

解答

第1問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウ	2,5,2	2
エ, オカ, キ	5,65,4	2
ク, ケコ, サ	5,65,2	2
シ	6	2
ス	3	2
セ	2	2
ソ, タチ	6,12	2
ツ	7	2
テト	13	2
ナ	0	2

第2問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	4,5	2
ウエ	12	2
オカ	12	2
キク	25	3
ケ	2	1
コ	0	1
サ	1	1
シ	3	3
ス	1	3
セ	2	2
ソ	2	2
タ	0	2
チ	3	2
ツ	0	2
テ	3	2

第3問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	1,3	3
ウエ	-3	3
オ, カ	1,2	3
キク, ケ	-2,3	3
コサシ	-11	2
スセ	-3	1
ソ	2	3
タチ, ツテ	-2,44	3
ト, ナニ	2.00	2
ヌ, ネノ	2.20	3
ハ, ヒフ	4.40	2
ヘ	3	2

第4問		
解答欄	正解	配点
ア	3	1
イ	3	1
ウ	2	1
エ	5	1
オ	7	1
カ, キ	1,3(順不同)	2×2
ク	1	2
ケ	4	3
コ	5	3
サ	2	3

解説

第1問

[1]

(1)

ア～ウ $c = 1$ のとき①の左辺は $2x^2 + x - 10$ となりますので因数分解すると $(2x + 5)(x - 2)$ となります。

(よって①の解は $x = -\frac{5}{2}, 2$ となる)

(2)

エ～キ $c = 2$ のとき、①の方程式は $2x^2 + 5x - 5 = 0$ となります。解の公式にあてはめると解は

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{4} \text{ となります。}$$

ク～サ $\alpha = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}$ ですので

$$\frac{5}{\alpha} = \frac{5 \cdot 4}{\sqrt{65} - 5} = \frac{20 \cdot (\sqrt{65} + 5)}{65 - 5^2} = \frac{20 \cdot (\sqrt{65} + 5)}{40} = \frac{5 + \sqrt{65}}{2} \text{ となります。}$$

シ $8 = \sqrt{64}, 9 = \sqrt{81}$ ですので $8 < \sqrt{65} < 9$ です。ということで $\frac{5+8}{2} < \frac{5}{\alpha} < \frac{5+9}{2}$ より $\frac{13}{2} < \frac{5}{\alpha} < 7$ がわかります。

したがって $6 < \frac{5}{\alpha} < 7$ ですので $m = 6$ となります。

(3) ス ①の解が異なる2つの有理数であるとき、特に異なる2つの実数解をもちますので判別式は正の値です。判別式を D とすると

$$D = (4c - 3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2c^2 - c - 11) = 97 - 16c \text{ となりますので}$$

すなわち $97 - 16c > 0$ である必要があります。

またこのとき①の解は $\frac{-(4c - 3) \pm \sqrt{D}}{4}$ となりますので \sqrt{D} が0でない有理数になる c の個数を求めることとなります。

$97 - 16c > 0$ を変形すると $c < \frac{97}{16} = 6 + \frac{1}{16}$ ですので $c = 1, 2, \dots, 6$ で検証します。

$c = 1, 2$ は (1), (2) で調べていますので残りを順に調べると \sqrt{D} の値は $\sqrt{49}(=7), \sqrt{33}, \sqrt{17}, \sqrt{1}(=1)$ となります。

したがって条件をみたら c は 1, 3, 6 の 3個 とわかります。

[2]

- (1) セ $A \cup B$ は「 A, B すくなくとも一方に属する要素からなる集合」です。すなわち C は選択肢 3 の斜線部に入りかつ選択肢 1 の斜線部に入らないものですので選択肢 2が該当します。

(2)

ソ～チ $A \cap \bar{C}$ は A の要素でかつ A, B 片方にだけ属するものを除いた全体です。すなわち A, B 両方に属する要素からなる集合となります。

$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ですのでここから C の要素であるものを除去することで $A \cap \bar{C} = \{6, 12\}$ がわかります。

ツ～ト 同様に $B \cap \bar{A} = C \cap \bar{A}$ ですのでこれを利用すると

$B \cap \bar{A} = \{2, 5, 7, 11, 13\}$ となります。

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ ですので合わせることで $B = \{2, 5, 6, 7, 11, 12, 13\}$ となり、すなわち B の要素は 7 個、最大は 13であるとわかります。

ナ 条件を集合の要素を使って書き換えると

$p: x \in \{2, 5, 7, 11, 13\}$ 、 $q: x \in \{5, 7, 11, 13\}$ となります。

したがって条件に使った集合の包含関係 $\{2, 5, 7, 11, 13\} \supset \{5, 7, 11, 13\}$ となりますので $q \Rightarrow p$ は真ですが $p \Rightarrow q$ は偽です。

すなわち p は q であるための 必要条件であるが十分条件でないことがわかります。

第2問

(1)

ア, イ 相互関係から $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ であり $0^\circ < A < 180^\circ$ ですので $\sin A > 0$ です。したがって

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \text{ がわかります。}$$

ウエ $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2}bc \sin A$ で表されますので代入すると $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 12$ となります。

オカ 四角形 ADEB、CHIA はいずれも正方形ですので

$\angle BAD = \angle CAI = 90^\circ, DA = AB = c, AI = CA = b$ が成り立ちます。

よって $\angle DAI = 360^\circ - A - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ - A$ となりますので $\triangle AID$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AI \cdot \sin \angle DAI = \frac{1}{2}bc \sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc \sin A = 12 \text{ となります。}$$

キク 正方形 BFGC の面積は $BC^2 = a^2$ と表せますので余弦定理を利用できます。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 25 \text{ ですので}$$

なわち面積は 25 です。

(2) $S_1 = a^2, S_2 = b^2, S_3 = c^2$ ですので $S_1 - S_2 - S_3 = a^2 - b^2 - c^2$ です。余弦定理を利用するとこの値は $-2bc \cos A$ と表現できます。

ケ $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき $\cos A > 0$ ですので $-2bc \cos A < 0$ です。したがって $S_1 - S_2 - S_3$ は 2負の値 となります。

コ $A = 90^\circ$ のとき $\cos A = 0$ ですので $S_1 - S_2 - S_3$ は 0 となります。

サ $90^\circ < A < 180^\circ$ のとき $\cos A < 0$ ですので $-2bc \cos A > 0$ です。したがって $S_1 - S_2 - S_3$ は 1正の値 となります。

(3) シ (1) と同様に考えると $BE = AB = c, BF = CG = BC = a, CH = CA = b$ であり $\angle EBF = 180^\circ - B, \angle GCH = 180^\circ - C$ です。これらより

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BF \sin \angle EBF = \frac{1}{2}ca \sin B$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot CG \cdot CH \sin \angle GCH = \frac{1}{2}ab \sin C \text{ となります。}$$

これらの右端をみるといずれも $\triangle ABC$ の面積を求める公式と同一です。

$T_1 = \frac{1}{2}bc \sin A$ もわかっていますので T_1, T_2, T_3 はいずれも $\triangle ABC$ の面積に等しいことがわかります。

したがってとくに a, b, c の値に関係なく $T_1 = T_2 = T_3$ が成り立ちます。

- (4) ス (3) より 4 つの三角形 ABC, AID, BEF, CGH はすべて面積が等しいとわかりました。これにより全体の面積は

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \left(\frac{1}{2} bc \sin A \right) + b^2 + c^2 + a^2 \\ &= 2bc \sin A + b^2 + c^2 + (b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \\ &= 2\{b^2 + c^2 + bc(\sin A - \cos A)\} \end{aligned}$$

となり、すなわち空欄には $\sin A - \cos A$ が入ることがわかります。

- (5) セ 余弦定理を利用すると $ID^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - A) = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ となります。
 $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき $\cos A > 0$ ですのですなわち $BC^2 < b^2 + c^2 < ID^2$ が成り立ちます。
 したがって $ID > BC$ がわかります。

- ソ $\triangle AID$ の外接円の半径を R_1 、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R_0 とおくと正弦定理により
 $\frac{BC}{\sin A} = 2R_0$, $\frac{ID}{\sin(180^\circ - A)} = 2R_1$ が成り立ちます。
 いま $ID > BC$ であり $\sin(180^\circ - A) = \sin A$ ですので
 $\frac{BC}{\sin A} < \frac{ID}{\sin(180^\circ - A)}$ が成り立ちます。
 したがって $R_1 > R_0$ すなわち
 $\triangle AID$ の外接円の半径 $>$ $\triangle ABC$ の外接円の半径 がわかります。

- タ 同様に $\triangle BEF, \triangle CGH$ の外接円の半径を R_2, R_3 とおくと、 A, B, C いずれも 90° より小さいことから $R_2 > R_0, R_3 > R_0$ が成り立ちます。
 したがって R_0 が最小となりますので外接円の半径が最も小さい三角形は $\triangle ABC$ となります。

- チ $90^\circ < C$ であるとき $GH = a^2 + b^2 + 2ab \cos C < a^2 + b^2$ となり、
 $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C > a^2 + b^2$ となりますので $AB > GH$ となり、これより $R_0 > R_3$ がわかります。
 $R_1 > R_0, R_2 > R_0$ はひきつづき成り立ちますので最小は R_3 となり、外接円の半径が最も小さい三角形は $\triangle CGH$ となります。

- (6) ツ $\triangle ABC$ の面積を T 、 $\triangle ABC, \triangle AID, \triangle BEF, \triangle CGH$ の内接円の半径をそれぞれ r_0, r_1, r_2, r_3 とおきます。

4 つの三角形の面積はすべて等しいので

$$r_0 = \frac{2T}{AB + BC + CA} = \frac{2T}{a + b + c}, r_1 = \frac{2T}{AI + ID + DA} = \frac{2T}{b + c + ID}$$

$$r_2 = \frac{2T}{BE + EF + FB} = \frac{2T}{c + a + EF}$$

$$r_3 = \frac{2T}{CG + GH + HC} = \frac{2T}{a + b + GH} \text{ となります。}$$

すなわち内接円の半径が最大になるものは三辺の長さが最小になるものに一致します。

いま A, B, C はすべて鋭角ですので $ID > a, EF > b, GH > c$ が (5) からわかります。

したがって $a+b+c$ が最小となりますのであてはまるものは ${}_0\triangle ABC$ となります。

テ (5) から同様に $ID > a, EF > b, GH < c$ となります。ということで $c+a+GH$ が最小となりますのであてはまるものは ${}_3\triangle CGH$ となります。

第3問

[1]

(1)

ア、イ G の式を平方完成すると $y = 2(x-1)^2 + 3$ となります。ということで頂点の座標は (1,3) となります。

(2)

ウエ H の式は $y = 2(x-1)^2 + 3 + k$ となります。 H は下に凸ですので x 軸と共有点をもたないということは頂点の y 座標が正ということになります。すなわち $3 + k > 0$ より $k < -3$ となります。

(3) H の式は $y = 2(x-1)^2 - 2$ となりますので、 x 軸との交点の x 座標では $0 = 2(x-1)^2 - 2$ が成立することから $(x-1)^2 = 1$ すなわち $x-1 = \pm 1$ が成り立ちます。これより $x = 0, 2$ ですので H は x 軸と2点 $(0,0), (2,0)$ で交わることがわかります。

オ H を x 軸方向に1だけ平行移動すると交点も同じだけ動きますので $(1,0), (3,0)$ となります。したがって $2 \leq x \leq 6$ の範囲では $(3,0)$ の1点で交わります。

カ H を x 軸方向に3だけ平行移動すると交点は $(3,0), (5,0)$ となります。したがって $2 \leq x \leq 6$ の範囲では $(3,0), (5,0)$ の2点で交わります。

(4)

キ～ケ H が x 軸と異なる2点で交わる時その2点の x 座標において $0 = 2(x-1)^2 + 3 + k$ が成り立ちます。

これを变形すると $x-1 = \pm \sqrt{\frac{-3-k}{2}}$ となります。すなわち交点

の x 座標は $1 \pm \sqrt{\frac{-3-k}{2}}$ となりますので、これらの距離は

$$\left(1 + \sqrt{\frac{-3-k}{2}}\right) - \left(1 - \sqrt{\frac{-3-k}{2}}\right) = \sqrt{-2(k+3)}$$
 となります。

コ～セ H を x 軸方向に平行移動した場合、 x 軸との交点はどちらも同じだけ平行移動しますから2点間の距離は変わりません。

したがって平行移動により $2 \leq x \leq 6$ の範囲で x 軸と異なる2点 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ で交わる ($\alpha > \beta$) ならば $2 \leq \beta < \alpha \leq 6$ より $\alpha - \beta \geq 6 - 2 = 4$ である必要があります。

逆に $\alpha - \beta = 4$ ならば平行移動により $(2, 0), (2 + \alpha - \beta, 0)$ で交わるようにできるので、すなわち「交点をもち、かつ距離が4以下」

が必要十分となります。

異なる2点で交わる条件は頂点の y 座標が負であるということですからここから $3 + k > 0$ となり、これより $k < -3$ がわかります。

さらに距離が4以下ということですから $\sqrt{-2(k+3)} \leq 4$ が成り立ちます。

これを变形すると $-2(k+3) \leq 16$ となりますので $k \geq -11$ となります。

これらを合わせて $-11 \leq k < -3$ が得られます。

[2]

(1) ソ 1 歩で x m、1 秒で z 歩進ので、1 秒で進む長さは zx と表されます。

(2)

タ～テ ピッチがストライドの 1 次関数ということで係数を a, b とおき $z = ax + b$ とします。ストライドが 0.05 大きくなるとピッチが 0.1 小さくなるということですので $z - 0.1 = a(x + 0.05) + b$ がわかります。

これらの差をとると $0.1 = -0.05a$ ですのですなわち $a = -2$ です。

さらに $x = 2.05$ のとき $z = 4.70$ ですので $4.70 = -2 \cdot 2.05 + b$ となります。これを解くと $b = 8.80$ となります。

これより $z = -2x + \frac{44}{5}$ となります。

ト～ニ ストライドの最大が 2.40 ですので $x \leq 2.40$ でありピッチの最大が 4.80 ですので $z \leq 4.80$ です。この z を x であらわした式に直すと $-2x + 8.80 \leq 4.80$ ですのでこれを解くと $x \geq 2$ です。

すなわち x の範囲は $2.00 \leq x \leq 2.40$ となります。

ヌ～ノ $y = zx$ とおくと z を x の式で直すことにより $y = x \left(-2x + \frac{44}{5} \right)$ とできます。これをさらに変形すると

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + \frac{44}{5}x = -2 \left(x^2 - \frac{22}{5}x \right) \\ &= -2 \left\{ \left(x - \frac{11}{5} \right)^2 - \frac{121}{25} \right\} = -2 \left(x - \frac{11}{5} \right)^2 + \frac{242}{25} \end{aligned}$$

となります。 y が最大になる場合は $\left(x - \frac{11}{5} \right)^2$ が最小となる場合です。

$x = \frac{11}{5} (= 2.2)$ は $2.00 \leq x \leq 2.40$ をみますのでこの値は可能です。そしてこのとき y が最大となりますので、すなわち $x = 2.20$ がわかります。

ハ～フ $x = 2.20$ のときのピッチは $z = -2 \cdot 2.20 + 8.80 = 4.40$ となります。

ヘ y の最大は $\frac{242}{25}$ とわかりましたのでタイムは $100 \cdot \frac{25}{242}$ を計算することで求められます。

$100 \cdot \frac{25}{242} = \frac{1250}{121} = 10.33 + 0.01 \cdot \frac{7}{121}$ となりますのでタイムは 310.33 となります。

第4問

- (1) ア 最頻値は度数が最大の階級値ですので ${}_322.5$ 以上 25.0 未満 となります。
- イ データは 47 個ありますので中央値は 24 番目の値です。22.5 未満のデータは合計 14 個、25.0 未満のデータは合計 25 個ありますので、すなわち 24 番目の値は ${}_322.5$ 以上 25.0 未満 の階級に含まれます。
- ウ 中央値より下は 23 個ありますので第 1 四分位数は 12 番目の値です。20.0 未満のデータは合計 5 個ですので 12 番目の値は ${}_220.0$ 以上 22.5 未満 の階級に含まれます。
- エ 同様にすることで第 3 四分位数は 36 番目の値となります。27.5 未満のデータは合計 31 個、30.03 未満のデータは合計 37 個ですので、36 番目の値は ${}_527.5$ 以上 30.0 未満 の階級に含まれます。
- オ ヒストグラムにある階級の度数をすべて足すと 47 になりますので、この中に最大があります。ということで最大値は最大の階級である ${}_732.5$ 以上 35.0 未満 の階級に含まれます。

(2)

カ、キ それぞれ検証しましょう。

- 0 第 1 次産業は上段、四分位範囲は箱で表される部分です。2000 年度まで後の時点になるにしたがって減少していることが読み取れます。これは正しいといえます。
- 1 1990 年度と 2000 年度は右のひげが長いといえます。これは正しくないといえます。
- 2 第 2 次産業は中段、中央値は箱にある太線で表されています。1990 年度以降は後の時点になるにしたがって減少していることが読み取れます。これは正しいといえます。
- 3 第 1 四分位数は箱の左端で表される部分です。1975 年度から 1980 年度、1985 年度から 1990 年度は増加していることが読み取れます。これは正しくないといえます。
- 4 第 3 次産業は下段、第 3 四分位数は箱の右端で表される部分です。後の時点になるにしたがって増加していることが読み取れます。これは正しいといえます。
- 5 最小値はひげの左端で表される部分です。後の時点になるにしたがって増加していることが読み取れます。これは正しいといえます。

ということで 1,3 が正しくないといえます。

- (3) ク 1985年度は第1次産業は0~30、第3次産業は45~70の階級に入っています。これらがちょうどはまっているものは1のみなので、1のヒストグラムがあてはまります。
- ケ 1995年度は第1次産業は0~20、第3次産業は50~75の階級に入っています。この範囲にきているものは2,4があります。ほかに同様の階級がはまるものは2000年度のみです。1995年度と2000年度では第3次産業の中央値が異なる階級に含まれますのでこれで検証します。
- すると2は60以上65未満、4は55以上60未満の階級に中央値が含まれることがわかります。1995年度では55以上60未満の階級に含まれますので、すなわち4のヒストグラムがあてはまります。
- (4) コ それぞれ検証しましょう。
- (I) 第1次産業と第2次産業では1975年度においては負の相関がみられますが2015年度では相関がみられません。ということで相関は弱くなったといえます。
- (II) 第2次産業と第3次産業では1975年度では相関がみられませんが2015年度では負の相関がみられます。ということで相関は強くなったといえます。
- (III) 第3次産業と第1次産業では1975年度では負の相関がみられますが2015年度では相関が見えにくくなっています。ということで相関は弱くなったといえます。
- ということで、あてはまるものは5(I) 誤、(II) 正、(III) 誤となります。
- (5) サ 得られたデータにおいて第1次産業の就業者数割合を x_i %、男性の就業者数割合を y_i %とすると、図5における散布図のデータは (x_i, y_i) の点を書いていったものといえます。
- いま男性の就業者数と女性の就業者数を合わせると全体となる、としていますので女性の就業者数割合は $100 - y_i$ となります。
- ということで $(x_i, 100 - y_i)$ の点を書いていったものを選ぶこととなりますので、全体として縦軸が反転したものを選びます。この観点から考えるとあてはまるものは2の散布図といえます。

所感

数学 I は大きめに変化しています。特に大問の配点が変わっているのが印象的です。

第 1 問

単元はこれまでと同様ですが配点が 25 点から 20 点に減っています。

[1]

数と式に関する問題です。対話文とかはありますがセンターとの差はあまりありません。

[2]

集合と論理に関する問題です。なんと数学 I A では出題されていない、この科目のみの問題です。

集合を求めるにはドモルガンを利用するよりベン図を使ったほうが速そうです。

第 2 問

例年では第 3 問となっていた、図形と計量に関する問題です。配点が 20 点から 30 点に増えています。

考えている図は有名中学入試に出てきそうなものを使っています。

面積を余弦定理に結び付けたりと、多くの公式を動員する必要があり、かなり手がかかると思います。

第 3 問

二次関数に関する問題です。配点が 25 点から 30 点に増えています。

[1]

二次関数のグラフを考える問題です。変わり映えしていないように見えますが x 軸方向の平行移動で x 軸との交点も同じだけ平行移動することに気づかないと時間をとられてしまうでしょう。

[2]

本科目で最大の変化といってよい、身の回りの事柄を利用した問題です。全体的に読み解きがうまくいくかどうかの影響します。

第4問

データの分析に関する問題です。これまでのセンター試験と同じく、設問数が少ないながら細かい検証が色々と必要になる、面倒なものがそろっています。