解答

第１問		
解答欄	正解	配点
アイ	**36**	**2**
ウエ	**38**	**1**
オ	**6**	**1**
カキ	**50**	**1**
クケ	**26**	**1**
コ, サ, シス, セ	**5,2,26,2**	**4**
ソタ, チ	**-4,6**	**2**
ツ	**3**	**3**
テ	**0**	**3**
トナ, ニ, ヌ	**-1,4,2**	**3**
ネ	**2**	**3**
ノ	**8**	**3**
ハヒ, フヘ	**-2,16**	**3**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	**4**	**3**
イ	**2**	**3**
ウ, エ	**9,5**	
オカ, キ, ク	**51,2,8**	**3**
ケコ	**36**	**3**
サ	**3**	**2**
シ	**1**	**2**
ス, セ	**1,3**	**4**
ソ	**2**	**3**
タ, チ	**6,4**	**2**
ツ	**2**	**2**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**1,3**	**2**
ウエオ	**210**	**1**
カキ	**70**	**1**
ク, ケ	**1,3**	**2**
コ, サ	**1,3**	**2**
シス, セソ	**37,42**	**3**
タチ, ツテ	**14,37**	**3**
トナ, ニヌネ	**53,185**	**3**
ノ, ハヒ	**1,45**	**3**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**9,2**	**3**
ウエ, オ	**31,7**	**2**
カ, キ	**3,4**(順不同)	**3**
ク, ケコ	**9,16**	**2**
サシス, セソタ	**100,121**	**3**
チツテト	**1280,4**	**4**
ナニヌ	**527**	**3**

第５問		
解答欄	正解	配点
ア	**4**	**3**
イ	**6**	**3**
ウ, エ	**2,6**	**3**
オカ, キク	**19,35**	**3**
ケコ, サ	**19,7**	**2**
シス, セ	**19,5**	**2**
ソ, タ, チツ	**5,6,12**	**4**

解説

第 1 問

[1]

(1)

アイ　公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を利用して
$(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=19^2-(5\sqrt{13})^2=361-25\cdot 13=\underline{36}$
と計算できます。

ウエ　$\alpha^2=19+5\sqrt{13}, \beta^2=19-5\sqrt{13}$ となるような値を考えていますので
$\alpha^2+\beta^2=(19+5\sqrt{13})+(19-5\sqrt{13})=\underline{38}$ となります。

オ　$\alpha=\sqrt{19+5\sqrt{13}}, \beta=\sqrt{19-5\sqrt{13}}$ としています。上の計算結果を利用することで
$\alpha\beta=(\sqrt{19+5\sqrt{13}})\cdot(\sqrt{19-5\sqrt{13}})=\sqrt{(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})}$
$=\sqrt{36}=\underline{6}$ がわかります。

カキ　展開公式を利用することで $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=38+2\cdot 6=\underline{50}$ と求められます。

クケ　同様にして $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=38-2\cdot 6=\underline{26}$ と求められます。

コ〜セ　$\alpha>0, \beta>0$ より $\alpha+\beta=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ であり、
$\alpha^2>\beta^2>0$ より $\alpha>\beta$ となるので $\alpha-\beta=\sqrt{26}$ がわかります。
この両辺の和をとることで $2\alpha=5\sqrt{2}+\sqrt{26}$ が得られますので
$\underline{\alpha=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2}}$ となります。
また、差をとることで β も求められます。

[**2**]

(1) 条件 q を絶対値記号を用いなで表すと「$x-a<-3$ または $x-a>3$」となります。

ソ〜チ 命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき、少なくとも $x=-1,3$ のときに q が成立しないといけません。

$x=-1$ のとき q を成立させるためには $-1-a<-3$ または $-1-a>3$ が成り立つ必要があり、これらより $a<-4$ または $a>2$ がわかります。$x=3$ のとき q を成立させるためには $3-a<-3$ または $3-a>3$ が成り立つ必要があり、これらより $a<0$ または $a>6$ がわかります。

まずはこれらを合わせることで $a<-4$ または $a>6$ が必要であることがわかります。

逆に $a<-4$ ならば $x-a>x+4 \geq -1+4=3$ が成立し、$a>6$ ならば $x-a<x-6 \leq 3-6=-3$ が成立しますのであわせて条件 q が成立することがわかります。

よって $\underline{a<-4, 6<a}$ が求める範囲となります。

ツ $a=6$ のとき条件 $\bar{q}$ は $-3 \leq x-6 \leq 3$ すなわち $3 \leq x \leq 9$ となります。

「$p \Rightarrow q$」の反例とはすなわち 2 つの条件 $p, \bar{q}$ の両方をみたす例、ということなので $-1 \leq x \leq 3$ と $3 \leq x \leq 9$ の両方をみたすものとなります。

これにあてはまるのは$\underline{x=3}$のときに限られます。

テ 条件 $\bar{p}$ は「$x<-1$ または $3<x$」となります。

いま $a=1$ で考えますので条件 $\bar{q}$ は「$-3 \leq x-1 \leq 3$」すなわち「$-2 \leq x \leq 4$」となります。

したがって条件「$\bar{p}$ かつ $\bar{q}$」は「$-2 \leq x<-1$ または $3<x \leq 4$」となります。

この条件はすなわち「$-2 \leq x<-1$ または r」と言い換えられます。この条件は r が成立していれば成立しますが r が成立していなくても成立することがあります。

すなわちこれは r であるための $_0$<u>必要条件であるが十分条件でない</u>といえます。

[3]

(1)

ト〜ヌ　$f(x)$ を展開して平方完成しましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-ax-4x+4+4a = x^2-(a+4)x+4a+4 \\ &= \left(x-\frac{a+4}{2}\right)^2+4a+4-\left(\frac{a+4}{2}\right)^2 \\ &= \left\{x-\left(\frac{a}{2}+2\right)\right\}^2-\frac{a^2}{4}+2a \end{aligned}$$

となりますので、$f(x)$ の最小値は$\underline{-\frac{1}{4}a^2+2a}$となります。

(2)　ネ　$f(x)$ は二次関数で x^2 の係数は正ですので $a-2 \leq x \leq a+2$ における最大値は $f(a-2), f(a+2)$ のいずれかになります。

$$\begin{aligned} f(a-2) &= (a-2)^2-(a+4)(a-2)+4a+4 = -2a+16 \\ f(a+2) &= (a+2)^2-(a+4)(a+2)+4a+4 = 2a \end{aligned}$$

となります。$2a-(-2a+16)=4a-16$ ですがいま $a \geq 4$ ですので $4a-16 \geq 0$ となり、すなわち $f(a+2) \geq f(a-2)$ が成立します。
すなわち最大値は $f(a+2)=\underline{2a}$ となります。

ノ　最小値が x の範囲を限定しない場合の最小値に一致するということは最小値をとるときの x が $a-2 \leq x \leq a+2$ に存在することになります。
$f(x)$ の最小値は $x=\frac{a}{2}+2$ のときにとりますからここの条件は $a-2 \leq \frac{a}{2}+2 \leq a+2$ といえます。
$a-2 \leq \frac{a}{2}+2$ を解くと $a \leq 8$ となり、$\frac{a}{2}+2 \leq a+2$ を解くと $a \geq 0$ となります。
両方 (と問題の設定 $a \geq 4$) を合わせることで求める範囲は
$4 \leq a \leq \underline{8}$ であるとわかります。

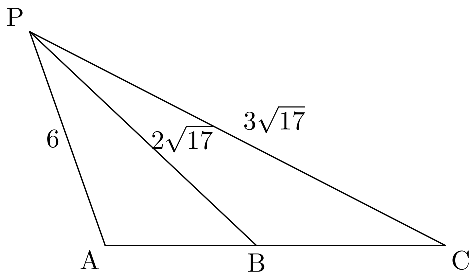
ハ〜ヘ　$f(x)$ が最小となる x の値が $a-2 \leq x \leq a+2$ の範囲にくる条件が上の場合でしたので、$8<a$ のときはこの範囲にこないということになります。
その場合、両端の値である $a-2, a+2$ のどちらかが最小値となります。
上の計算により $a \geq 4$ では $f(a+2) \geq f(a-2)$ がわかっていますので最小値は $f(a-2)=\underline{-2a+16}$ となります。

第２問

[1]

ア $\sin^2\angle\mathrm{PAB}+\cos^2\angle\mathrm{PAB}=1$ より $\cos^2\angle\mathrm{PAB}=1-\dfrac{4\cdot 2}{3^2}=\dfrac{1}{9}$ です。
したがって $\cos\angle\mathrm{PAB}$ として考えられる値は $\pm\dfrac{1}{3}$ となります。
また余弦定理を利用すると $\mathrm{BP}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AB}^2-2\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}\cdot\cos\angle\mathrm{PAB}$ となりますのでわかっている値を代入すると
$68=36+\mathrm{AB}^2-12\cdot\mathrm{AB}\cdot\cos\angle\mathrm{PAB}$ となります。
$\cos\angle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{3}$ とするとこの式は $\mathrm{AB}^2-4\mathrm{AB}-32=0$ と整理できますので $\mathrm{AB}=8,-4$ となりますが $0<\mathrm{AB}<\mathrm{AP}$ をみたしません。
$\cos\angle\mathrm{PAB}=-\dfrac{1}{3}$ とすると $\mathrm{AB}^2+4\mathrm{AB}-32=0$ と整理できますので $\mathrm{AB}=4,-8$ となります。
したがって $0<\mathrm{AB}<\mathrm{AP}$ をみたすものはAB=4となります。

イ 条件をみたすのは $\cos\angle\mathrm{PAB}=-\dfrac{1}{3}$ となる場合でした。$\cos\angle\mathrm{PAB}<0$ ですので $\angle\mathrm{PAB}$ は $_2$鈍角だとわかります。

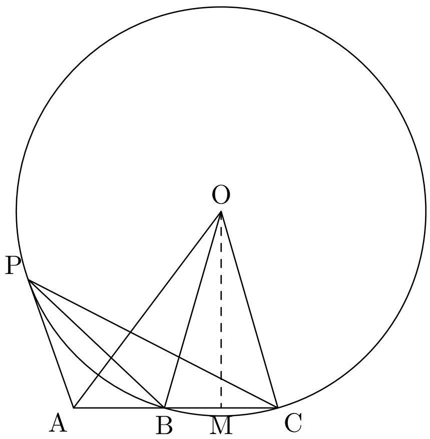


ウ
C は 3 点 A,B,C がこの順に並ぶようにとりますので $\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PAB}$ となり、すなわち $\cos\angle\mathrm{PAC}=\cos\angle\mathrm{PAB}=-\dfrac{1}{3}$ となります。
三角形 PAC に余弦定理を適用すると
$\mathrm{CP}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\angle\mathrm{PAC}$ となりますので、値を代入して $9\cdot 17=36+\mathrm{AC}^2-2\cdot 6\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\mathrm{AC}$ となります。
整理すると $\mathrm{AC}^2+4\mathrm{AC}-117=0$ すなわち $(\mathrm{AC}+13)(\mathrm{AC}-9)=0$ がわかります。
したがって $\mathrm{AC}=9,-13$ となり辺の長さとして適当なものは $\mathrm{AC}=9$ となります。

エ 3 点 A,B,C はこの順に並びますので $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\mathrm{AC}$ です。
したがって $\mathrm{BC}=\mathrm{AC}-\mathrm{AB}=9-4=5$ がわかります。

オ〜ク 三角形 PAB における正弦定理から $\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{PAB}}=\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\angle\mathrm{PBA}}$ ですので
$\sin\angle\mathrm{PBA}=\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}}\cdot\sin\angle\mathrm{PAB}=\dfrac{6}{2\sqrt{17}}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ となります。

$\angle \mathrm{PBC} = 180^\circ - \angle \mathrm{PBA}$ ですので $\sin \angle \mathrm{PBC} = \sin \angle \mathrm{PBA} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ です。
したがって三角形 PBC に正弦定理 $2R = \dfrac{\mathrm{PC}}{\sin \angle \mathrm{PBC}}$ を適用すると
$R = \dfrac{3\sqrt{17}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{51}{4\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{51\sqrt{2}}{8}}$ がわかります。



ケコ

三角形 OBC が $\mathrm{OB} = \mathrm{OC}(= R)$ の二等辺三角形ですので BC の中点を M とすると三角形 OMC は M を直角とする三角形となります。すなわち $\mathrm{AO}^2 = \mathrm{MO}^2 + \mathrm{AM}^2, \mathrm{OC}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{CM}^2$ がわかります。$\mathrm{OC} = R$ であり $\mathrm{CM} = \dfrac{\mathrm{BC}}{2} = \dfrac{5}{2}, \mathrm{AM} = 4 + \dfrac{\mathrm{BC}}{2} = \dfrac{13}{2}$ ですので
$\mathrm{AO}^2 - R^2 = \mathrm{AM}^2 - \mathrm{CM}^2 = \dfrac{13^2 - 5^2}{4} = \underline{36}$ がわかります。

[**2**]

(1)　サ　まずは進学率からみてみましょう。すると 35%〜40%の範囲は度数 1 となっています。この情報から選択肢を検証すると、進学率が 35%〜40%の範囲に 2 点ある 1 と 2 が除外されます。
65%〜70%の範囲で検証することもできます。
次は就職率をみてみましょう。このデータは 47 個ありますので、中央値は 24 番目の値になります。または小さい側から 12 番目である第 1 四分位をみるのもよいでしょう。
すると選択肢 0 は第 1 四分位が 20%以上であり、中央値が 25%に近いですので、これは不適とわかります。
残りは第 1 四分位が 17.5%程度であり中央値が 22.5%程度なので適するといえます。ということで3の散布図が正しいといえます。

(2)　シ　それぞれ検証しましょう。

0 1998 年度や 2003 年度をよく見ると、左側が長くなっています。ということで誤りといえます。

1 下側の箱ひげ図を見ると、どれも左側が長く見えます。ということで正しいといえます。

2 2008 年度の就職率の四分位範囲は 12%程度、2003 年度のそれは 9%程度ですので、2008 年度は直前の時点より範囲が大きくなっています。ということで誤りといえます。

3 1978 年度の四分位範囲は進学率が 12%程度、就職率が 8%程度であり、進学率の四分位範囲が大きいです。ということで誤りといえます。

4 1973 年度の就職率をみると、最大値が 66%程度、最小値が 34%程度です。ということで最大値が最小値の 2 倍 (おおよそ 68%) より小さいです。ということで誤りといえます。

したがって正しい記述は選択肢 1となります。

(3)　ス　就職率 34.8%であるデータを探しましょう。すると散布図から下から 24 番目の値であることがわかります。
最大値が 50%以下、最小値が 17%以上あるので範囲は 33%以下となり、当然四分位範囲は 34.8%もないこともわかります。
したがって当てはまるものは $_1$中央値といえます。

セ　今度は進学率の中央値ですので、左から 24 番目の値をみてみましょう。
すると 35%よりやや少ない値であることがわかります。
したがって当てはまるものは $_3$34.5%といえます。

(4) ソ 黒い点を含めた散布図は、確かに負の相関関係が見えるようです。
ですが黒い点を除くと負の相関関係はまだあるようですが弱まって見えます。
ということであてはまるものは $_2\underline{-0.41 < r < 0}$ といえます。
(言い切りたいがこんなの 60 分で計算できそうにない…)

(5)

タ, チ X と Y 相関係数は X の標準偏差を σ_X、Y の標準偏差を σ_Y、X と Y の共分散を $V_{X,Y}$ とおくと $\dfrac{V_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$ と表せます。
したがってわかっている値を代入すると $-0.41 = \dfrac{-20}{\sigma_X \cdot 7.6}$ となりますので
$\sigma_X = \dfrac{20}{0.41 \cdot 7.6} = \dfrac{20}{3.114} = 6.4 + 0.1 \cdot \dfrac{0.704}{3.114} < 6.45$ となり、四捨五入して $\underline{6.4}$ が得られます。

ツ 問題文に与えられている式に代入することで求めることができます。
$\dfrac{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}{n}$ が X^2 の平均であり分散が標準偏差の 2 乗ですから近似値を入れるとすなわち
$6.4^2 = 1223 - (\bar{u})^2$ となります。
すなわち X の平均値の 2 乗は $1223 - 6.4^2 = 1182.04$ 程度となり、したがってあてはまる値は $_2\underline{1182}$ といえます。

第３問

(1)

ア, イ　1 回目は 10 個のうち 6 個ある赤玉を取り出せるかどうかですから赤玉を取り出す確率は $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ です。
1 回目に赤玉を取り出した場合、2 回目は赤玉が 5 個、合計 9 個ですので赤玉を取り出す確率は $\dfrac{5}{9}$ です。
したがって 1 回目と 2 回目ともに赤玉を取り出す確率は $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{9}=\underline{\dfrac{1}{3}}$ となります。

(2)

ウエオ　10 個すべての玉の取り出し方は 10 個のうち 4 個が白玉となる並べ方の総数ですので ${}_{10}\mathrm{C}_4=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\underline{210}$ 通りとなります。

カキ　8 回目までに白玉をすべて取り出す場合はならべたうち 8 番目までに 4 個の白玉が並ぶ場合です。
その数は ${}_{8}\mathrm{C}_4=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\underline{70}$ 通りとなります。

ク, ケ　すべての玉を区別して並べた場合、色の配置を固定したときの並べ方 (10 個の取り出し方) はどの場合でも 6 個の赤玉を赤の位置に並べ、4 個の白玉を白の位置に並べることを考えることで $6!\cdot 4!$ 通りとなりますのですなわち区別しない場合それぞれの並べ方は同様に確からしいといえます。
p_9 の値は 9 番目の 10 番目が赤玉となる場合の確率ですので 8 回目までで白玉をすべて取り出す確率に等しいです。
したがって $p_9=\dfrac{70}{210}=\underline{\dfrac{1}{3}}$ がわかります。

コ, サ　3 回目と 4 回目が赤玉となる場合は、取り出した順に 1 列に並べたとき 3 番目と 4 番目を除く 8 箇所に白玉が 4 つ出る場合に等しく、この場合の数は 9 回目と 10 回目が赤玉となる場合と同じ計算式になります。したがってその数は 70 通りとなり、$p_3=p_9=\underline{\dfrac{1}{3}}$ となります。

(3)

シ〜ソ　余事象である「4 回目の取り出し時点で赤玉は 1 個以下」となる場合を、(2) と同じ方法で考えます。
赤玉が 0 個である場合はすなわち 4 個の白玉が最初の 4 回ですべて取り出される場合ですのですなわち 1 通りです。
赤玉が 1 個である場合はその 1 個が取り出される時点と 5 回目以降に残った白玉が取り出される場合を考えることになりますので

すなわち $4 \cdot 6 = 24$ 通りです。
したがってこれらの確率は $\dfrac{1+24}{210} = \dfrac{25}{210} = \dfrac{5}{42}$ となり、すなわち求める確率は $1 - \dfrac{5}{42} = \underline{\dfrac{37}{42}}$ となります。

タ〜テ 1 回目と 2 回目に赤玉を取り出していれば 4 回目までに 2 個以上の赤玉を取り出すことが確定します。
すなわち「4 回目の取り出し終了時点で赤玉が 2 個以上で、かつ 1 回目と 2 回目が赤玉」である確率は $p_1 = \dfrac{1}{3}$ となります。
したがって求める確率は $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{37}{42}} = \underline{\dfrac{14}{37}}$ となります。

(4)

ト〜ネ 9 回目と 10 回目で連続して赤玉が取り出され、さらに 4 回目の取り出し時点で赤玉が 1 個以下となる場合を考えましょう。
4 回目までで赤玉が 0 個である場合は (3) と同じく 1 通りとなります。
4 回目までで赤玉が 1 個である場合は 5 回目以降にでる白玉が 5〜8 回目に制限されますのですなわち $4 \cdot 4 = 16$ 通りです。
したがって 9 回目と 10 回目で連続して赤玉が取り出され、さらに 4 回目の取り出し時点で赤玉が 2 個以上となる場合は $70-1-16 = 53$ 通りとなります。
したがって求める確率は $\dfrac{\frac{53}{210}}{\frac{37}{42}} = \underline{\dfrac{53}{185}}$ となります。

(5)

ノ〜ヒ 印のついた赤玉の個数別に計算します。
印のついた赤玉が 2 個だけである場合、印のついた白玉が 1 個できますからこのように印がつく確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot 4}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = 15 \cdot 4 \cdot \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \dfrac{1}{2}$ です。
またこのとき、10 個の玉の並べ方は $10 \cdot {}_9\mathrm{C}_2 \cdot {}_7\mathrm{C}_3$ 通りあり、9 回目と 10 回目に印のついた赤玉を取り出す場合は、8 回目までに印のついた白玉 1 個とそうでない白玉 3 個がくる場合ですので $8 \cdot {}_7\mathrm{C}_3$ 通りとなります。すなわち確率は $\dfrac{8 \cdot {}_7\mathrm{C}_3}{10 \cdot {}_9\mathrm{C}_2 \cdot {}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{45}$ となります。
また、印のついた赤玉が 3 個となる場合、このように印がつく確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \dfrac{1}{6}$ です。
このときの並べ方は ${}_{10}\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_3$ 通りであり、9 回目と 10 回目に印のついた赤玉を取り出す場合は 8 回目までに印のついた赤玉 1 個と印のついていない赤玉 3 個がくる場合ですので $8 \cdot {}_7\mathrm{C}_3$ 通りとなります。すなわち確率は $\dfrac{8 \cdot {}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{15}$ となります。

したがって確率は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{45}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{15}=\dfrac{2}{90}=\underline{\dfrac{1}{45}}$ となります。

ここからは余談ですが、「9 番目と 10 番目に印のついた玉が出る」「9 番目と 10 番目がどちらも赤玉」それぞれの確率を計算し、その積を計算してみます。
問の流れと同様に「9 番目と 10 番目に印のついた玉が出る」確率を計算しましょう。取り出した玉を順番に並べます。その並び方のうち、すでに 3 個に印をつけていますので印のついた玉の位置は ${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ 通りが考えられます。
9 番目と 10 番目に印がついている並び方は 8 通りですので、その確率は $\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$ と計算できます。
9 番目と 10 番目が赤玉になる確率は $\dfrac{1}{3}$ でしたのでその積は
$\dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{45}$ となり、両方をみたす確率と等しくなりました。
つまり「9 番目と 10 番目に印のついた玉が出る」「9 番目と 10 番目がどちらも赤玉」はそれぞれの確率が独立であるといえます。

第4問

(1)

ア, イ $7x = 1 + 31y$ と変形すると x が最小のとき y も正で最小となりますので y を小さいものから検証しましょう。
$y = 1$ のときこの右辺は 32 となりますが $32 = 7 \cdot 4 + 4$ で不適です。
$y = 2$ のときは $1 + 31 \cdot 2 = 63 = 9 \cdot 7$ となりますので条件をみたします。
すなわち、$\underline{x = 9, y = 2}$が求めるものとなります。

ウ〜オ 解が 1 つわかり $7 \cdot 9 - 31 \cdot 2 = 1$ がわかりましたのでこれを①から引くと
$7 \cdot (x - 9) - 31 \cdot (y - 2) = 0$ すなわち $7 \cdot (x - 9) = 31 \cdot (y - 2)$ がわかります。
7 と 31 は互いに素ですのですなわち整数 k を用いてこの値は $7 \cdot 31 \cdot k$ となることがわかります。
ここから整数解を求めると$\underline{x = 31k + 9, y = 7k + 2}$がわかります。

(2)

カ, キ mod 7 で考えると
$0^2 = 0 \equiv 0, 1^2 = 1 \equiv 1, 2^2 = 4 \equiv 4, 3^2 = 9 \equiv 2, 4^2 = 16 \equiv 2, 5^2 = 25 \equiv 4, 6^2 = 36 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$ がわかります。
したがって n^2 を 7 で割るとあまりが 2 になる場合は n が 7 を法として 3,4 と合同、すなわち 7 で割ったあまりが$\underline{3,4}$のいずれかのときとわかります。

(3)

ク〜タ 整数解の y は 7 で割ってあまりが 2 であるものすべてが該当しますので、整数 n について n^2 を 7 で割ったあまりが 2 であるなら①の整数解 y としてありうるものになります。
(2) よりそうなる場合は n で割ったあまりが 3,4 の場合ですから小さい順にあてはめていきます。
すると小さいほうから 4 つは $n = 3, 4, 10, 11$ の場合となりますのですなわち$\underline{9,16,100,121}$となります。

(4)

チ〜ト $\sqrt{31(7x-1)}$ が整数であるとき、その値を N とすると
$N^2 = 31(7x - 1)$ となります。
両辺は 31 で割り切れ、さらに 31 は素数ですので N は 31 の倍数

とわかります。

したがって $M=\dfrac{N}{31}$ とすると M も整数であり、$31M^2=7x-1$ がわかります。

これを変形すると $7x-31M^2=1$ となり、すなわち (x,M^2) は① の整数解となります。

(1) から M^2 は 7 で割って 2 余る数とわかっていますから (2) から M は 7 で割ると余りが 3,4 のいずれかになります。

いま $x\geq 1000$ としていますので $31M^2\geq 6999$ をみたす最小のものを探します。

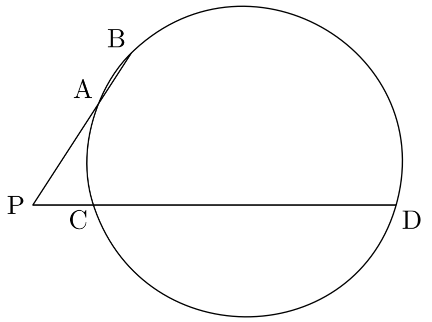
すると $M^2\geq\dfrac{6999}{31}=225+\dfrac{24}{31}$ となります。

したがって $11^2<225<17^2$ から $M=17$ がわかります。

ここから x を計算すると $\dfrac{31\cdot 17^2+1}{7}=\dfrac{8960}{7}=\underline{1280}$ となります。

ナニヌ　$M=17$ のときの値ですので $N=31\cdot 17=\underline{527}$ がわかります。

第５問



ア

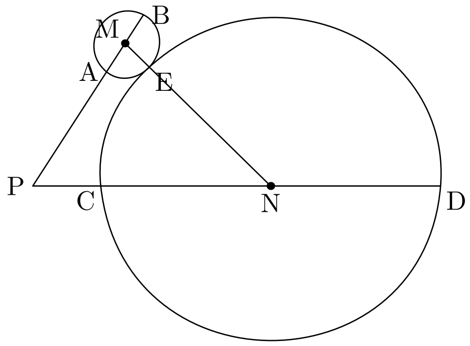
点 A は辺 PB 上にありますので PB=PA+AB です。これを利用して方べきの定理を適用すると

$\mathrm{PA}\cdot(\mathrm{PA}+\mathrm{AB})=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$ がわかります。

わかっている値を代入すると $\mathrm{PA}\cdot(\mathrm{PA}+2)=2\cdot 12$ となり、整理すると

$\mathrm{PA}^2+2\mathrm{PA}-24=(\mathrm{PA}+6)(\mathrm{PA}-4)=0$ となります。

したがって $\mathrm{PA}>0$ より$\underline{\mathrm{PA}=4}$がわかります。



イ

M が辺 AB の中点ですので AB を直径とする円の中心は M です。また同様に CD を直径とする円の中心は N です。

したがって $\mathrm{ME}=\mathrm{MA}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=1$ であり、

$\mathrm{NE}=\mathrm{NC}=\dfrac{\mathrm{CD}}{2}=\dfrac{\mathrm{PD}-\mathrm{PC}}{2}=5$ です。

さらに M,E,N はこの順に一直線上に並びますから

$\mathrm{MN}=\mathrm{ME}+\mathrm{NE}=5+1=\underline{6}$ となります。

ウ, エ　$\mathrm{PM}=\mathrm{PA}+\mathrm{AM}=4+1=5, \mathrm{PN}=\mathrm{PC}+\mathrm{CN}=2+5=7$ です。

三角形 MPN に余弦定理を適用すると

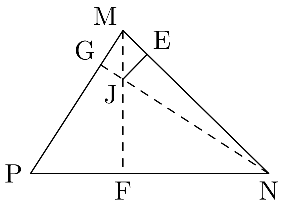
$\cos\angle\mathrm{PMN}=\dfrac{\mathrm{PM}^2+\mathrm{MN}^2-\mathrm{PN}^2}{2\cdot\mathrm{PM}\cdot\mathrm{MN}}=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\dfrac{1}{5}$ となります。

したがって三角形 MPE に余弦定理を適用することで

$$\begin{aligned}\mathrm{PE}^2 &= \mathrm{ME}^2+\mathrm{MP}^2-2\mathrm{MP}\cdot\mathrm{ME}\cdot\cos\angle\mathrm{PMN}\\ &= 1^2+5^2-2\cdot 1\cdot 5\cdot\frac{1}{5}=24\end{aligned}$$

となりますので、$\mathrm{PE} = \sqrt{24} = \underline{2\sqrt{6}}$ がわかります。

オ〜ク　同様に余弦定理を適用すると
$\cos\angle\mathrm{MPN} = \dfrac{\mathrm{PM}^2 + \mathrm{PN}^2 - \mathrm{MN}^2}{2\cdot\mathrm{PM}\cdot\mathrm{MN}} = \dfrac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2\cdot 5\cdot 7} = \dfrac{38}{70} = \underline{\dfrac{19}{35}}$ がわかります。



ケ〜サ
三角形 PMF が F を直角とする三角形となりますので
$\mathrm{PF} = \mathrm{PM}\cdot\cos\angle\mathrm{MPN}$ です。
計算すると $\mathrm{PF} = 5\cdot\dfrac{19}{35} = \underline{\dfrac{19}{7}}$ がわかります。

シ〜セ　同様の考えで $\mathrm{PG} = \mathrm{PN}\cdot\cos\angle\mathrm{MPN}$ が成り立ちますので計算すると
$\mathrm{PG} = 7\cdot\dfrac{19}{35} = \underline{\dfrac{19}{5}}$ がわかります。

ソ〜ツ　J は三角形 PMN の垂心となりました。
さらに $\mathrm{PE}^2 + \mathrm{ME}^2 = 24 + 1 = 25 = \mathrm{PM}^2$ ですのすなわち三角形 PEM は E が直角である三角形とわかります。
これより直線 PE は辺 MN と垂直に交わることがわかり、すなわち J を通ることがわかります。
したがって三角形 PME と直線 NG にメネラウスの定理を適用でき、
$\dfrac{\mathrm{PJ}}{\mathrm{JE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EN}}{\mathrm{MN}}\cdot\dfrac{\mathrm{MG}}{\mathrm{GP}} = 1$ が成り立ちます。
値を代入すると $\dfrac{\mathrm{PJ}}{\mathrm{JE}}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{5-\frac{19}{5}}{\frac{19}{5}} = 1$ となり、計算すると $\dfrac{\mathrm{PJ}}{\mathrm{JE}} = \dfrac{19}{5}$ となります。
したがって $\mathrm{PE} : \mathrm{JE} = (19+5) : 5 = 24 : 5$ となりますので $\mathrm{JE} = \dfrac{5}{24}\cdot\mathrm{PE} = \dfrac{5\cdot 2\sqrt{6}}{24} = \underline{\dfrac{5\sqrt{6}}{12}}$ がわかります。

所感

細かい計算を求められたり解法を見出しにくいものが多く、全体的に難しいといえます。最後ということで全力を出したのでしょうか。

第 1 問

[1]

式変形の問題です。慣れないとき進め方をすることが求められます。

[2]

式と命題に関する問題です。記述するとなるとなかなか面倒な論証が求められますが数直線を持ち出せばそこまで難しくはないと思います。

[3]

二次関数に関する問題です。比較的素直な問題がそろっているのでつまづきたくないです。

第 2 問

[1]

三角比の問題です。最初の検証から面倒であり、最後にも方針を立てにくい大物が待ち構えている難問です。

[2]

データの分析の問題です。各種グラフの読み取りは細かい違いでしかわからないため、確証がとれないものが多いです。
また値の計算も多いため、配点に反して時間を取られたことでしょう。

第 3 問

場合の数と確率を利用した問題です。途中から見方を変えて確率を計算するよう誘導していますが、却って混乱を誘います。記述だとそれぞれの並び方が同様に確からしいことを明記する必要があり、それゆえかなり説明を要してしまう流れとなります。

第４問

整数の性質に関する問題です。計算量が少し多いですが他の２問よりは取り掛かりやすいでしょう。最後の計算間違いは怖いですが。

第５問

平面幾何に関する問題です。長さを求める計算が一筋縄でいかないものが複数あり、苦戦は必至です。