解答

第１問		
解答欄	正解	配点
ア	**1**	**1**
イ, ウ	**-,1**	**2**
エ, オ	**-,1**	**2**
カキ	**23**	**2**
クケ	**24**	**2**
コ	**3**	**2**
サ	**3**	**2**
シ	**2**	**1**
ス	**4**	**1**
セ	**7**	**2**
ソ	**4**	**2**
タ	**0**	**1**
チ, ツ	**2,2**	**1**
テ, ト	**2,4**	**1**
ナニ	**11**	**2**
ヌネ	**19**	**1**
ノハ, ヒ	**-1,2**	**2**
フ, ヘ	**2,3**	**1**
ホ	**0**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	**2**	**2**
イ	**2**	**2**
ウ	**0**	**1**
エ	**1**	**2**
オ, カ	**1,3**	**2**
キ	**2**	**2**
ク	**a**	**2**
ケ	**0**	**1**
コ	**2**	**3**
サ	**1**	**2**
シス	**-c**	**2**
セ	**c**	**2**
ソ, タ, チ, ツ	**-,3,3,6**	**3**
テ	**2**	**3**

第３問		
解答欄	正解	配点
アイ	**45**	**2**
ウエ	**15**	**2**
オカ	**47**	**2**
キ, ク	**a,5**	**1**
ケ, コサ, シ	**3,11,8**	**3**
ス	**1**	**2**
セ	**4**	**2**
ソタチ. ツテ	**112.16**	**1**
トナニ. ヌネ	**127.84**	**1**
ノ	**2**	**2**
ハ. ヒ	**1.5**	**2**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア	**4**	**1**
イ, ウ	**4,5**	**2**
エ, オカ	**5,16**	**2**
キ	**5**	**1**
ク	**4**	**2**
ケ, コ	**1,1**	**3**
サシ	**15**	**2**
ス, セ	**1,2**	**3**
ソタ	**41**	**2**
チツテ	**153**	**2**

第５問		
解答欄	正解	配点
ア	**5**	**2**
イ, ウエ	**9,10**	**2**
オ, カ, キ, ク	**2,5,1,2**	**2**
ケ	**4**	**2**
コ, サ	**3,7**	**2**
シ	**-**	**2**
ス, セ	**1,3**	**3**
ソ, タチ	**7,12**	**3**
ツ	**1**	**2**

※第２問は「キ」が正答ならば「コ」は b でも可

解説

第 1 問

[**1**]

(1) ア $10^1 = 10$ ですので定義から $\log_{10} 10 = \underline{1}$ です。

イ, ウ $5 = \dfrac{10}{2}$ を利用することで
$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = \underline{-\log_{10} 2 + 1}$ がわかります。

エ, オ $15 = 5 \cdot 3$ ですので
$\log_{10} 15 = \log_{10} 5 \cdot 3 = \log_{10} 5 + \log_{10} 3 = \underline{-\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 1}$ がわかります。

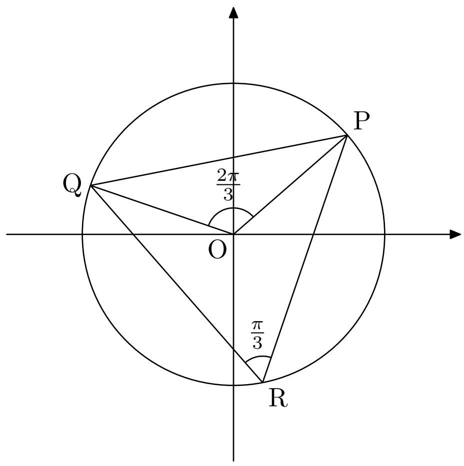
(2) カキ 与えられた近似値を代入すると
$\log_{10} 15 = -0.3010 + 0.4771 + 1 = 1.1761$ となります。すなわち
$\log_{10} 15^{20} = 20 \cdot \log_{10} 15 = 23.522$ となりますので
$\underline{23} < \log_{10} 15^{20} < 24$ がわかります。

クケ 10 の $\log_{10} a$ 乗が a ですので得られた不等式から
$10^{23} < 15^{20} < 10^{24}$ がわかります。
10^{23} は 1 のあとに 0 が 23 個続く値ですのですなわち 24 桁です。
同様に 10^{24} は 25 桁であり、さらに 10^{24} は 25 桁で最小の値です。
したがって 15^{20} は$\underline{24}$ 桁となります。

コ $\log_{10} 15^{20}$ の小数部分は $\log_{10} 15^{20} - 23 = 0.522$ となります。
$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2 = 0.6020$ ですので
$\log_{10} 3 < 0.522 < \log_{10} 4$ です。
すなわち$\underline{\log_{10} 3} < \log_{10} 15^{20} - 23 < \log_{10} 4$ となります。

サ 得られた式から $23 + \log_{10} 3 < \log_{10} 15^{20} < 23 + \log_{10} 4$ です。
10 のべき乗をとると $3 \cdot 10^{23} < 15^{20} < 4 \cdot 10^{23}$ です。
$3 \cdot 10^{23}$ は 3 のあとに 0 が 23 個続く値ですのですなわち最高位は 3 です。
また $4 \cdot 10^{23}$ は 4 のあとに 0 が 23 個続く値のうち最小です。
ということでこれらから 15^{20} の最高位の数字は$\underline{3}$となります。

[2]



(1)

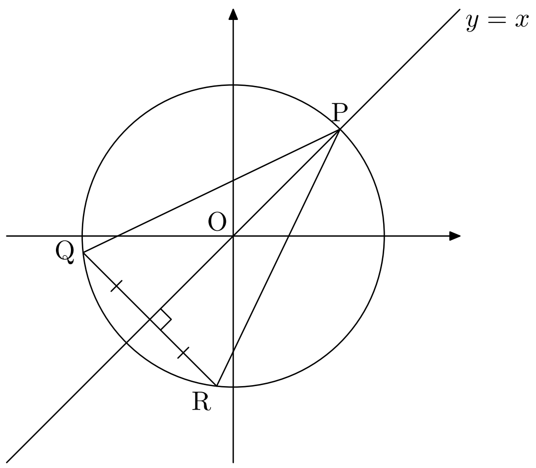
シ, ス　原点を O としたとき、$\angle$PRQ は弧 PQ の円周角、$\angle$POQ は弧 PQ の中心角となります。
いま $\triangle$PQR は正三角形ですのですなわち $\angle \mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{3}$ です。
したがって中心角は円周角の 2 倍ですので $\angle \mathrm{POQ} = \dfrac{2\pi}{3}$ となります。
同様に $\angle \mathrm{POR} = \dfrac{2\pi}{3}$ となります。
ここから向きを考慮すると Q,R は O を中心に P をどちらかの方向に $\dfrac{2\pi}{3}$ だけ回転させたものに相当します。
時計回りに $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転させる移動は反時計回りに $-\dfrac{2\pi}{3}$ 回転させる移動であり、すなわち $2\pi - \dfrac{2\pi}{3} \left(= \dfrac{4\pi}{3}\right)$ だけ回転させる移動になります。
これらと $\theta < \alpha < \beta < 2\pi$ よりありうる値は $\underline{\alpha = \theta + \dfrac{2}{3}\pi, \beta = \theta + \dfrac{4}{3}\pi}$ となります。

セ　$\cos\alpha = \cos\left(\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right)$ ですので加法定理から
$\cos\alpha = \cos\theta\cos\dfrac{2\pi}{3} - \sin\theta\sin\dfrac{2\pi}{3} =_{7} \underline{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta}$ となります。

ソ　同様にすると
$\sin\alpha = \sin\theta\cos\dfrac{2\pi}{3} + \cos\theta\sin\dfrac{2\pi}{3} =_{4} \underline{-\dfrac{1}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$ となります。

タ　さらに $\cos\beta, \sin\beta$ を計算すると
$\cos\beta = \cos\theta\cos\dfrac{4\pi}{3} - \sin\theta\sin\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta$

$\sin\beta = \sin\theta\cos\frac{4\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$
となります。これらより
$s = \cos\theta + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right) = 0$
となります。
同様に $t = 0$ となりますので $\underline{s = t = 0}$ がわかります。



チ, ツ
いま P は直線 $y = x$ すなわち $y = x\tan\frac{\pi}{4}$ 上にありますので $\theta = \frac{\pi}{4}$ となります。($\theta = \frac{5}{4}\pi$ だと α, β どちらかが θ より小さくなるのでこれは考えなくてよい)
また、Q と R が直線 $y = x$ に対して対称であるということは「直線 QR は直線 $y = x$ に垂直」「線分 QR の中点は直線 $y = x$ 上にくる」ということになりますのですなわち
直線 QR の傾きから $\frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha} = -1$
中点の座標から $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}$ が成り立ちます。ここから $\sin\beta = \cos\alpha, \cos\beta = \sin\alpha$ がわかりますので
$s = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha + \sin\alpha, t = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\alpha + \cos\beta$ となり、
$s = t = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sin\alpha + \cos\alpha$ がわかります。

テ, ト 三角関数の合成がある実数 γ を用いて
$p\sin\alpha + q\cos\alpha = \sqrt{p^2 + q^2}\sin(\alpha + \gamma)$ の形式で表されることを利用すると

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \cos\alpha &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

となりますので $\sin\alpha + \cos\alpha = \underline{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$ がわかります。

ナニ　$s=t=0$ となる場合は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha=0$ となる場合です。
合成で得られた式を利用すると
$\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となります。
すなわち $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$ です。$\theta<\alpha<\dfrac{5\pi}{4}$ ですので
$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{2}$ となり、すなわちこの範囲にくるものは
$\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{6}$ に限られます。
これより $\alpha=\dfrac{7\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\underline{\dfrac{11}{12}}\pi$ となります。

ヌネ　s,t の式から今度は α を消去すると $s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin\beta+\cos\beta$ となります。
同様に $\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$ であり、今度は $\dfrac{5\pi}{4}<\beta<2\pi$ ですので
$\dfrac{3\pi}{2}<\beta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9\pi}{4}$ です。ここから $\beta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{11\pi}{6}$ となりますので
$\beta=\dfrac{11\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\underline{\dfrac{19}{12}}\pi$ となります。

(2)

ノ～ヒ　$s=t=0$ のとき、$\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=0, \cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=0$ より $\sin\theta=-\sin\alpha-\sin\beta, \cos\theta=-\cos\alpha-\cos\beta$ です。これらを 2 乗すると
$\sin^2\theta=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta$
$\cos^2\theta=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta$ となります。
これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=1$
となります。$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ ですのですなわち $2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=1$ となり、整理することで
$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\underline{-\dfrac{1}{2}}$ がわかります。

フ, ヘ　加法定理により $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$ ですので
$\cos(\beta-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$ です。
また式の対称性により $\cos(\alpha-\theta)=-\dfrac{1}{2}$ もわかります。
$2\pi>\beta-\alpha>0$ より $\beta-\alpha$ として考えられる値は $\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$ です。
$\alpha-\theta$ として考えられる値も同様です。
$\beta-\theta=(\beta-\alpha)+(\alpha-\theta)$ と $0<\beta-\theta<2\pi$ ですので、どちらかが $\dfrac{4}{3}\pi$ となってしまうと $\beta-\theta\geq\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi=2\pi$ となってしまい不適となります。
よって $\underline{\beta-\alpha=\alpha-\theta=\dfrac{2}{3}\pi}$ に限られることがわかります。

(3)　ホ　まず考察 1 から $\triangle$PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であることがわかります。

また考察 3 から $s=t=0$ ならば $\beta-\alpha=\alpha-\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ であることがわかります。このとき $\angle \mathrm{POQ}=\angle \mathrm{QOR}=\dfrac{2\pi}{3}$ ですので円周角の関係から $\angle \mathrm{PRQ}=\angle \mathrm{QPR}=\dfrac{\pi}{3}$ となります。ということで $\angle \mathrm{RPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ も成り立ちますので $\triangle$PQR は正三角形となることがわかります。

以上より

0<u>$\triangle$PQR が正三角形であることと $s=t=0$ であることは同値</u>とわかります。

第２問

[1]

(1)　ア　微積分の性質から $F'(x)=f(x)$ ですので、$F(x)$ が極小になる値は $f(x)$ が負から正に変化する値です。
いま $a=1$ ですので $f(x)=(x-1)(x-2)$ となり、すなわち $\underline{x=2}$ のときがあてはまることになります。

(2)　イ　$F(x)$ がつねに増加するときは $f(x)\geq 0$ がすべての実数 x で成り立つときです。$a\neq 2$ のときは $f(x)<0$ となる実数 x がありますので常に増加とはなりません。
$a=2$ のとき $f(x)=(x-2)^2$ となりますのでつねに $f(x)\geq 0$ となります。ということで $\underline{a=2}$ のときがあてはまります。

ウ　$\int_k^k f(t)dt=0$ がすべての実数 k において成り立ちますので
$F(0)=\int_0^0 f(t)dt=\underline{0}$ となります。

エ　$a=2$ のときつねに $f(x)\geq 0$ が成り立ちます。$f(x)=0$ となる値は $x=2$ のみですので $0<x<2$ では $f(x)>0$ となります。
したがって $F(2)>\int_0^2 0dt=0$ となりますので特に $F(2)$ の値は $_1\underline{正}$ であることがわかります。

(3)オ, カ　$G(x)=\int_b^x f(t)dt=\int_0^x f(t)dt-\int_0^b f(t)dt=F(x)-F(b)$ と変形できます。
すなわち $y=G(x)$ のグラフは $y=F(x)$ のグラフを $_1\underline{y}$ 軸方向に $_3\underline{-F(b)}$ だけ平行移動したものとなります。

キ, ク　$G(x)=F(x)-F(b)$ なので $G'(x)=F'(x)=f(x)$ です。
いま $a>2$ としていますので $f(x)$ は $x=2$ で負から正、$x=a$ で正から負になります。
ということで $G(x)$ は $\underline{x=2}$ で極大、$\underline{x=a}$ で極小になります。

ケ　$G(b)=F(b)-F(b)=\underline{0}$ と計算できます。

コ　$b=2$ のとき極大値は $G(b)=0$ となりますので増減は以下のようになります。

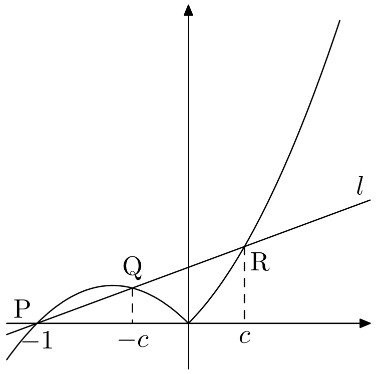
x		2		a	
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$G(a)$	$\nearrow$

すなわち曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点は $(2,0)$ のほかに x 座標が a より大きいものが 1 個だけになりますので全部で $\underline{2\text{個}}$ となります。
(採点基準で「キ」が 2 のときに b が正答になるのはたまたまに過ぎない)

[**2**]

サ　絶対値がありますが定義にしたがって計算しましょう。
$g'(-1) = \lim_{x \to -1} \dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)}$ です。
x を -1 に近づけることを考えますので $x < 0$ で考えてよく、このとき
$g(x) = (-x)(x+1) = -x^2 - x$ とできます。
すると $x < 0$ かつ $x \neq -1$ のとき $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \dfrac{-x^2 - x}{x + 1} = -x$ となりますので $g'(-1) = \lim_{x \to -1}(-x) = \underline{1}$ がわかります。

シ〜セ　直線 l の式は $y = c(x+1)$ と表されます。したがって l と曲線 $y = g(x)$ との共有点である x 座標では $|x|(x+1) = c(x+1)$ が成り立ちます。
これを整理すると $(|x| - c)(x+1) = 0$ となりますので $x = \pm c, -1$ となります。
いま $0 < c < 1$ であり $x = -1$ である点が P でしたので、$-1 < -c < c$ より Q の x 座標は$\underline{-c}$、R の x 座標は$\underline{c}$であることがわかります。



ソ〜ツ　$-1 \leq x \leq -c$ においては $x+1 \geq 0, |x| \geq c$ ですので $|x|(x+1) \geq c(x+1)$ です。したがって

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{-c} \{|x|(x+1) - c(x+1)\}dx = \int_{-1}^{-c} \{-x^2 - (1+c)x - c\}dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{1+c}{2}x^2 - cx\right]_{-1}^{-c} \\
&= \left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^2 + c^3}{2} + c^2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1+c}{2} + c\right) \\
&= -\frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c - \frac{1}{6} = \underline{\frac{-c^3 + 3c^2 + 3c - 1}{6}}
\end{aligned}
$$

となります。

テ　$-c \leq x \leq c$ において $x + 1 \geq 0, |x| \leq c$ ですので $|x|(x+1) \leq c(x+1)$

です。これより

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{-c}^{c}\{c(x+1)-|x|(x+1)\}dx = \int_{-c}^{c} c(x+1)dx - \int_{-c}^{c}|x|(x+1)dx \\
&= c\int_{-c}^{c}(x+1)dx - \int_{-c}^{0}(-x)(x+1)dx - \int_{0}^{c} x(x+1)dx \\
&= c\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-c}^{c} - \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-c}^{0} - \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{c} \\
&= c\left\{\left(\frac{c^2}{2}+c\right)-\left(\frac{c^2}{2}-c\right)\right\} + \left(\frac{c^3}{3}-\frac{c^2}{2}\right) - \left(\frac{c^3}{3}+\frac{c^2}{2}\right) = \underline{c^2}
\end{aligned}
$$

となります。

第３問

(1) アイ　出ている数値がすべて正確で、かつすべての留学生はどれか 1 つのコースにのみ登録しますので、上級コースに登録した割合は初級にも中級にも登録していない留学生の割合として計算できます。ということでその値は $100 - 20 - 35 = \underline{45\%}$ となります。

ウエ　平均はとりうる値それぞれに対しての割合を合計することで得られます。ということで平均は
$10 \cdot \dfrac{20}{100} + 8 \cdot \dfrac{35}{100} + 6 \cdot \dfrac{45}{100} = \dfrac{200 + 280 + 270}{100} = \dfrac{750}{100} = \underline{\dfrac{15}{2}}$ となります。

オカ　分散はとりうる値と平均との差の 2 乗それぞれに対しての割合を合計することで得られます。ということで分散は
$\left(10 - \dfrac{15}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{20}{100} + \left(8 - \dfrac{15}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{35}{100} + \left(6 - \dfrac{15}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{45}{100}$
$= \dfrac{5^2}{4} \cdot \dfrac{4}{20} + \dfrac{1^2}{4} \cdot \dfrac{7}{20} + \dfrac{(-3)^2}{4} \cdot \dfrac{9}{20} = \dfrac{188}{80} = \underline{\dfrac{47}{20}}$ となります。

キ, ク　Y が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき $E(Y) = np$ です。いま
$n = a, p = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$ ですので $E(Y) = a \cdot \dfrac{1}{5} = \underline{\dfrac{a}{5}}$ となります。

ケ～シ　Y が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき標準偏差は
$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{np(1-p)}$ です。Z は二項分布 $B\left(a, \dfrac{9}{20}\right)$ に従いますので
$\dfrac{\sigma(Z)}{\sigma(Y)} = \dfrac{\sqrt{a \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{11}{20}}}{\sqrt{a \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}} = \dfrac{\frac{1}{20} \cdot \sqrt{99}}{\frac{1}{5} \cdot \sqrt{4}} = \underline{\dfrac{3\sqrt{11}}{8}}$ となります。

ス　$a = 100$ とすると $E(Y) = \dfrac{100}{5} = 20, V(Y) = 100 \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = 16$ ですので $\sigma(Y) = 4$ です。したがって Y を標準化した確率変数 $Y' = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)} = \dfrac{Y - 20}{4}$ を利用すると $Y \geq 28$ は $Y' \geq 2$ と書き換えられることから $P(Y \geq 28) = P(Y' \geq 2)$ となります。
いま Y は近似的に正規分布に従うと仮定していますので Y' は標準正規分布に従うことになります。正規分布表から $z_0 = 2.0$ のときの値である 0.4772 を利用すると $P(0 \leq Y' < 2) = 0.4772$ とできます。
したがって $P(Y \geq 28) = P(0 \leq Y') - P(0 \leq Y' < 2)$
$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$ と計算できますので $p =_1 \underline{0.023}$ となります。

(2) セ　標本平均の標準偏差は母集団の標準偏差 σ と標本の大きさ N を使用して $\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$ となります。いま大きさは 40 で $\sigma = 640$ ですので標

本平均の標準偏差は $\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{40}} = \sqrt{16} = \underline{4}$ となります。

ソ〜ネ　標本平均が近似的に正規分布に従うとき、信頼度 95%の信頼区間は平均から標準偏差の 1.96 倍離れた値までの区間となります。(1.96 は正規分布表において $\dfrac{0.95}{2}(= 0.475)$ となる z_0 の値)
標本平均が 120、標準偏差が 4 でしたので信頼区間は
$120 - 1.96 \cdot 4 \leq m \leq 120 + 1.96 \cdot 4$ と表されます。
これを計算すると信頼区間は $112.16 \leq m \leq 127.84$
$\underline{(C_1 = 112.16, C_2 = 127.84)}$となります。

(3)　ノ　この調査における標本平均の標準偏差は $\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{50}}$ であり、この値は (2) での値より小さいです。
信頼度は等しいですので信頼区間の幅は狭くなり、また標本平均は同じ値でしたのですなわち (2) で得られた信頼区間に含まれることがわかります。ということで $_2\underline{D_1 > C_1 \text{ かつ } D_2 < C_2}$が成り立つことがわかります。

ハ, ヒ　標本の大きさを k 倍にすると標本平均の標準偏差は $\dfrac{\sqrt{960}}{\sqrt{50k}}$ となります。
$D_2 - D_1 = E_2 - E_1$ となるということは信頼区間の幅が等しいということです。信頼度はどちらでも同じにしていますので標準偏差が等しければ成り立つことがわかります。
すなわち $\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{50}} = \dfrac{\sqrt{960}}{\sqrt{50k}}$ となる k を求めることになります。
これを整理すると $k = 1.5$ なのですなわち 50 人の$\underline{1.5\text{ 倍}}$で信頼区間の幅が等しくなることがわかります。

第４問

[1]

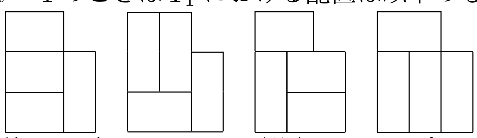
ア　$S_1 = a_1$ を利用します。$S_1 = 5^1 - 1 = 4$ ですので$\underline{a_1 = 4}$がわかります。

イ, ウ　$n \geq 2$ のとき $S_n - S_{n-1} = a_n$ が成り立ちます。これを利用すると
$a_n = S_n - S_{n-1} = (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1) = 5 \cdot 5^{n-1} - 5^{n-1} = \underline{4 \cdot 5^{n-1}}$
となります。

エ〜キ　$4 \cdot 5^{1-1} = 4 = a_1$ ですので $n \geq 1$ で $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$ が成り立ちます。これより $\dfrac{1}{a_k} = \dfrac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ となるので、すなわち数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{4}$、公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列です。ということで等比数列の和の公式が使えるので
$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \left\{1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right\} = \underline{\dfrac{5}{16}(1 - 5^{-n})}$ がわかります。

[2]

(1)　ク　$n = 1$ のときは T_1 における配置は以下のものがあります。



(前ページにある R_2 の配置から T_2 の部分に入っているものを探すことでも見つけられる)
ということで$\underline{t_1 = 4}$がわかります。

ケ, コ　T_n にタイルを配置する場合、右端１列に１枚のタイルを縦長に配置して残った部分 R_n にタイルを配置する場合 (図で上の場合) と、右下隅に横長にタイルを配置して自動的に決まる部分を埋めた後残った部分 T_{n-1} にタイルを配置する場合 (図で下の場合) が考えられます。ということで $t_n = r_n + t_{n-1}(\underline{A = 1, B = 1})$ がわかります。

サシ　$t_2 = r_2 + t_1$ となりますので代入して $t_2 = 11 + 4 = \underline{15}$ がわかります。

ス, セ　R_n にタイルを配置する場合、右下に縦長に配置すると自動的に決まる部分を埋めた後の残りは T_{n-1} に一致します。(図の下段)
また、右下に横長に配置してその上段に縦長に配置すると残りは T_{n-1} を上下反転したものに一致します。(図の中段)
他に、右下に横長に配置してその上段に横長に配置すると自動的

に決まる部分を埋めた後の残りは R_{n-1} に一致します。(図の上段)
ということで順番に場合の数を計算すると
$r_n = t_{n-1} + t_{n-1} + r_{n-1} = r_{n-1} + 2t_{n-1}(\underline{C=1, D=2})$ がわかります。

(2) ソタ　縦の長さが 3、横の長さが 6 である長方形はすなわち R_3 となります。
すなわちその部屋に畳を敷き詰めるときの総数は r_3 と表されます。
これまでに得られた漸化式から $r_3 = r_2 + 2t_2 = 11 + 15 \cdot 2 = \underline{41}$ と計算できます。

チ〜テ　縦の長さが 3、横の長さが 8 である長方形は R_4 ですので、r_4 の値が求めるものとなります。
漸化式から $r_4 = r_3 + 2t_3 = r_3 + 2(r_3 + t_2) = 41 + 2 \cdot (41 + 15) = \underline{153}$ となります。

第５問

(1)　ア　ベクトルの大きさは各成分の 2 乗の平方根で表されますので
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 = \underline{5}$ となります。

イ〜エ　D は線分 OA を 9:1 に内分しますので $\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が成り立ちます。
$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ ですので整理すると $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \underline{\frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$ がわかります。

オ〜ク　C は線分 AB の中点ですので $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$ となります。ということで
$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(\frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \underline{\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$
となります。

ケ　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ですのですなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ が成り立ちます。$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の式を代入すると $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = 0$ となります。
これより $\frac{2}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ となり、$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 5$ を代入して整理すると $\underline{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 4}$ がわかります。
なお、同様に考えることで $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{CE}} = \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ がわかり、$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} = 0$ を利用することで $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 20$ がわかります。

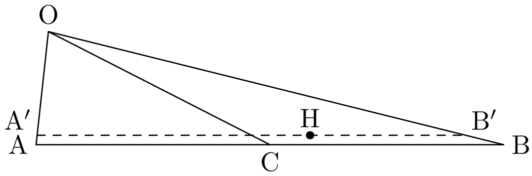
コ, サ　①と②の式を成分で表現するとそれぞれ
$-1 \cdot 2 + 2 \cdot p + 0 \cdot q = 4, 2^2 + p^2 + q^2 = 20$ となります。
$q > 0$ に注意してこの方程式を解くと $p = 3, q = \sqrt{7}$ ですので B の座標は $\underline{(2, 3, \sqrt{7})}$ となります。

(2)　シ　$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}}$ ですので、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を代入して
$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \underline{-\overrightarrow{\mathrm{OG}}} + s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表されます。

ス〜チ　$\overrightarrow{\mathrm{GH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{GH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{GH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{GH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ です。すなわち
$-\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0,$
$-\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 0$ がわかります。
また A,B の座標がわかっていますので
$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + (-\sqrt{7}) \cdot 0 = 4,$
$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + (-\sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} = 13$ と計算できます。
これらより $-4 + 5s + 4t = 0, -13 + 4s + 20t = 0$ がわかりますので、これを連立して解くと $\underline{s = \frac{1}{3}, t = \frac{7}{12}}$ となります。

ツ　$\frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{11}{12}$ です。したがって
$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{4}{11} \cdot \left(\frac{11}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \frac{7}{11} \cdot \left(\frac{11}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ となりま

す。
これはすなわち H は位置ベクトル $\frac{11}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で表される点 A$'$ と位置ベクトル $\frac{11}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表される点 B$'$ を両端とする線分を $7:4$ に内分する点であることがわかります。
A$'$, B$'$ はそれぞれ辺 OA,OB 上の点で O,A,B と異なりますので線分 A$'$B$'$ は両端を除いて三角形 OAB の内部にきます。
また線分 A$'$B$'$ は辺 AB に平行ですので線分 OC は線分 A$'$B$'$ の中点を通ります。
すなわち H は線分 OC からみて B$'$ と同じ側にきますので、H は $_1$三角形 OBC の内部の点であることがわかります。



所感

第１問

[1]

　指数対数関数の問題です。
対数から桁数を推定することを題材としています。読み進めれば難しくないでしょう。

[2]

　三角関数の問題です。
合成や加法定理など基本的な計算をすればいけますが、最後に必要十分条件であるかどうかの確認が求められます。

第２問

　微分と積分に関する問題です。

[1]

　定積分の式からグラフの概形を考える問題です。難しいところはなさそうです。

[2]

　絶対値を含む関数を微積分する問題です。
微分がどういうものか理解していないと無得点もありうる恐ろしい設問です。
定積分も計算が面倒になっていますので、時間をとられそうです。

第３問

　統計分析に関する問題です。
前半で少々難しい計算が求められますが、基本がわかっていれば安定した得点がとれると思います。

第４問

　数列の問題です。
前半は一般項や数列の和を計算するものです。
後半は身近なものから数列の漸化式を考え、それを利用して値を計算します。
いろいろな値が出ますので混乱に注意です。

第５問

　ベクトルに関する問題です。
第 1 日程では図形的計算をしましたが第 2 日程では座標を利用したものが出ています。
ただ、最後は面食らった人も多そうです。三角形 OAB の内部であることを示すのは難しくないですが辺 OC も考慮に入れますので必要な検証が増えます。