解答

第１問		
解答欄	正解	配点
ア	3	2
イ	2	2
ウ, エ	6,2	2
オ, カ	2,1	1
キ	9	2
ク	1	1
ケ	3	1
コ, サ	1,9	2
シ, ス	2,1	2
セ	1	1
ソ	0	1
タ	0	1
チ	1	1
ツ, テ	5,2	2
ト	0	1
ナ	3	1
ニ	1	2
ヌ	2	2
ネ	1	3

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	3	1
イ, ウ	2,3	2
エ	4	2
オ	c	1
カ, キ	b,c	2
クケ, コ	-c,b	1
サ, シ, ス	3,3,3	4
セ	0	3
ソ	5	1
タ, チ	3,5	2
ツ	d	1
テ, ト	c,d	2
ナ	2	3
ニヌ, ネ, ノ	-b,a,0	2
ハヒフ, ヘホ	-2b,3a	3

第３問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	a,1	2
ウエ, オ, カ	2a,2,a	3
キ, ク, ケ	a,1,a	3
コサ, シ	2a,2	1
ス, セ	a,1	1
ソ	a	1
タ	2	2
チツ	1,2	2
テ	1	1
ト	2	2
ナ	1	2

第４問		
解答欄	正解	配点
ア	6	2
イ	0	3
ウ	2	3
エオ	1,2	3
カキ	2,3	3
ク	2	3
ケ	1	3

解説

第 1 問

[**1**]

(1) ア $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となるような θ は整数 n を用いて $\theta = \left(2n + \dfrac{1}{6}\right)\pi$ となります。空欄に当てはまるものは$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$に限られます。

イ 三角関数の合成により

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \frac{1}{2}\sin\theta + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{6}\cos\theta\right) = \underline{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

となります。

ウ, エ $\dfrac{\pi}{6} \leq \theta + \dfrac{\pi}{6} \leq \dfrac{2\pi}{3}$ ですので $\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ のときが最大です。
すなわち$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$で最大値$\underline{2}$をとります。

(2) (i)

オ, カ $p = 0$ のとき $y = \sin\theta$ ですので$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{2}}$のとき最大値$\underline{1}$をとります。

(ii)

キ $y = k\cos(\theta - \alpha)$ の形にしたい場合、まずは加法定理で戻すと $y = k\cos\alpha\cos\theta + k\sin\alpha\sin\theta$ となります。相互関係を利用すると $(k\cos\alpha)^2 + (k\sin\alpha)^2 = k^2$ となりますのですなわち $\cos\theta, \sin\theta$ それぞれの係数の 2 乗の和が k^2 となります。
これを利用すると $k^2 = 1 + p^2$ ですので $y =_{9}\underline{\sqrt{1+p^2}}\cos(\theta - \alpha)$ とできます。

ク, ケ 加法定理で戻した式で係数を比較すると
$\sqrt{1+p^2}\cos\alpha = p, \sqrt{1+p^2}\sin\alpha = 1$ となります。
これより $\sin\alpha =_{1}\underline{\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}}, \cos\alpha =_{3}\underline{\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}}$ がわかります。

コ, サ いま $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ としていますので $\theta = \alpha$ をとることができます。このとき $\theta - \alpha = 0$ となりますので $\cos(\theta - \alpha)$ は最大値をとります。ということで y は $_{1}\underline{\theta = \alpha}$で最大値 $_{9}\underline{\sqrt{1+p^2}}$ をとることがわかります。

(iii)

シ, ス　$0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \dfrac{\pi}{2}$ であれば $\sin\theta_1 < \sin\theta_2, \cos\theta_1 > \cos\theta_2$ ですので $\sin\theta_1 + p\cos\theta_1 < \sin\theta_2 + p\cos\theta_2$ です。
ということで θ が大きいほど y は大きくなりますので、y は $_2\underline{\theta = \dfrac{\pi}{2}}$ のときに最大値 $_1\underline{1}$ をとることがわかります。

[2]

(1) セ $2^0 = 2^{-0} = 1$ ですので $f(0) = \dfrac{1+1}{2} = \underline{1}$ です。

ソ 同様にして $g(0) = \dfrac{1-1}{2} = \underline{0}$ です。

タ, チ 相加相乗平均の関係から $f(x) \geq \sqrt{2^x + 2^{-x}} = 1$ です。等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x = -x$ より $x = 0$ のときに成立します。
これより $f(x)$ は$\underline{x=0}$で最小値$\underline{1}$をとることがわかります。

ツ, テ $2^x = t$ とおくと $g(x) = \dfrac{t - t^{-1}}{2}$ となります。$g(x) = -2$ を代入して $2t$ 倍して整理すると $t^2 + 4t - 1 = 0$ となります。
これを解くと $t = -2 \pm \sqrt{5}$ となりますが $x = \log_2 t$ なので真数条件より $t = \sqrt{5} - 2$ となります。
したがって求める値は$\underline{x = \log_2(\sqrt{5}-2)}$となります。

(2) ト $f(-x) = \dfrac{2^{-x} + 2^x}{2} = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$ ですので $f(-x) = {}_0\underline{f(x)}$です。

ナ $g(-x) = \dfrac{2^{-x} - 2^x}{2} = -\dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$ ですので $g(-x) = {}_3\underline{-g(x)}$です。

ニ $\{f(x)\}^2 = \dfrac{2^{2x} + 2^{-2x} + 2}{4}, \{g(x)\}^2 = \dfrac{2^{2x} + 2^{-2x} - 2}{4}$ ですので $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \underline{1}$ です。

ヌ $f(x)g(x) = \dfrac{2^{2x} - 2^{-2x}}{4} = \dfrac{2}{4}g(2x)$ ですので $g(2x) = \underline{2f(x)g(x)}$ です。

(3) ネ まずは $\beta = 0$ で検証しましょう。
(A) は左辺が $f(\alpha)$、右辺が $g(\alpha)$ となってしまうので不適とわかります。
(B) は両辺がともに $f(\alpha)$ となるので成り立ちそうです。
(C) は左辺が $g(\alpha)$、右辺が $f(\alpha)$ となりやはり不適です。
(D) は左辺が $g(\alpha)$、右辺が $-g(\alpha)$ となり不適です。
ということで (B) 以外は成り立たないことがわかりました。実際に (B) の右辺を計算すると

$$
\begin{aligned}
& f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) \\
= & \frac{(2^\alpha + 2^{-\alpha})(2^\beta + 2^{-\beta})}{4} + \frac{(2^\alpha - 2^{-\alpha})(2^\beta - 2^{-\beta})}{4} \\
= & \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{\alpha-\beta} + 2^{\beta-\alpha} + 2^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{2^{\alpha+\beta} - 2^{\alpha-\beta} - 2^{\beta-\alpha} + 2^{-\alpha-\beta}}{4} \\
= & \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{2}
\end{aligned}
$$

となり、たしかに $f(\alpha + \beta)$ に等しいことがわかります。
したがって成り立つものは ${}_1\underline{\text{(B)}}$のみとなります。

第２問

(1) ア どちらの関数も $x=0$ を代入すると $y=3$ が成り立ちます。すなわち y 軸との交点の y 座標は$\underline{3}$であることがわかります。

イ, ウ それぞれの導関数を考えると順に $6x+2, 4x+2$ となります。すなわち導関数の $x=0$ における値はどちらも 2 となりますので、y 軸との交点における接線は傾き 2 で y 切片が 3 となります。ということですなわち$\underline{y=2x+3}$が接線の方程式となります。

エ 共通点を上から検証します。
まずは y 軸との交点における y 座標ですが、これは $x=0$ での値すなわち定数項をみることでわかります。これによりそれが 3 でない 0,1,2 の式が除外されます。
次に導関数を考えます。すると $x=0$ での値は 3 が-2、4 が 2、5 が-2 となります。
ということで $\underline{{}_4 y=-x^2+2x+3}$があてはまることがわかります。

オ 曲線 $y=ax^2+bx+c$ の x 座標が 0 となる点の y 座標はこれに $x=0$ を代入した値ですのですなわち$\underline{(0,c)}$です。

カ, キ 右辺の導関数は $2ax+b$ となりますので $x=0$ におけるその値は b です。
ということで l は傾き b、y 切片 c の直線ですので$\underline{y=bx+c}$となります。

ク〜コ l と x 軸との交点の x 座標はすなわち $y=0$ となる x の値ですので $0=bx+c$ を解いて$\underline{x=-\dfrac{c}{b}}$となります。

サ〜ス a,b,c が正であるとき、$(ax^2+bx+c)-(bx+c)=ax^2 \geq 0$ ですので $y=ax^2+bx+c$ のグラフは l の上側にきます。また $-\dfrac{c}{b}<0$ ですので

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{c}{b}}^{0} \{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx = \int_{-\frac{c}{b}}^{0} (ax^2)dx \\ &= \left[\frac{ax^3}{3}\right]_{-\frac{c}{b}}^{0} = 0-\frac{a}{3}\left(-\frac{c}{b}\right)^3 = \underline{\frac{ac^3}{3b^3}} \end{aligned}$$

となります。

セ $a=1$ として S を定数と考えると $S=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{c}{b}\right)^3$ より $c=\sqrt[3]{3S}b$ となります。
すなわち b,c は比例関係にあり正の値をとりますので0 のグラフがあてはまります。

(2) 考え方は (1) と同様です。

ソ $x=0$ での値を考えることで交点の y 座標は$\underline{5}$だとわかります。

タ, チ 導関数は px^2+qx+3 と表せますので $x=0$ における微分係数は 3 となります。
すなわち接線の方程式は$\underline{y=3x+5}$となります。

ツ $x=0$ での値を考えることでこの点は$\underline{(0,d)}$とわかります。

テ, ト 導関数が $3ax^2+2bx+c$ となりますので $x=0$ での微分係数は c です。
したがって接線の方程式は$\underline{y=cx+d}$となります。

ナ $h(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)-(cx+d)=ax^3+bx^2$ です。
$h'(x)=3ax^2+2bx=x(3ax+2b)$ ですので $a,b\neq 0$ であることから $h'(x)$ は $x=0$ の前後で負から正に変わります。
これより $h(x)$ は $x=0$ で極小値 0 をとりますので2 のグラフがあてはまります。

ニ〜ノ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標においては $f(x)=g(x)$ が成り立ちます。
これより $f(x)-g(x)=0$ ですのですなわち $h(x)=0$ です。$a,b\neq 0$ なので $h(x)=0$ を解くことで求める値は$\underline{-\dfrac{b}{a},0}$の 2 つであることがわかります。

ハ〜ホ $h'(x)$ は $x=-\dfrac{2b}{3a}$ の前後で正から負に変わります。$\dfrac{b}{a}>0,-\dfrac{2}{3}>-1$ ですので増減表は以下のようになります。

x	$-\frac{b}{a}$		$-\frac{2b}{3a}$		0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$h(x)=f(x)-g(x)$ は $-\dfrac{b}{a}\leq x\leq 0$ で非負の値をとりますのでこの区間での最大値は上の増減表における極大値、すなわち$\underline{x=-\dfrac{2b}{3a}}$のときにとることがわかります。

第３問

(1)

ア, イ　線分 MP の長さを c とおくと線分 MQ の長さは ac となります。いま M,P,Q はこの順に並んでいますので PQ=MQ-MP=$ac-c=(a-1)c$ となります。
したがって P は線分 MQ を $1:\underline{(a-1)}$ に内分することがわかります。

ウ～ケ　内分点の座標を求める公式を利用すると

$$\begin{aligned} s &= \frac{(a-1)\cdot 2+1\cdot x}{(a-1)+1} = \underline{\frac{x+2a-2}{a}} \\ t &= \frac{(a-1)\cdot(-1)+1\cdot y}{(a-1)+1} = \underline{\frac{y-a+1}{a}} \end{aligned}$$

がわかります。

(2)

コ～ソ　点 $\mathrm{P}(s,t)$ は $s^2+t^2=1$ をみたすように動いているのでこれに (1) で求めた関係式を代入すると
$\left(\frac{x+2a-2}{a}\right)^2+\left(\frac{y-a+1}{a}\right)^2=1$ となります。
これの分母をはらうことで$\underline{(x+2a-2)^2+(y-a+1)^2=a^2}$がわかります。

(3)　タ　l と C が接しているとき、C の中心と l との距離は C の半径に等しくなります。すなわち
$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1+1}}=1$ が成り立ちます。これを解くことで$\underline{k=\sqrt{2}}$がわかります。

チ～テ　$\mathrm{P}(s,t)$ が l 上を動くとき $s+t-\sqrt{2}=0$ が成り立ちますのでこれに (1) で求めた式を代入します。すると
$\frac{x+2a-2}{a}+\frac{y-a+1}{a}-\sqrt{2}=0$ となります。これの分母をはらって整理することで
$\underline{x+y+(1-\sqrt{2})a-1=0}$を得ます。

(4)　ト　C_a の中心は $(2-2a, a-1)$ でしたのでこれと l_a との距離は
$\frac{|(2-2a)+(a-1)+(1-\sqrt{2})a-1|}{\sqrt{1+1}}=\underline{a}$ となります。

ナ　C_a の中心と k_a との距離が C_a の半径と等しくなりましたので C_a と l_a は ${}_1$$\underline{a\text{ の値によらず接する}}$ことがわかります。

第 4 問

(1) $k=0$ のときは $P(x)=x^4-x^2+6x$ となります。

ア $P(x)$ は x でくくれますので $P(x)=x(x^3-x+\underline{6})$ とできます。

イ $x=-2$ のとき $x^3-x+6=(-2)^3-(-2)+6=-8+2+6=0$ となりますので $P(-2)=-2\cdot 0=\underline{0}$ となります。

ウ $P(-2)=0$ ですので因数定理により $P(x)$ は $x+2$ でくくれます。これを利用することで $P(x)=x\underline{(x+2)}(x^2-2x+3)$ と計算できます。

エ, オ この因数分解により $P(x)=0$ ならば
$x=0.x+2=0, x^2-2x+3=0$ のいずれかが成り立ちます。
$x^2-2x+3=0$ のとき平方完成により $(x-1)^2=-2$ となりますのですなわち $x=1\pm\sqrt{2}i$ です。
よって $P(x)=0$ の解は $x=0,-2,1\pm\sqrt{2}i$ ですので虚数解は $\underline{1\pm\sqrt{2}i}$ となります。

(2) $k=3$ のとき $P(x)=x^4+2x^2+9$ となります。

カ, キ $P(x)$ を x^2-2x+3 で割ると

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2(x^2-2x+3)+2x^3-x^2+9\\ &= (x^2+2x)(x^2-2x+3)+3x^2-6x+9\\ &= \underline{(x^2+2x+3)}(x^2-2x+3)\end{aligned}$$

とできます。

(3) ク $P(x)=(x^2+mx+n)(x^2-2x+3)$ とできると仮定します。この右辺は展開すると
$x^4+(m-2)x^3+(n+3-2m)x^2+(3m-2n)x+3m$ となります。
x^3 の係数に着目すると $m-2=0$ となりますので、$\underline{m=2}$となります。

(4) ケ $P(x)=(x^2+2x+k)(x^2-2x+3)$ とできることが確認されました。すなわち $P(x)=0$ の解は $x^2+2x+k=0$ の解または $x^2-2x+3=0$ の解であることがわかります。
(1) より $x^2-2x+3=0$ の解は実数ではないことが確かめられていますので、$P(x)=0$ が実数解をもたない必要十分条件は方程式 $x^2+2x+k=0$ が実数解をもたないことです。すなわちこの判別式が負となる条件を求めますので
$2^2-4k<0$ となる範囲を求めます。これを解くことで求める範囲は$\underline{k>1}$がわかります。

所感

特別なことはあまり求められない、標準的な問題がそろいました。

第 1 問

[1]

三角関数の問題です。cos を利用した合成もしますが問題文の誘導に従えば難しくないです。

[2]

指数対数関数の問題です。見慣れない形式かもしれませんが単純計算でどうにかなります。
この問題は双曲線関数を題材としています。$g(\alpha+\beta) = f(\alpha)g(\beta) + f(\beta)g(\alpha)$ が成り立ちますので計算して確かめてみましょう。

第 2 問

微積分を利用した問題です。微分係数や導関数の性質を理解していれば難しくないです。
なお、解答に c, d が出るのはセンターでも長年みられなかった傾向です。

第 3 問

図形と式に関する問題です。計算では長い式がでてきますので間違いに気を付けたいです。
なお、最後の問題は Q のえがく軌跡が P のえがく軌跡を拡大したものである、とわかれば直感で選ぶことができます。

第 4 問

複素数の問題です。計算自体も考えることも比較的少なく、解きやすいです。
マーク数が少なめですので間違いには気を付けましょう。