解答

第１問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウエ	**-,8,16**	**2**
オカキ	**-20**	**2**
ク	**3**	**1**
ケコ	**16**	**1**
サシ	**14**	**3**
ス	**3**	**2**
セ	**2**	**1**
ソ	**6**	**3**
タ, チ	**3,2**	**2**
ツ, テ	**3,3**	**2**
ト	**3**	**1**
ナ, ニ	**2,3**	**2**
ヌ	**3**	**1**
ネ, ノ	**2,3**	**2**
ハ	**0**	**1**
ヒ	**3**	**1**
フ	**7**	**1**
ヘ	**6**	**1**
ホ	**3**	**1**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	**3**	**2**
イ, ウ	**3,1**	**2**
エオ	**10**	**3**
カ	**3**	**2**
キ	**2**	**3**
ク, ケ	**a,1**	**3**
コサ, シ	**-2,3**	**2**
スセソ, タチ	**-41,27**	**2**
ツ	**2**	**2**
テトナ	**-11**	**2**
ニ	**3**	**4**
ヌネ	**-3**	**3**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**2,3**	**2**
ウ, エ	**1,2**	**1**
オ	**3**	**1**
カ, キ, ク, ケ	**7,2,3,2**	**3**
コ, サ	**1,2**	**2**
シス, セ	**-2,3**	**2**
ソ	**0**	**1**
タ, チ	**5,4**	**2**
ツ, テ, ト, ナ	**5,4,1,2**	**2**
ニ	**2**	**2**
ヌ, ネ	**1,2**	**2**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**a,3**	**2**
ウ, エ	**b,3**	**2**
オ, カ, キ, ク	**2,2,3,3**	**2**
ケ	**9**	**2**
コ	**1**	**2**
サ, シ	**0,3**	**2**
ス	**2**	**2**
セソ, タチ	**12,15**	**2**
ツ, テ	**2,9**	**2**
トナ, ニ, ヌネ	**54,5,27**	**2**

解説

第 1 問

[1]

(1)

ア〜エ　$t=2^x$ のとき $t^2=(2^x)^2=2^{2x}$、$2^{x+4}=2^x\cdot 2^4=16t$ ですので
$y=-t^2+16t-48=\underline{-(t-8)^2+16}$ と変形できます。

オカキ　$x=1$ のとき $t=2$ ですので $y=-(2-8)^2+16=16-36=\underline{-20}$
となります。

ク　$x\geq 1$ のとき $t\geq 2$ です。y の式から $t=8$ のときに最大値をとることがわかります。
$t=8$ のとき $8=2^3$ であることから$\underline{x=3}$とわかります。

ケコ　最大をとるときは $t=8$ のときですので、このとき $y=16-0^2=\underline{16}$
となります。

(2)

サシ　$-(t-8)^2+16\geq -20$ となる t の範囲を考えましょう。
整理すると $t^2-16t+28=(t-2)(t-14)\leq 0$ となりますのです
なわち $2\leq t\leq 14$ です。
したがってこの範囲は x に直すと $1\leq x\leq \log_2 14$ となります。
すなわち $1\leq x\leq k$ がこの範囲に含まれれば y の値は -20 以上となります。
さらに $x=1$ のとき $y=-20$ となりますので $1\leq x\leq k$ が
$1\leq x\leq \log_2 14$ に含まれれば最小値は-20 となります。
したがって k の範囲は $1<k\leq \underline{\log_2 14}$ となります。

ス　$2^3=8, 2^4=16$ ですので $3<\log_2 14<4$ です。したがって範囲に含まれる最大の整数は$\underline{3}$です。

(3)　セ　まずは $y=0$ をみたす t を求めましょう。すると $-(t-8)^2+16=0$
より $(t-8)^2=16$ がわかります。
すなわち $t-8=\pm 4$ ですので $t=4,12$ がわかります。
x が増加すると t も増加するので小さいほうの x は小さいほうの t に対応する値、すなわち $2^x=4$ をみたす値となります。
$4=2^2$ ですのでその値は$\underline{2}$となります。

ソ　大きいほうの値は $2^x=12$ をみたす値、すなわち $x=\log_2 12$ です。底の変換公式を利用して計算すると
$x=\log_2(2^2\cdot 3)=2+\log_2 3=2+\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}=2+\dfrac{0.4771}{0.3010}$ となりま

す。
$1.5 < \dfrac{0.4771}{0.3010} < 1.6$ が成り立ちますので、${}_{6}\underline{3.5 < x < 3.6}$をみたすことがわかります。

[**2**]

(1)

タ〜テ　加法定理を利用すると

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 3x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x$$

がわかります。したがって

$$f(x)=-\frac{3}{2}\sin 3x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)\cos 3x=\underline{-\frac{3}{2}\sin 3x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos 3x}$$

となります。

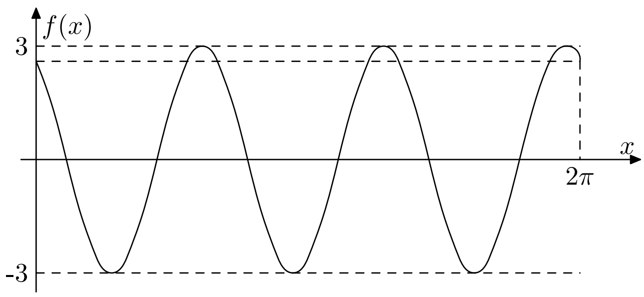
ト〜ニ　合成公式を利用します。$\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=9$ ですので

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right) \\ &= 3\cdot\left(\sin 3x\cos\frac{2\pi}{3}+\cos 3x\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\underline{3\sin\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

となります。

ヌ　$\sin\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)$ は-1 以上 1 以下ですので 1 が最大です。すなわち $f(x)$ の最大値は$\underline{3}$となります。

ネ, ノ　θ の関数 $\sin(\theta+\alpha)$ の正の周期で最小のものは 2π です。
すなわち $3x=2\pi$ をみたす x が最小の正の周期となりますので、その値は$\underline{\frac{2}{3}}\pi$です。



(2)

ハ $|t|>3$ のときに $f(x)=t$ となるとすると $\left|\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)\right|>1$ をみたすことになりますが x が実数であればそれをみたすことはありません。したがって$\underline{N=0}$がわかります。

ヒ $f(x)=3$ となるとき、$\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=1$ となります。いま考えている x の範囲から $\dfrac{2}{3}\pi\leq 3x+\dfrac{2}{3}\pi\leq\dfrac{20}{3}\pi$ となりますので $3x+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{2}\pi,\dfrac{9}{2}\pi,\dfrac{13}{2}\pi$ が考えられます。それぞれから x が 1 つずつ出ますので$\underline{N=3}$がわかります。

フ $f(0)=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ですので、$\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる x を数えます。
すると $3x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{7}{3}\pi,\dfrac{8}{3}\pi,\dfrac{13}{3}\pi,\dfrac{14}{3}\pi,\dfrac{19}{3}\pi,\dfrac{20}{3}\pi$ が考えられますので、$\underline{N=7}$がわかります。

ヘ $|t|<3$ であるとき、$\sin\left(3\alpha+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{t}{3}$ をみたすならば
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(3\alpha+\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)=\dfrac{t}{3}$ も成立します。
$\dfrac{\pi}{2}-\left(3\alpha+\dfrac{2}{3}\pi\right)=-3\alpha-\dfrac{\pi}{6}=3\left(-\alpha-\dfrac{5}{18}\pi\right)+\dfrac{2}{3}\pi$ が成り立ちますのですなわち $f(x)=t=f(\alpha)$ となる x は k を整数として
$\alpha+\dfrac{2k}{3}\pi$ から 3 つ、$\dfrac{2k}{3}\pi-\alpha-\dfrac{5}{18}\pi$ から 3 つとることになります。
($t\neq f(0)$ なのでこれらが $0,2\pi$ になることはない)
したがって$\underline{N=6}$となります。

ホ $f(x)=-3$ となるとき $\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=1$ となります。x の範囲から
$3x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{3}{2}\pi,\dfrac{7}{2}\pi,\dfrac{11}{2}\pi$ が考えられます。
したがって$\underline{N=3}$がわかります。

第２問

(1)　ア　$f'(x)=3x^2$ ですので $f'(-1)=3\cdot(-1)^2=\underline{3}$ がわかります。

イ, ウ　l は $\mathrm{A}(-1,-2)$ で接しますので傾きは $f'(-1)=3$ です。すなわち $y=3(x+1)-2$ を整理して$\underline{l: y=3x+1}$がわかります。

エオ　l の式を $3x-y+1=0$ と変形しましょう。すると O と l との距離は

$\dfrac{|3\cdot 0-1\cdot 0+1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{10}}$ とわかります。

(2)　カ　C_2 の A における接線が l であることから $g(x)$ の $x=-1$ における微分係数は l の傾きに一致します。すなわち$\underline{g'(-1)=3}$です。

キ　$g'(x)=3x^2+2ax+b$ ですので $g'(-1)=3$ より $3-2a+b=3$ です。したがって$\underline{b=2a}$がわかります。

ク, ケ　C_2 は A を通りますので $g(-1)=-2$ です。$b=2a$ も代入すると $g(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+c=c-a-1$ となりますので $c-a-1=-2$ がわかります。
したがって$\underline{c=a-1}$がわかります。

(3)

コ～シ　$a=-2$ のとき $b=-4$ となりますので $g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$ となります。
すなわち $g'(x)=0$ となる x は $2,-\dfrac{2}{3}$ です。
このうち極大となる場合は x の前後で $g'(x)$ が正から負に変わるものですので$\underline{x=-\dfrac{2}{3}}$の場合です。

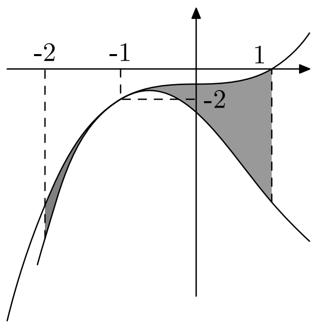
ス～チ　極大値は $x=-\dfrac{2}{3}$ のときの値です。いま $a=-2$ ですので $c=-3$ となり、すなわち $g(x)=x^3-2x^2-4x-3$ となります。したがって極大値は

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{2}{3}\right) &= \left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-3 \\ &= -\frac{8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}-3=\underline{-\frac{41}{27}} \end{aligned}$$

となります。

ツ　極小となる場合は x の前後で $g'(x)$ が負から正に変わるものですので $g'(x)$ の式から$\underline{x=2}$となる場合とわかります。

テトナ　極小値は $g(2)=2^3-2\cdot 2^2-4\cdot 2-3=\underline{-11}$ となります。

(4) 

ニ　C_1 と C_2 の位置関係をみるために $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係を考えます。

$f(x)-g(x) = (x^3-1)-(x^3+ax^2+2ax+a-1) = -ax^2-2ax-a = -a(x+1)^2$ となります。

いま $a<0$ で考えていますので $-a>0$ となり、すなわち

$f(x)-g(x) \geq 0$ がわかります。

したがって C_1 は x の値に関係なく C_2 の上側にくる (もしくは交わる) ことになります。

すなわち $|f(x)-g(x)|$ が x に関係なく $f(x)-g(x)$ に等しいことがわかりましたので

$S = {}_{3}\underline{\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx}$ がわかります。

ヌネ　実際に計算すると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx = \int_{-2}^{1}\{-a(x^2+2x+1)\}dx \\ &= -a\int_{-2}^{1}(x^2+2x+1)dx = -a\cdot\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-2}^{1} \\ &= -a\cdot\left\{\frac{1}{3}+1+1-\left(-\frac{8}{3}+4-2\right)\right\} = \underline{-3a} \end{aligned}$$

となります。

第３問

(1)

ア, イ l_2 は傾き 2 である l_1 に垂直ですので l_2 の傾きを p とすると $2p=-1$ です。
すなわち $p=-\dfrac{1}{2}$ がわかります。
また l_2 は点 A を通ることから l_2 の式は $y=-\dfrac{1}{2}\cdot(x-1)+1$ と表せます。
これを変形して$\underline{x+2y-3=0}$が導かれます。

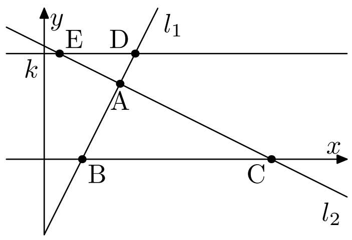
ウ, エ x 軸との交点の座標はすなわち $y=0$ のときの座標です。
l_1 の式に $y=0$ を代入すると $0=2x-1$ となりますので、このとき $x=\dfrac{1}{2}$ です。
すなわち B の座標は$\underline{\left(\dfrac{1}{2},0\right)}$となります。

オ 同様に l_2 の式に $y=0$ を代入すると $x-3=0$ となりますのですなわち $x=3$ です。
したがって C の座標は$\underline{(3,0)}$となります。

(2)

カ～ケ 円の式 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ にそれぞれの座標を代入して係数を求めても構いませんが、ここでは三角形 ABC が A が直角である三角形であることを利用します。
そのことから辺 BC は 3 点 A,B,C を通る円の直径であることがわかります。
すると中心は辺 BC の中点である $\left(\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+3\right),0\right)$ であり、半径は $\dfrac{\left|\frac{1}{2}-3\right|}{2}$ であることがわかります。
計算すると中心が $\left(\dfrac{7}{4},0\right)$、半径が $\dfrac{5}{4}$ であるとわかりますのですなわち円の方程式は
$\left(x-\dfrac{7}{4}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$ と表せます。
これを計算して整理すると$\underline{x^2+y^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{3}{2}=0}$となります。

(3)



コ, サ　l_1 の式に $y=k$ を代入しましょう。すると $k=2x-1$ となりますので $x=\dfrac{k+1}{2}$ です。
したがって D の座標は $\left(\underline{\dfrac{k+1}{2}},k\right)$ となります。

シ〜セ　同様に l_2 の式に代入すると $x+2k-3=0$ となりますので $x=3-2k$ です。
したがって E の座標は $(\underline{-2k+3},k)$ となります。

ソ　D,E が B,C に一致する場合はすなわち直線 $y=k$ が x 軸に一致する場合です。したがってこれは$\underline{k=0}$のときとわかります。

タ, チ　底辺を BC として計算するとやりやすいです、このとき高さは A の y 座標の絶対値に等しくなります。
したがって面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{1}{2}-3\right|\cdot 1=\underline{\dfrac{5}{4}}$ とわかります。

ツ〜ナ　同様に DE を底辺として計算しましょう。すると
$\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left(\dfrac{k+1}{2}\right)-(-2k+3)\right|\cdot|k-1|=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{5}{2}k-\dfrac{5}{2}\right|\cdot|k-1|$
$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot|k-1|^2=\underline{\dfrac{5}{4}(k-1)^2}$ と計算できます。

ニ　三角形 ADE と ABC の面積が等しくなるとき $\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{4}(k-1)^2$ が成り立ちますからこのとき $(k-1)^2=1$ です。したがって $k-1=\pm1$ となりすなわち $k=0,\underline{2}$ のときとわかります。

ヌ, ネ　同様にして方程式を考えると $2\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{4}(k-1)^2$ となりますのですなわち $(k-1)^2=2$ です。
これより $k-1=\pm\sqrt{2}$ となり、$\underline{k=1\pm\sqrt{2}}$が得られます。

第４問

(1)ア, イ　$f(x-3)=(x-a-3)(x-3)+s$ ですので $s=0$ のとき
$f(x-3)=(x-3)(x-a-3)$ となります。
また $f(x)=x(x-a)$ となりますので
$f(x)f(x-3)=x(x-3)\underline{(x-a)(x-a-3)}$ となります。

ウ, エ　$t=0$ のとき $g(x)=x(x-b), g(x-3)=(x-3)(x-3-b)$ となりますので
$g(x)g(x-3)=x(x-3)\underline{(x-b)(x-b-3)}$ となります。

オ〜ク　$h(x)=x(x-3)\{(x-a)(x-a-3)+(x-b)(x-b-3)\}$ となりますので

$$\begin{aligned}Q(x) &= (x-a)(x-a-3)+(x-b)(x-b-3)\\ &= x^2-(2a+3)x+a(a+3)+x^2-(2b+3)x+b(b+3)\\ &= 2x^2-(2a+2b+6)x+a^2+b^2+3a+3b\\ &= \underline{2x^2-2(a+b+3)x+a^2+b^2+3(a+b)}\end{aligned}$$

となります。

ケ, コ　この $Q(x)$ が虚数解をもつ必要十分条件は判別式の値が負であることです。$Q(x)$ の判別式は

$$\begin{aligned}&(a+b+3)^2-2\cdot\{a^2+b^2+3(a+b)\}\\ =\ & (a+b)^2+6(a+b)+9-2(a^2+b^2)-6(a+b)\\ =\ & 9-a^2+2ab-b^2=9-(a-b)^2\end{aligned}$$

となります。すなわち虚数解をもつ必要十分条件は $9-(a-b)^2<0$ ですので
$(a-b)^2-9>0$ となり、すなわち $(a-b)^2-\underline{9}$ の値が ${}_1\underline{\text{正}}$であることとなります。

(2)

サ, シ　$h(x)$ が $x(x-3)$ で割り切れる、すなわちある整式 $P(x)$ によって $h(x)=x(x-3)P(x)$ と表されるとき、$h(0)=h(3)=0$ となります。
逆にこのとき、$h(x)$ を $x(x-3)$ で割った余りは実数 r_1, r_2 を用いて r_1x+r_2 と表せます。この値は $x=0,3$ で 0 になることから $r_2=3r_1+r_2=0$ となり $r_1=r_2=0$ がわかり、すなわち余りが 0 になることがわかります。
したがって必要十分条件は$\underline{h(0)=h(3)=0}$となります。

ス〜チ　$f(x) = x(x-1)+s, g(x) = x(x+2)+t$ です。これより

$$\begin{aligned}
h(0) &= f(0)f(-3)+g(0)g(-3) \\
&= \{0\cdot(-1)+s\}\{(-3)\cdot(-4)+s\}+(0\cdot 2+t)\{(-3)\cdot(-1)+t\} \\
&= s(s+12)+t(t+3) \\
h(3) &= f(3)f(0)+g(3)g(0) \\
&= (3\cdot 2+s)\cdot s+(3\cdot 5+t)\cdot t \\
&= (6+s)s+(15+t)t
\end{aligned}$$

となりますので関係式は
$\underline{s^2+t^2+12s+3t=0, s^2+t^2+6s+15t=0}$となります。

ツ　2 つの式の差をとると $6s-12t=0$ となります。
したがって $s-\underline{2t}=0$ がわかります。

テ　2 つの式の和をとると $2s^2+2t^2=18s+18t=0$ となります。
整理して $s^2+t^2+\underline{9(s+t)}=0$ となります。

ト〜ネ　条件をみたすとき $s=2t$ ですのでこれを代入します。すると
$(2t)^2+t^2+9(2t+t)=0$ となり、
(左辺) $=5t^2+27t=t(5t+27)$ となります。
したがって $t=0, -\dfrac{27}{5}$ がわかり、
対応する s を求めると $t=0$ のとき $s=0$ となり、残りは
$\underline{s=-\dfrac{54}{5}, t=-\dfrac{27}{5}}$となります。

所感

深い思考はそこまで問われない代わりに、計算や検証の複雑さが目立ちます。

第 1 問

[**1**]

指数対数関数を利用した問題です。
指数表記をわかりやすく置き換えていますので、そこまで難しくないと思います。
最後の範囲はここでは本文に出ている近似値から計算していますが、
$2^3 < 3^2, 3^5 < 2^8$ から $2^{1.5} < 3 < 2^{1.6}$ を導いて解くこともできます。

[**2**]

三角関数の問題です。(1) は指示通りに計算すればいけると思います。
(2) は範囲の評価により説明しようとすると少々面倒な気がしますが、単純な $\sin$ 関数ですのでグラフを持ち出すのが楽かもしれません。

第 2 問

微積分の問題です。変わったことは問われていないと思いますが値の計算は複雑なのでそこだけ注意しましょう。

第 3 問

図形と式の問題です。式変形のみで攻めるだけでなく図形的性質に着目できると楽に解ける問題がそろっています。
(2) では直角三角形の外接円は斜辺がその直径になること、(3) では三角形 ABC と三角形 ADE が相似で相似比が $1 : |1-k|$ であることに気づくと差をつけられるでしょう。

第 4 問

整式に関する問題です。ひたすら計算をするだけの問題ですので、根気との勝負になりそうです。