac{1}{12}$ であり、赤球が 2 個である確率は A,B 両方から赤球を取り出した場合ですので $\frac{2}{2+1}\cdot\frac{3}{3+1}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ です。
赤球の個数としてありうるものは 0,1,2 個ですので残りは 1 個の場合となり、その確率は $1-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$ となります。
ということで赤球を取り出す確率は $0\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}+\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{17}{24}}$ となります。

ケ〜サ 取り出した球が赤球であるという事象を $R_1$、B の袋から取り出した球を箱から取り出すという事象を $B_1$ とすると求める確率は $P_{R_1}(B_1)=\frac{P(R_1\cap B_1)}{P(R_1)}$ となります。ということで $P(R_1\cap B_1)$ を計算します。
B の袋から取り出した赤球を取り出す場合は、B の袋から赤球を取り出し、さらに箱の 2 個のうち B の袋からの 1 個を取り出す場合ですので、その確率は $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ となります。
ということで $P_{R_1}(B_1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{24}{17}=\underline{\frac{9}{17}}$ となります。

(2) (i)

シ, ス 赤球がちょうど 2 個となる場合はつまり白球もちょうど 2 個となります。
白球はそれぞれの袋に 1 個ずつありますのですなわち両方の袋から白球を取り出す場合です。
袋 A から白球を取り出す確率は $\frac{2\cdot 1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$、袋 B から白球を取り出す確率は $\frac{3\cdot 1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ です。

ということでちょうど 2 個の赤球が箱に入る確率は $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{3}}$ です。

セ, ソ 箱の中の赤球の個数としてありうるものは 2,3,4 個です。(白球は 2 個なので赤球が 1 個以下になることはない)
赤球が 4 個となる場合は袋 A,B 両方から赤球を 2 個ずつ取り出す場合ですのでその確率は $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$ です。
したがって赤球が 3 個となる確率は $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\underline{\frac{1}{2}}$ となります。

(ii)

タ〜テ 箱の中にある赤球の数ごとに確率を計算します。
箱の中にある赤球が $k$ 個 $(k\geq 2)$ であるときに赤球 2 個を取り出す確率は $\frac{{}_k\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}$ となります。
これより求める確率は $\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{6}=\underline{\frac{17}{36}}$ となります。

ト〜ヌ 箱から 2 個の赤球を取り出すという事象を $R_2$、箱から B の袋からの球を 1 個だけ取り出すという事象を $B_2$ としたとき求める確率は $P_{R_2}(B_2)=\frac{P(R_2\cap B_2)}{P(R_2)}$ と計算できます。そこで袋 A,B から取り出した赤球の数で場合分けして $P(R_2\cap B_2)$ すなわち「B の袋からの球を 1 個だけ取り出し、かつ赤球を 2 個取り出す」確率を計算します。
袋 A から $a$ 個、袋 B から $b$ 個の赤球を取り出していた場合、A と B それぞれから赤球を 1 個ずつ取り出す確率は $\frac{ab}{6}$ と計算できますので、合わせることで
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2\cdot 2}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2\cdot 1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1\cdot 2}{6}=\frac{12}{36}$ となります。
したがって求める確率は $\frac{12}{36}\cdot\frac{36}{17}=\underline{\frac{12}{17}}$ となります。

## 第４問

(1)

ア〜エ $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ より $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2 \geq 0$ です。したがって $a^2 \leq a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 4a^2$ となります。

すなわち $a^2 \leq 14 \leq 4a^2$ ですので $a$ としてありうる値は $a=2,3$ です。

$a=2$ のときは $b^2+c^2+d^2=10$ となり同様にして $b^2 \leq 10 \leq 3b^2$ がわかります。$b \leq a=2$ ですので $b=2$ となります。

これより $c^2+d^2=6$ ですが $c$ は 0 以上 2 以下の整数ですのでそれぞれから $d$ を計算すると $(c,d)=(0,\sqrt{6}),(1,\sqrt{5}),(2,\sqrt{2})$ となります。いずれも $d$ は整数でありませんのですなわち $a=2$ となる解はないことがわかります。

$a=3$ のときは $b^2+c^2+d^2=5$ です。これより $b^2 \leq 5 \leq 3b^2$ となりますので $b=2$ が決まります。

これより $c^2+d^2=1$ ですので $c^2=1, d^2=0$ となるしかなく、すなわち $c=1, d=0$ が決まります。

したがってありうる解は$\underline{(a,b,c,d)=(3,2,1,0)}$のみであることがわかります。

オ $m=28$ のとき、$a^2 \leq 28 \leq 4a^2$ より $a=3,4,5$ のみが考えられます。

$a=3$ のとき $b^2+c^2+d^2=19$ ですので $b^2 \leq 19 \leq 3b^2$ と $b \leq 3$ より $b=3$ となります。

これより $c^2+d^2=10$ となり $c \leq 3$ ですので同様に検証すると $(c,d)=(3,1)$ のみが得られます。

$a=4$ のとき $b^2+c^2+d^2=12$ ですので $b^2 \leq 12 \leq 3b^2$ より $b=2,3$ となります。

$(a,b)=(4,2)$ のとき $c^2+d^2=8$ と $c^2 \leq 4, d^2 \leq 4$ より $(c,d)=(2,2)$ が決まります。

$(a,b)=(4,3)$ のとき $c^2+d^2=3$ より $c=0,1$ となりますがいずれも $d$ が整数になりません。

$a=5$ のとき $b^2+c^2+d^2=3$ ですので $b^2 \leq 3 \leq 3b^2$ より $b=1$ が決まります。

さらに $c^2+d^2=2$ となり $c^2 \leq 1, d^2 \leq 1$ より $(c,d)=(1,1)$ が決まります。

以上より解は $(a,b,c,d)=(3,3,3,1),(4,2,2,2),(5,1,1,1)$ の$\underline{3\text{個}}$であることがわかります。

(2) カ $a$ が奇数であるとき $a=2n+1$ とすると

$a^2-1=(a+1)(a-1)=(2n+2)\cdot 2n=4n(n+1)$ です。

$n$ が整数ならば $n, n+1$ どちらかは偶数になりますので $n(n+1)$ も偶数となります。
ということで $n(n+1) = 2N$ とすると $N$ も整数となり、さらに $a^2 - 1 = 8N$ と表されます。
すなわちここまでで $k$ の最大値は 8 以上であることがわかります。
一方、$a^2 - 1$ が $k$ の倍数である、という条件がすべての奇数 $a$ で成り立つとき、少なくとも $a = 3$ で成り立ちます。
$a = 3$ のとき $a^2 - 1 = 8$ ですので $k \geq 9$ だとこれは $k$ の倍数になりません。
ということで $k$ の最大値は 8 以下であることもわかります。
したがって最大値は $\underline{k = 8}$ となります。

(3) キ 整数 $a^2$ を 8 で割った余りは $0, 1, 4$ のどれかであることがわかりましたので、$a, b, c, d$ のうち奇数となるものの個数で場合分けしましょう。
奇数が 3 つ以上であるとき、残り 1 つの余りに応じて $a^2+b^2+c^2+d^2$ を 8 で割った余りは 3,4,7 のいずれかになってしまいます。なので奇数の個数は 2 個以下とわかります。
奇数が 2 個だけであるとき、残り 2 つは 8 で割った余りが 0 または 4 ですので $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ を 8 で割った余りは 2,6 のいずれかに限られます。
さらに、奇数が 1 個だけである場合は $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ を 8 で割った余りは 1,5 のいずれかとなります。
ということで奇数の個数としてありうるものは 0 個に限られ、これより偶数は4 個とわかります。

(4)

ク～シ $m = 224$ であるとき $224 = 8 \cdot 28$ ですので $a, b, c, d$ はすべて偶数となります。
そこで $a = 2a', \cdots, d = 2d'$ とすると $a', b', c', d'$ は整数となり、さらに $4a'^2 + 4b'^2 + 4c'^2 + 4d'^2 = 224$ より $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 = 56$ となります。
$56 = 8 \cdot 7$ ですのでさらに $a' = 2a''$ などとすると $a'', b'', c'', d''$ は整数となり $a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2 = 14$ となります。
この方程式は (1) で解いておりその解は $(a'', b'', c'', d'') = (3, 2, 1, 0)$ だけとわかっていましたので $a = 2a' = 4a''$ などにより解は $(a, b, c, d) = \underline{(12, 8, 4, 0)}$ のみであることがわかります。

(5) ス $896 = 2^7 \cdot 7$ ですので $m$ が 7 の倍数で 896 の約数であるとき、$0 \leq p \leq 7$ をみたす整数 $p$ によって $m = 7 \cdot 2^p$ と表されます。
$p = 0$ のとき $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7$ より $a^2 \leq 7 \leq 4a^2$ なので $a = 2$

となります。これより $b^2+c^2+d^2=3$ となり、これはここまでで解いていて $(b,c,d)=(1,1,1)$ のみであることがわかります。

$p=1$ のときは $m=14$ ですので (1) で解いており、解は 1 組だけとなります。

$p=2$ のときは $m=28$ ですので (1) より解は 3 組となります。

$p\geq 3$ のときは $m=7\cdot 8\cdot 2^{p-3}$ となりますので $m$ は 8 の倍数となり、すなわち解は偶数 4 個となります。

そこで $a=2a'$ などとおくと $4a'^2+4b'^2+4c'^2+4d'^2=7\cdot 2^p$ より $a'^2+b'^2+c'^2+d'^2=7\cdot 2^{p-2}$ とできます。

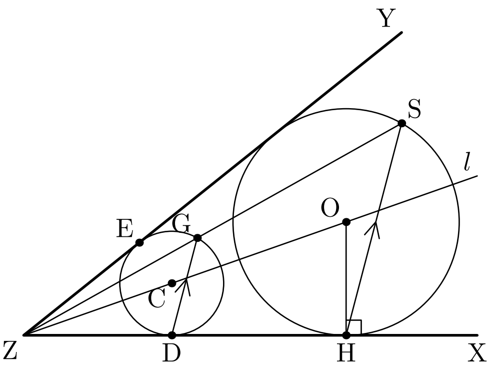
すなわち解の個数は $p$ を $m=2^{p-2}\cdot 7$ のときの解の個数に等しくなります。

ここからたとえば $m=7\cdot 2^3$ のときの解の個数は $m=7\cdot 2^1$ のときの解の個数に等しいことがわかります。

これより $p$ を小さい値から順に検証していくと $p=0,1,3,5,7$ のときに解が 1 組、$p=2,4,6$ のときに解が 3 組となることがわかりますので、解が 3 組であるものは<u>3 個</u>となります。

セ～タ　解が 3 個となるもののうち最大のものは $p=6$ のときですのですなわち $m=7\cdot 2^6=\underline{448}$ となります。

第５問

(1) 

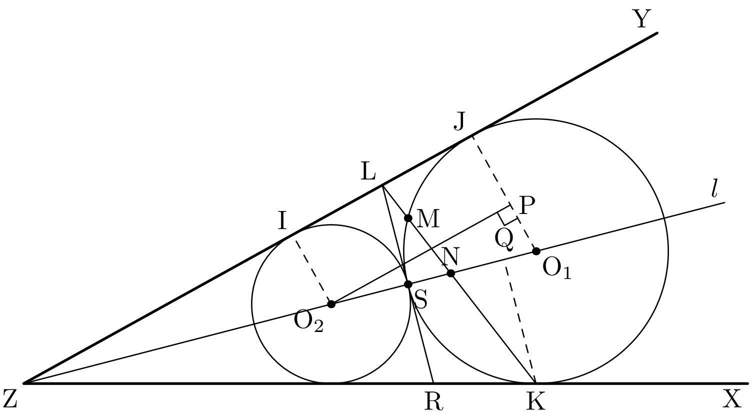

ア　まず線分 OH は半直線 ZX に垂直ですので半径 OH の円 O は半直線 ZX に接します。
またOは $\angle$ZXY の二等分線である $l$ 上の点ですので半直線 ZY にも接します。
ということであとは円 O が S を通ることを示したいですので線分 OS の長さが半径に等しいことを示すことになります。
ということで示すことは OH=$_5$<u>OS</u>となります。

イ〜エ　共通の角であることから $\angle$GZD = $\angle$SZH、DG $\parallel$ HS であることから $\angle$ZDG = $\angle$ZHS となりますので $\triangle$ZGD $\sim$ $\triangle$ZHS となります。
これより DG:$_2$<u>HS</u> = $_6$<u>ZD</u>:$_7$<u>ZH</u>がわかります。

オ　共通の角であることから $\angle$CZD = $\angle$OZH、また $\angle$CDZ = $\angle$OHZ = 90° ですので $\triangle$ZDC $\sim$ $\triangle$ZHO となります。
これより DC:$_1$<u>OH</u> = ZD:ZH がわかります。

カ　DG:HS=DC:OH であり S,O,H が一直線上にない場合、$\angle$CDG = $|\angle$CDZ $-$ $\angle$GDZ$|$ であり $\angle$OHS = $|\angle$OHZ $-$ $\angle$SHZ$|$ となります。
$\angle$CDZ = $\angle$OHZ, $\angle$GDZ = $\angle$SHZ ですので $\angle$CDG = $\angle_2$<u>OHS</u>がわかります。
ここから $\triangle$CDG $\sim$ $\triangle$OHS がいえますので CD=CG より OH=OS がいえます。

キ　S,O,H が一直線上にある場合、$\triangle$ZDG $\sim$ $\triangle$ZHS と $\angle$SHZ = 90° より $\angle$GDZ = 90° です。ということで線分 DG が円 C の中心を通りますので DG は直径となります。
線分 DC は円 C の半径ですので DG=<u>2</u>DC がわかります。
ここから SH=2OH がいえますので OH=OS がいえます。




(2)

ク～コ　点 $O_2$ を通り半直線 ZY に平行な直線と線分 $O_1J$ との交点を P とおくと $IJ = O_2P$ となり、また $O_1P = O_1J - O_2I$、$O_1O_2 = O_1J + O_2I$、$\angle O_1PO_2 = 90^\circ$ となります。
いま $O_1J = 5, O_2I = 3$ ですので
$IJ = \sqrt{(O_1O_2)^2 - O_1P^2} = \sqrt{(5+3)^2 - (5-3)^2} = \sqrt{60} = \underline{2\sqrt{15}}$
がわかります。

サシ　3 点 L.M.K は同一直線上にあるので方べきの定理により
$LM \cdot LK = LJ^2$ がわかります。
また直線 LS と LJ は円 $O_1$ に接し、直線 LS と LI は円 $O_2$ に接するので LS=LI=LJ が成り立ちます。
LI+LJ=IJ=$2\sqrt{15}$ ですのですなわち LI=LJ=$\sqrt{15}$ です。
したがって $LM \cdot LK = \underline{15}$ がわかります。

ス～ソ　$O_2I \parallel O_1J$ ですので ZI:ZJ=$IO_2 : JO_1 = 3 : 5$ です。
すなわち $ZJ = \dfrac{5}{3}ZI, ZI + IJ = ZJ$ ですので $ZI + 2\sqrt{15} = \dfrac{5}{3}ZI$ となります。
これより ZI=$\underline{3\sqrt{15}}$であることがわかります。

タ, チ　N が $\angle XZY$ の二等分線である $l$ 上の点ですので LN:NK=LZ:ZK が成り立ちます。
ZK=ZJ=ZI+IJ=$3\sqrt{15}+2\sqrt{15} = 5\sqrt{15}$ であり、LZ=ZI+LI=$3\sqrt{15}+\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$ ですので
$\dfrac{LN}{NK} = \dfrac{LZ}{ZK} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5\sqrt{15}} = \underline{\dfrac{4}{5}}$ となります。

ツ, テ　K から直線 $l$ におろした垂線の足を Q とします。このとき $LS \perp l, KQ \perp l$ であり $\angle SNL = \angle QNK$ ですので $\triangle SNL \sim \triangle QNK$ すなわち SN:QN=LN:KN=4:5 となります。
また、$O_2I \perp ZY, QK \perp l$ と $\angle O_2ZI = \angle QZK$ から
$\triangle IZO_2 \sim \triangle QZK$ がわかります。
$ZO_2 = \sqrt{ZI^2 + O_2I^2} = \sqrt{9 \cdot 15 + 9} = 3\sqrt{16} = 12$ ですので

$ZO_2 : ZI = 4 : \sqrt{15}$ となります。
$QZ : ZK = IZ : ZO_2 = \sqrt{15} : 4$ ですので $QZ = \dfrac{\sqrt{15}}{4}ZK = \dfrac{75}{4}$ がわかります。
$SZ = ZO_2 + O_2S = 12 + 3 = 15$ ですので $QS = \dfrac{75}{4} - 15 = \dfrac{15}{4}$ となります。
したがって $SN = \dfrac{4}{4+5}QS = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{15}{4} = \underline{\dfrac{5}{3}}$ がわかります。
(なお、直線 LS と直線 ZX との交点を R として $\triangle$ZKN と直線 LS でメネラウスの定理 $\dfrac{KL}{KN} \cdot \dfrac{NS}{SZ} \cdot \dfrac{ZR}{RK} = 1$ を利用する方法もある
ここから代入により $\dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{NS}{SZ} \cdot \dfrac{4\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = 1$ となり $NS = \dfrac{1}{9}SZ$ がわかる ここから $ZO_2$、SZ を順に計算して得ることができる)

## 所感

第 1 日程より難しい問題が増えました。苦戦した人は多いでしょう。

### 第 1 問

[**1**]

不等式の問題と集合の問題を合わせたような小問です。
少ないですが (2)(ii) は少々面倒な検証をすることになります。

[**2**]

図形と計量に関する問題です。
分量はやや多いですが複雑な計算は求められませんので、解きやすいと思います。

### 第 2 問

[**1**]

2 次関数に関する問題です。
共通テストらしい問題といえます。変数設定はちゃんと読みましょう。

[**2**]

データの分析に関する問題です。問題数が多く、また細かい検証や桁の大きい計算が求められるので、かなり難しいといえます。

### 第 3 問

場合の数と確率に関する問題です。
(1) はまだましですが (2) では条件付き確率を求めるために細かい計算を求められます。

## 第４問

　整数の性質に関する問題です。
不定方程式が出ていませんのこれ以外の整数問題を対策しなかった人は落胆したと思います。
そのため、思考力を問われることになり、とれる人と取れない人で分かれたと考えられます。

## 第５問

　平面幾何に関する問題です。
作図できない人が増加しているとの意見もみられるためか、作図の要素を持ち込んだ問題となっています。
図からどれだけの知識や性質を動員できるかが勝負となる、かなりの難問といえます。