解答

第１問		
解答欄	正解	配点
アイ	**36**	**2**
ウエ	**38**	**1**
オ	**6**	**1**
カキ	**50**	**1**
クケ	**26**	**1**
コ, サ, シス, セ	**5,2,26,2**	**4**
ソ	**5**	**2**
タ	**6**	**3**
チツ, テ	**-4,6**	**2**
ト, ナ	**0,2**	**2**
ニ	**3**	**3**
ヌ	**0**	**3**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウ	**1,2,2**	**2**
エオ, カ, キ	**-1,4,2**	**2**
ク, ケ	**0,8**	**3**
コサ	**36**	**3**
シス	**12**	**3**
セ, ソ, タ	**8,2,3**	**3**
チ	**2**	**3**
ツ	**8**	**3**
テト, ナニ	**-2,16**	**3**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**3,3**	**3**
ウ	**6**	**3**
エ, オ	**4,3**	**3**
カキ, ク	**12,3**	**3**
ケコ, サ	**12,2**	**3**
シ, ス	**1,2**(順不同)	**3**
セソ	**90**	**3**
タ, チ	**4,2**	**3**
ツテ, ト	**23,3**	**3**
ナ	**2**	**3**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア	**3**	**2**
イ	**1**	**2**
ウ	**2**	**2**
エ	**4**	**3**
オ, カ	**1,3**	**4**
キ	**2**	**3**
ク, ケ	**6,4**	**2**
コ	**2**	**2**

解説

第 1 問

[1]

アイ　公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を利用して
$(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=19^2-(5\sqrt{13})^2=361-25\cdot 13=\underline{36}$
と計算できます。

ウエ　$\alpha^2=19+5\sqrt{13}, \beta^2=19-5\sqrt{13}$ となるような値を考えていますので
$\alpha^2+\beta^2=(19+5\sqrt{13})+(19-5\sqrt{13})=\underline{38}$ となります。

オ　$\alpha=\sqrt{19+5\sqrt{13}}, \beta=\sqrt{19-5\sqrt{13}}$ としています。上の計算結果を利用することで
$\alpha\beta=(\sqrt{19+5\sqrt{13}})\cdot(\sqrt{19-5\sqrt{13}})=\sqrt{(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})}$
$=\sqrt{36}=\underline{6}$ がわかります。

カキ　展開公式を利用することで $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=38+2\cdot 6=\underline{50}$
と求められます。

クケ　同様にして $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=38-2\cdot 6=\underline{26}$ と求められます。

コ〜セ　$\alpha>0, \beta>0$ より $\alpha+\beta=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ であり、
$\alpha^2>\beta^2>0$ より $\alpha>\beta$ となるので $\alpha-\beta=\sqrt{26}$ がわかります。
この両辺の和をとることで $2\alpha=5\sqrt{2}+\sqrt{26}$ が得られますので
$\underline{\alpha=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2}}$ となります。
また、差をとることで β も求められます。

ソ　$\alpha-\beta=\sqrt{26}$ であり $5=\sqrt{25}, 6=\sqrt{36}$ ですので $5<\sqrt{26}<6$ がわかります。
すなわち $\alpha-\beta>n$ をみたす整数 n で最大のものは$\underline{5}$であるとわかります。

タ　$\beta\geq 1$ であるとすると $\alpha-\beta>5$ より $\alpha>\beta+5\geq 6$ となりますので $\alpha\beta>6$ となり矛盾します。
したがって $0<\beta<1$ がわかります。これより $\alpha=\dfrac{6}{\beta}>6$ もわかります。
また、$\alpha-\beta<6$ ですので $\alpha<6+\beta<7$ がわかり、したがって $6<\alpha<7$ もわかります。
これより $\beta<x<\alpha$ をみたす整数 x は $x=1,2,3,4,5,6$ の$\underline{6}$個とわかります。

[**2**]

(1) 条件 q を絶対値記号を用いなで表すと「$x-a<-3$ または $x-a>3$」となります。

チ〜テ 命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき、少なくとも $x=-1,3$ のときに q が成立しないといけません。
$x=-1$ のとき q を成立させるためには $-1-a<-3$ または $-1-a>3$ が成り立つ必要があり、これらより $a<-4$ または $a>2$ がわかります。$x=3$ のとき q を成立させるためには $3-a<-3$ または $3-a>3$ が成り立つ必要があり、これらより $a<0$ または $a>6$ がわかります。
まずはこれらを合わせることで $a<-4$ または $a>6$ が必要であることがわかります。
逆に $a<-4$ ならば $x-a>x+4\geq -1+4=3$ が成立し、$a>6$ ならば $x-a<x-6\leq 3-6=-3$ が成立しますのであわせて条件 q が成立することがわかります。
よって $\underline{a<-4, 6<a}$ が求める範囲となります。

ト, ナ 条件 $\bar{q}$ は同様にすると「$-3\leq x-a\leq 3$」となります。
同様にして $x=-1,3$ で考えるとそれぞれから $-4\leq a\leq 2$、$0\leq a\leq 6$ が得られ、合わせると $0\leq a\leq 2$ がわかります。
逆にこの範囲のときに $x-a\leq x\leq 3$、$x-a\geq x-2\geq -1-2=-3$ となりますので $\bar{q}$ が成立することがわかります。
したがって求める範囲は$\underline{0\leq a\leq 2}$となります。

ニ $a=6$ のとき条件 $\bar{q}$ は $-3\leq x-6\leq 3$ すなわち $3\leq x\leq 9$ となります。
「$p\Rightarrow q$」の反例とはすなわち 2 つの条件 $p,\bar{q}$ の両方をみたす例、ということなので $-1\leq x\leq 3$ と $3\leq x\leq 9$ の両方をみたすものとなります。
これにあてはまるのは$\underline{x=3}$のときに限られます。

ヌ 条件 $\bar{p}$ は「$x<-1$ または $3<x$」となります。
いま $a=1$ で考えますので条件 $\bar{q}$ は「$-3\leq x-1\leq 3$」すなわち「$-2\leq x\leq 4$」となります。
したがって条件「$\bar{p}$ かつ $\bar{q}$」は「$-2\leq x<-1$ または $3<x\leq 4$」となります。
この条件はすなわち「$-2\leq x<-1$ または r」と言い換えられます。この条件は r が成立していれば成立しますが r が成立していなくても成立することがあります。
すなわちこれは r であるための $_0$<u>必要条件であるが十分条件でない</u>といえます。

第２問

[1]

(1)

ア〜キ　$f(x)$ を展開して平方完成しましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - ax - 4x + 4 + 4a = x^2 - (a+4)x + 4a + 4 \\ &= \left(x - \frac{a+4}{2}\right)^2 + 4a + 4 - \left(\frac{a+4}{2}\right)^2 \\ &= \left\{x - \left(\frac{a}{2} + 2\right)\right\}^2 - \frac{a^2}{4} + 2a \end{aligned}$$

となりますので、G の頂点の座標は
$\underline{\left(\frac{1}{2}a + 2, -\frac{1}{4}a^2 + 2a\right)}$となります。

(2)

ク, ケ　$f(x)$ の x^2 の項における係数が正ですので G は下に凸です。
したがって G と x 軸が共有点をもつならば G の頂点の y 座標は 0 以下になりますので
$-\frac{1}{4}a^2 + 2a \leq 0$ が成り立ちます。
この不等式は整理すると $a(a-8) \geq 0$ となりますので求める範囲は$\underline{a \leq 0, 8 \leq a}$となります。

コサ　G と y 軸との交点の y 座標の値は x 座標が 0 のときの値ですのですなわち $k = f(0)$ です。
したがって $k = 4a + 4$ となりますので変形して $a = \frac{k}{4} - 1$ がわかります。
$a \geq 8$ ならばすなわち $\frac{k}{4} - 1 \geq 8$ となりますので、これを解くことでとりうる値の範囲は$\underline{k \geq 36}$であるとわかります。
$(4a + 4 \geq 4 \cdot 8 + 4 = 36$ からもこの不等式が得られるが上のやり方でするのが確実だろう$)$

(3) シス　範囲を限定しない場合、最小値は (1) の平方完成の結果から
$y\left(\frac{a}{2} + 2\right) = -\frac{1}{4}a^2 + 2a$ となります。
したがってこの値が -12 であるとき $-\frac{1}{4}a^2 + 2a = -12$ となりますのでまとめると $a^2 - 8a - 48 = 0$ となります。
因数分解により $(a+4)(a-12) = 0$ となりますので、$a \geq 8$ においては$\underline{a = 12}$のときがあてはまります。

セ〜タ　$a = 12$ のとき $f(x) = x^2 - 16x + 52$ となります。G と x 軸との交点の x 座標では $f(x) = 0$ が成り立ちますので、$x^2 - 16x + 52 = 0$

を解くことになります。
平方完成により $(x-8)^2=12$ と変形できますので、
$x-8=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$ がわかり、すなわち求める値は $\underline{x=8\pm 2\sqrt{3}}$
となります。

(4) チ $f(x)$ は二次関数で x^2 の係数は正ですので $a-2\leq x\leq a+2$ における最大値は $f(a-2), f(a+2)$ のいずれかになります。

$$\begin{aligned} f(a-2) &= (a-2)^2-(a+4)(a-2)+4a+4=-2a+16 \\ f(a+2) &= (a+2)^2-(a+4)(a+2)+4a+4=2a \end{aligned}$$

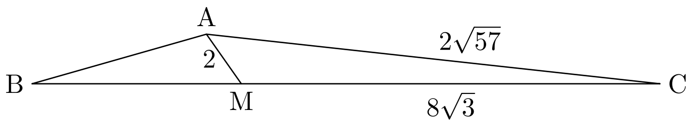
となります。$2a-(-2a+16)=4a-16$ ですがいま $a\geq 4$ ですので $4a-16\geq 0$ となり、すなわち $f(a+2)\geq f(a-2)$ が成立します。
すなわち最大値は $f(a+2)=\underline{2a}$ となります。

ツ 最小値が x の範囲を限定しない場合の最小値に一致するということは最小値をとるときの x が $a-2\leq x\leq a+2$ に存在することになります。
$f(x)$ の最小値は $x=\dfrac{a}{2}+2$ のときにとりますからここの条件は $a-2\leq\dfrac{a}{2}+2\leq a+2$ といえます。
$a-2\leq\dfrac{a}{2}+2$ を解くと $a\leq 8$ となり、$\dfrac{a}{2}+2\leq a+2$ を解くと $a\geq 0$ となります。
両方 (と問題の設定 $a\geq 4$) を合わせることで求める範囲は
$4\leq a\leq\underline{8}$ であるとわかります。

テ〜ニ G の頂点の x 座標が $a-2\leq x\leq a+2$ の範囲にくる条件が上の場合でしたので、$8<a$ のときはこの範囲にこないということになります。
その場合、両端の値である $a-2, a+2$ のどちらかが最小値となります。
上の計算により $a\geq 4$ では $f(a+2)\geq f(a-2)$ がわかっていますので最小値は $f(a-2)=\underline{-2a+16}$ となります。

第３問

(1)



ア, イ　三角形 AMC に余弦定理を適用しましょう。

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AMC} &= \frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2-\mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{CM}} = \frac{4+64\cdot3-4\cdot57}{2\cdot2\cdot8\sqrt{3}} \\ &= \frac{1+16\cdot3-57}{8\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

となります。

ウ　$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ABM}$ を利用して三角形 ABM に正弦定理を適用します。

$\dfrac{\mathrm{AM}}{\sin\angle\mathrm{ABM}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AMB}}$ がわかります。

また比率からある実数 k を用いて $\sin\angle\mathrm{ABC}=k, \sin\angle\mathrm{AMB}=3k$ とおけますので

AB=AM$\cdot\dfrac{\sin\angle\mathrm{AMB}}{\sin\angle\mathrm{ABM}}=2\cdot\dfrac{3k}{k}=\underline{6}$ がわかります。

エ, オ　三角形 ABM に余弦定理を適用します。

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2-2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos\angle\mathrm{AMB}$ となります。

いま $\angle\mathrm{AMB}+\angle\mathrm{AMC}=180^\circ$ ですのですなわち

$\cos\angle\mathrm{AMB}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{AMC})=-\cos\angle\mathrm{AMC}$ です。

したがってわかっている値を入れていくことで

$36=4+\mathrm{BM}^2-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{BM}$ となり、整理すると

$\mathrm{BM}^2-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{BM}-32=0$ となります。

これを BM の値の二次方程式として解くと $\mathrm{BM}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\pm\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ となります。

辺の長さは正の値ですので BM$=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{10}{\sqrt{3}}=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=\underline{4\sqrt{3}}$ とわかります。

カ〜ク　M は辺 BC 上にありますのですなわち $\mathrm{BM}+\mathrm{CM}=\mathrm{BC}$ です。

したがって $\mathrm{BC}=4\sqrt{3}+8\sqrt{3}=\underline{12\sqrt{3}}$ がわかります。

ケ〜サ　0° 以上 180° 以下の範囲では正弦の値は 0 以上となりますので相互関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\sin\angle\mathrm{AMC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AMC}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ がわかります。

$\sin\angle\mathrm{AMB}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{AMC})=\sin\angle\mathrm{AMC}$ ですので

再度 $\sin\angle\mathrm{ABC}=k$ とおくと $3k=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ がわかります。
これより $\sin\angle\mathrm{ABC}=k=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ となりますので、三角形 ABC の面積は
$\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\underline{12\sqrt{2}}$ と求められます。

(2)

シ, ス すべての辺の長さの 2 乗を計算しましょう。すると
$\mathrm{AB}^2=36, \mathrm{BC}^2=432, \mathrm{CA}^2=228, \mathrm{AD}^2=28, \mathrm{BD}^2=64,$
$\mathrm{CD}^2=256$ がわかります。
それぞれの面についてもっとも長い辺の 2 乗とほかの辺の 2 乗の和を比較すると
$\mathrm{BC}^2>\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2, \mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2,$
$\mathrm{BC}^2>\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2, \mathrm{CD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AC}^2$ が成立します。
したがって直角三角形は ${}_1\underline{\triangle\mathrm{ABD}}$と ${}_2\underline{\triangle\mathrm{ACD}}$の 2 つであるとわかります。

セソ それぞれの計算により $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=90^\circ$ がわかりましたので辺 AD は三角形 ABC を含む平面に垂直とわかります。
したがってその平面に含まれる線分 AM とも辺 AD は垂直になりますので$\underline{\angle\mathrm{DAM}=90^\circ}$がわかります。

タ, チ 三角形 DAM は $\angle\mathrm{DAM}=90^\circ$ の直角三角形とわかりましたので $\mathrm{DM}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AM}^2$ です。したがって代入により
$\mathrm{DM}=\sqrt{28+4}=\sqrt{32}=\underline{4\sqrt{2}}$ とわかります。

ツ〜ト 三角形 CDM に余弦定理を適用します。

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{CDM} &= \frac{\mathrm{CD}^2+\mathrm{DM}^2-\mathrm{CM}^2}{2\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DM}}=\frac{256+32-192}{2\cdot 16\cdot 4\sqrt{2}}\\ &= \frac{8+1-6}{4\sqrt{2}}=\frac{3}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

がわかります。したがって $\cos\angle\mathrm{CDM}>0$ がわかり
$0^\circ<\angle\mathrm{CDM}<90^\circ$ がわかります。
相互関係 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用すると、$\tan\angle\mathrm{CDM}>0$ より
$\tan\angle\mathrm{CDM}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1}=\sqrt{\dfrac{32}{9}-1}=\sqrt{\dfrac{23}{9}}=\underline{\dfrac{\sqrt{23}}{3}}$ がわかります。

ナ $3=\sqrt{9}, 3\sqrt{3}=\sqrt{27}$ ですので $3<\sqrt{23}<3\sqrt{3}$ がわかります。
これを 3 で割ることで $1<\dfrac{\sqrt{23}}{3}<\sqrt{3}$ すなわち

$\tan 45^\circ < \tan \angle\mathrm{CDM} < \tan 60^\circ$ が得られます。
すなわち $\angle\mathrm{CDM}$ の大きさは ${}_2 45^\circ$ より大きく、60° 以下であるといえます。

第 4 問

(1) ア まずは進学率からみてみましょう。すると 35%〜40%の範囲は度数 1 となっています。この情報から選択肢を検証すると、進学率が 35%〜40%の範囲に 2 点ある 1 と 2 が除外されます。
65%〜70%の範囲で検証することもできます。
次は就職率をみてみましょう。このデータは 47 個ありますので、中央値は 24 番目の値になります。または小さい側から 12 番目である第 1 四分位をみるのもよいでしょう。
すると選択肢 0 は第 1 四分位が 20%以上であり、中央値が 25%に近いですので、これは不適とわかります。
残りは第 1 四分位が 17.5%程度であり中央値が 22.5%程度なので適するといえます。ということで3の散布図が正しいといえます。

(2) イ それぞれ検証しましょう。

0 1998 年度や 2003 年度をよく見ると、左側が長くなっています。ということで誤りといえます。
1 下側の箱ひげ図を見ると、どれも左側が長く見えます。ということで正しいといえます。
2 2008 年度の就職率の四分位範囲は 12%程度、2003 年度のそれは 9%程度ですので、2008 年度は直前の時点より範囲が大きくなっています。ということで誤りといえます。
3 1978 年度の四分位範囲は進学率が 12%程度、就職率が 8%程度であり、進学率の四分位範囲が大きいです。ということで誤りといえます。
4 1973 年度の就職率をみると、最大値が 66%程度、最小値が 34%程度です。ということで最大値が最小値の 2 倍 (おおよそ 68%) より小さいです。ということで誤りといえます。

したがって正しい記述は選択肢 1となります。

(3) ウ 1998 年度の箱ひげ図としての特徴は、最小値が 10%以上であること、最大値が 35%以上であることです。
したがって 5%〜10%の範囲が度数 0 であり 35%〜40%の範囲が度数 0 でないものを選ぶことになります。
該当するヒストグラムは選択肢 2とわかります。

エ 2003 年度の箱ひげ図としての特徴は、中央値が 20%を切っていることです。中央値は 24 番目の値ですので下から 24 番目のデータがどこにくるかをヒストグラムでみてみましょう。(2 は 1998 年度とわかっているので除外)
20%未満のデータの個数は 0,1 が 3+5+10=18、3 が 3+6+12=21,4

が 3+7+15=25 です。

ということは 0,1,3 のヒストグラムは 24 番目の値が 20%以上であることがわかります。

残りの 4 は 15%より小さいものが 10 個ですので中央値は 15%〜20%の範囲にあることがわかります。

したがって該当するヒストグラムは選択肢 4とわかります。

(4) オ 就職率 34.8%であるデータを探しましょう。すると散布図から下から 24 番目の値であることがわかります。

最大値が 50%以下、最小値が 17%以上あるので範囲は 33%以下となり、当然四分位範囲は 34.8%もないこともわかります。

したがって当てはまるものは $_1$中央値といえます。

カ 今度は進学率の中央値ですので、左から 24 番目の値をみてみましょう。

すると 35%よりやや少ない値であることがわかります。

したがって当てはまるものは $_3$34.5%といえます。

(5) キ 黒い点を含めた散布図は、確かに負の相関関係が見えるようです。ですが黒い点を除くと負の相関関係はまだあるようですが弱まって見えます。

ということであてはまるものは $_2 -0.41 < r < 0$ といえます。

(言い切りたいがこんなの 60 分で計算できそうにない…)

(6)

ク, ケ X と Y 相関係数は X の標準偏差を σ_X、Y の標準偏差を σ_Y、X と Y の共分散を $V_{X,Y}$ とおくと $\dfrac{V_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$ と表せます。

したがってわかっている値を代入すると $-0.41 = \dfrac{-20}{\sigma_X \cdot 7.6}$ となりますので

$\sigma_X = \dfrac{20}{0.41 \cdot 7.6} = \dfrac{20}{3.114} = 6.4 + 0.1 \cdot \dfrac{0.704}{3.114} < 6.45$ となり、四捨五入して6.4が得られます。

コ 問題文に与えられている式に代入することで求めることができます。

$\dfrac{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}{n}$ が X^2 の平均であり分散が標準偏差の 2 乗ですから近似値を入れるとすなわち

$6.4^2 = 1223 - (\bar{u})^2$ となります。

すなわち X の平均値の 2 乗は $1223 - 6.4^2 = 1182.04$ 程度となり、したがってあてはまる値は $_2$1182といえます。

所感

細かい計算が多く求められる問題でした。

第 1 問

[1]

式変形の問題です。慣れないとき進め方をすることが求められており、最後を確実に解くには深い思考が試されます。

[2]

式と命題に関する問題です。記述するとなるとなかなか面倒な論証が求められますが数直線を持ち出せばそこまで難しくはないと思います。

第 2 問

二次関数に関する問題です。比較的素直な問題がそろっているのでつまづきたくないです。

第 3 問

三角比を利用した問題です。序盤の比率から正弦定理を思いつかないと詰まってしまうのが恐ろしい。

第 4 問

データの分析の問題です。各種グラフの読み取りは細かい違いでしかわからないため、確証がとれないものが多いです。
また値の計算も多いため、配点に反して時間を取られたことでしょう。