解答

第１問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウエ	-,8,16	2
オカキ	-20	2
ク	3	1
ケコ	16	1
サシ	14	3
ス	3	2
セ	2	1
ソ	6	3
タ, チ	3,2	2
ツ, テ	3,3	2
ト	3	1
ナ, ニ	2,3	2
ヌ	3	1
ネ, ノ	2,3	2
ハ	0	1
ヒ	3	1
フ	7	1
ヘ	6	1
ホ	3	1

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	3	2
イ, ウ	3,1	2
エオ	10	3
カ	3	2
キ	2	3
ク, ケ	a,1	3
コサ, シ	-2,3	2
スセソ, タチ	-41,27	2
ツ	2	2
テトナ	-11	2
ニ	3	4
ヌネ	-3	3

第３問		
解答欄	正解	配点
ア	1	1
イ	3	1
ウ	2	1
エ	3	1
オ	4	1
カ	7	1
キ	2	2
ク, ケ, コ	2,2,2	2
サ	1	1
シ	3	1
ス, セ	3,9	1
ソ, タ	6,3	1
チ	0	1
ツ	4	1
テ	8	1
ト	9	1
ナ	5	1
ニ	1	1

第４問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	2,2	2
ウエ, オ	-2,1	3
カ, キ, ク	1,5,4	3
ケ, コ, サ	1,5,2	1
シ, ス, セ	1,5,2	1
ソタ, チ, ツ	-1,5,2	1
テ, ト, ナ	1,5,2	2
ニ	1	2
ヌ, ネ, ノハ	5,5,10	3

第５問		
解答欄	正解	配点
アイ	12	2
ウエ	60	2
オカ	55	2
キク	10	2
ケコ	90	2
サ. シ	9.0	2
スセ	05	2
ソ	5	2
タチツ	384	2
テ	1	2

解説

第 1 問

[1]

(1)

ア～エ　$t=2^x$ のとき $t^2=(2^x)^2=2^{2x}$、$2^{x+4}=2^x\cdot 2^4=16t$ ですので
$y=-t^2+16t-48=\underline{-(t-8)^2+16}$ と変形できます。

オカキ　$x=1$ のとき $t=2$ ですので $y=-(2-8)^2+16=16-36=\underline{-20}$ となります。

ク　$x\geq 1$ のとき $t\geq 2$ です。y の式から $t=8$ のときに最大値をとることがわかります。
$t=8$ のとき $8=2^3$ であることから$\underline{x=3}$とわかります。

ケコ　最大をとるときは $t=8$ のときですので、このとき $y=16-0^2=\underline{16}$ となります。

(2)

サシ　$-(t-8)^2+16\geq -20$ となる t の範囲を考えましょう。
整理すると $t^2-16t+28=(t-2)(t-14)\leq 0$ となりますのです
なわち $2\leq t\leq 14$ です。
したがってこの範囲は x に直すと $1\leq x\leq \log_2 14$ となります。
すなわち $1\leq x\leq k$ がこの範囲に含まれれば y の値は -20 以上となります。
さらに $x=1$ のとき $y=-20$ となりますので $1\leq x\leq k$ が $1\leq x\leq \log_2 14$ に含まれれば最小値は-20 となります。
したがって k の範囲は $1<k\leq \underline{\log_2 14}$ となります。

ス　$2^3=8, 2^4=16$ ですので $3<\log_2 14<4$ です。したがって範囲に含まれる最大の整数は$\underline{3}$です。

(3)　セ　まずは $y=0$ をみたす t を求めましょう。すると $-(t-8)^2+16=0$ より $(t-8)^2=16$ がわかります。
すなわち $t-8=\pm 4$ ですので $t=4,12$ がわかります。
x が増加すると t も増加するので小さいほうの x は小さいほうの t に対応する値、すなわち $2^x=4$ をみたす値となります。
$4=2^2$ ですのでその値は$\underline{2}$となります。

ソ　大きいほうの値は $2^x=12$ をみたす値、すなわち $x=\log_2 12$ です。底の変換公式を利用して計算すると
$x=\log_2(2^2\cdot 3)=2+\log_2 3=2+\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}=2+\dfrac{0.4771}{0.3010}$ となりま

す。
$1.5 < \dfrac{0.4771}{0.3010} < 1.6$ が成り立ちますので、[6]$\underline{3.5 < x < 3.6}$をみたすことがわかります。

[**2**]

(1)

タ〜テ 加法定理を利用すると

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 3x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x$$

がわかります。したがって

$$f(x)=-\frac{3}{2}\sin 3x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)\cos 3x=\underline{-\frac{3}{2}\sin 3x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos 3x}$$

となります。

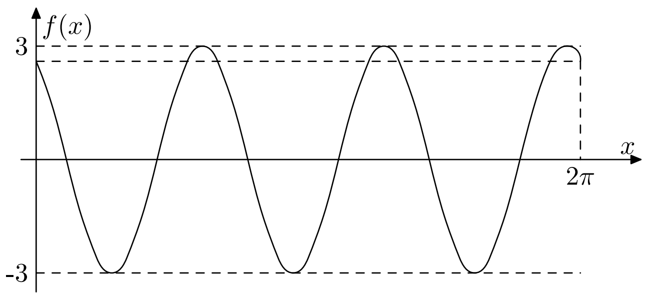
ト〜ニ 合成公式を利用します。$\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=9$ ですので

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right) \\ &= 3\cdot\left(\sin 3x\cos\frac{2\pi}{3}+\cos 3x\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\underline{3\sin\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

となります。

ヌ $\sin\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)$ は-1 以上 1 以下ですので 1 が最大です。すなわち $f(x)$ の最大値は$\underline{3}$となります。

ネ, ノ θ の関数 $\sin(\theta+\alpha)$ の正の周期で最小のものは 2π です。
すなわち $3x=2\pi$ をみたす x が最小の正の周期となりますので、
その値は$\underline{\frac{2}{3}}\pi$です。



(2)

ハ　$|t|>3$ のときに $f(x)=t$ となるとすると $\left|\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)\right|>1$ をみたすことになりますが x が実数であればそれをみたすことはありません。したがって$\underline{N=0}$がわかります。

ヒ　$f(x)=3$ となるとき、$\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=1$ となります。いま考えている x の範囲から $\dfrac{2}{3}\pi\leq 3x+\dfrac{2}{3}\pi\leq\dfrac{20}{3}\pi$ となりますので $3x+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{2}\pi,\dfrac{9}{2}\pi,\dfrac{13}{2}\pi$ が考えられます。それぞれから x が 1 つずつ出ますので$\underline{N=3}$がわかります。

フ　$f(0)=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ですので、$\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる x を数えます。
すると $3x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{7}{3}\pi,\dfrac{8}{3}\pi,\dfrac{13}{3}\pi,\dfrac{14}{3}\pi,\dfrac{19}{3}\pi,\dfrac{20}{3}\pi$ が考えられますので、$\underline{N=7}$がわかります。

ヘ　$|t|<3$ であるとき、$\sin\left(3\alpha+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{t}{3}$ をみたすならば
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(3\alpha+\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)=\dfrac{t}{3}$ も成立します。
$\dfrac{\pi}{2}-\left(3\alpha+\dfrac{2}{3}\pi\right)=-3\alpha-\dfrac{\pi}{6}=3\left(-\alpha-\dfrac{5}{18}\pi\right)+\dfrac{2}{3}\pi$ が成り立ちますのですなわち $f(x)=t=f(\alpha)$ となる x は k を整数として
$\alpha+\dfrac{2k}{3}\pi$ から 3 つ、$\dfrac{2k}{3}\pi-\alpha-\dfrac{5}{18}\pi$ から 3 つとることになります。
($t\neq f(0)$ なのでこれらが $0,2\pi$ になることはない)
したがって$\underline{N=6}$となります。

ホ　$f(x)=-3$ となるとき $\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=1$ となります。x の範囲から
$3x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{3}{2}\pi,\dfrac{7}{2}\pi,\dfrac{11}{2}\pi$ が考えられます。
したがって$\underline{N=3}$がわかります。

第２問

(1) ア $f'(x)=3x^2$ ですので $f'(-1)=3\cdot(-1)^2=\underline{3}$ がわかります。

イ, ウ l は $\mathrm{A}(-1,-2)$ で接しますので傾きは $f'(-1)=3$ です。すなわち $y=3(x+1)-2$ を整理して $\underline{l: y=3x+1}$ がわかります。

エオ l の式を $3x-y+1=0$ と変形しましょう。すると O と l との距離は
$\dfrac{|3\cdot 0-1\cdot 0+1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{10}}$ とわかります。

(2) カ C_2 の A における接線が l であることから $g(x)$ の $x=-1$ における微分係数は l の傾きに一致します。すなわち $\underline{g'(-1)=3}$ です。

キ $g'(x)=3x^2+2ax+b$ ですので $g'(-1)=3$ より $3-2a+b=3$ です。したがって $\underline{b=2a}$ がわかります。

ク, ケ C_2 は A を通りますので $g(-1)=-2$ です。$b=2a$ も代入すると $g(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+c=c-a-1$ となりますので $c-a-1=-2$ がわかります。
したがって $\underline{c=a-1}$ がわかります。

(3)

コ〜シ $a=-2$ のとき $b=-4$ となりますので $g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$ となります。
すなわち $g'(x)=0$ となる x は $2,-\dfrac{2}{3}$ です。
このうち極大となる場合は x の前後で $g'(x)$ が正から負に変わるものですので $\underline{x=-\dfrac{2}{3}}$ の場合です。

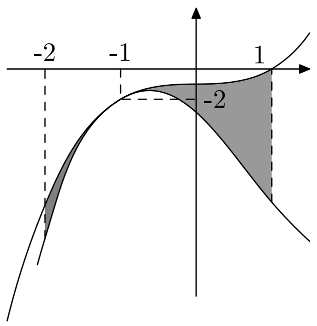
ス〜チ 極大値は $x=-\dfrac{2}{3}$ のときの値です。いま $a=-2$ ですので $c=-3$ となり、すなわち $g(x)=x^3-2x^2-4x-3$ となります。したがって極大値は

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{2}{3}\right) &= \left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-3 \\ &= -\frac{8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}-3=\underline{-\frac{41}{27}} \end{aligned}$$

となります。

ツ 極小となる場合は x の前後で $g'(x)$ が負から正に変わるものですので $g'(x)$ の式から $\underline{x=2}$ となる場合とわかります。

テトナ 極小値は $g(2)=2^3-2\cdot 2^2-4\cdot 2-3=\underline{-11}$ となります。

(4) 

ニ C_1 と C_2 の位置関係をみるために $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係を考えます。

$f(x)-g(x)=(x^3-1)-(x^3+ax^2+2ax+a-1)=-ax^2-2ax-a=-a(x+1)^2$ となります。

いま $a<0$ で考えていますので $-a>0$ となり、すなわち

$f(x)-g(x)\geq 0$ がわかります。

したがって C_1 は x の値に関係なく C_2 の上側にくる (もしくは交わる) ことになります。

すなわち $|f(x)-g(x)|$ が x に関係なく $f(x)-g(x)$ に等しいことがわかりましたので

$S=\underline{{}_3\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx}$ がわかります。

ヌネ 実際に計算すると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-2}^{1}\{-a(x^2+2x+1)\}dx \\ &= -a\int_{-2}^{1}(x^2+2x+1)dx=-a\cdot\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-2}^{1} \\ &= -a\cdot\left\{\frac{1}{3}+1+1-\left(-\frac{8}{3}+4-2\right)\right\}=\underline{-3a} \end{aligned}$$

となります。

第３問

(1)

ア $a_4 = a_{2\cdot 2} = a_2 = \underline{1}$ と計算できます。

イ $a_5 = a_{2\cdot 2+1} = a_2 + a_3 = 1 + 2 = \underline{3}$ となります。

ウ $a_6 = a_{3\cdot 2} = a_3 = \underline{2}$ となります。

エ $a_7 = a_{3\cdot 2+1} = a_3 + a_4 = 2 + 1 = \underline{3}$ となります。

オ $a_{18} = a_9 = a_4 + a_5 = 1 + 3 = \underline{4}$ と計算できます。

カ $a_{38} = a_{19} = a_9 + a_{10} = a_9 + a_5 = 4 + 3 = \underline{7}$ と計算できます。

(2) キ ①から $a_n = a_{2n} = a_{2^2 n} = \cdots = a_{2^k \cdot n} = \cdots$ が成り立ちますので、$\{a_n\}$ の第 $3 \cdot 2^k$ 項は第 3 項の値に等しい$\underline{2}$となります。

(3)

ク〜コ 第 j 項が 2^j で表される数列は初項 2、公比 2 の等比数列ですので

$$\sum_{j=1}^{k-1} 2^j \quad = \quad 2 \cdot \frac{2^{k-1} - 1}{2 - 1} = 2 \cdot (2^{k-1} - 1) = \underline{2^k - 2}$$

となります。（ケ：${}_2\underline{k}$）

サ 第 j 群に 2^j 個の項がありますので第 1 群から第 $(k-1)$ 群までの項の数は上で計算した $2^k - 2$ 項となります。
群に分けた数列からは a_1 と a_2 が省かれていますので次の項は $\{a_n\}$ の第 $\{(2^k - 2) + 2 + 1\}$ 項となります。
すなわち第 k 群の最初の項は $\{a_n\}$ の第 $(2^k + \underline{1})$ 項となります。

シ 第 k 群までの項の数は $2^k - 2 + 2^k = 2^{k+1} - 2$ です。a_1, a_2 も考えることで第 k 群最後の項は $\{a_n\}$ の第 2^{k+1} 項、すなわち指数は ${}_3\underline{k+1}$があてはまることになります。

ス, セ 式が出ているので値を入れて代入しましょう。
$S_1 = a_3 + a_4 = 2 + 1 = \underline{3}$,
$S_2 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 3 + 2 + 3 + a_4 = 3 + 2 + 3 + 1 = \underline{9}$
がわかります。

ソ 計算すると $T_2 = a_5 + a_7 = 3 + 3 = \underline{6}$ がわかります。

タ $a_8 = 1$ がわかりましたので $U_2 = a_6 + a_8 = 2 + 1 = \underline{3}$ がわかります。

(4) チ 第 $(k+1)$ 群は $\{a_n\}$ の第 $2^{k+1} + 1$ 項から第 2^{k+2} 項までの 2^{k+1} 項あります。

偶数番目の項は第 $2^{k+1}+2$ 項から第 $2^{k+1}+2\cdot 2^k$ 項まであります。したがって

$$U_{k+1} = \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^{k+1}+2j} = \sum_{j=1}^{2^k} a_{2(2^k+j)} = \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+j}$$

と変形できます。ここで出てきた値はすなわち第 k 群に属する項すべての和ですので ${}_{0}\underline{S_k}$ に等しいことがわかります。

ツ 同様にすると

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^{k+1}+2j-1} = \sum_{j=1}^{2^k} a_{2(2^k+j-1)+1} \\ &= \sum_{j=1}^{2^k} (a_{2^k+j-1} + a_{2^k+j}) \\ &= \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+j-1} + \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+j} = S_k + a_{2^k} - a_{2^{k+1}} + S_k \end{aligned}$$

となり、$a_{2^k} = a_{2\cdot 2^k} = a_{2^{k+1}}$ ですので $T_{k+1} = {}_{4}\underline{2S_k}$ がわかります。

テ $T_{k+1} = 2S_k, U_{k+1} = S_k$ がわかりましたので
$S_{k+1} = T_{k+1} + U_{k+1} = 2S_k + S_k = {}_{8}\underline{3S_k}$ がわかります。

ト 数列 $\{S_n\}$ は初項 $S_1 = 3$, 公比 3 の等比数列とわかりましたので
$S_k = 3\cdot 3^{k-1} = {}_{9}\underline{3^k}$ だとわかります。

ナ $k \geq 2$ ならば $T_k = 2S_{k-1} = 2\cdot 3^{k-1}$ です。
$T_1 = a_3 = 2$ ですので $k = 1$ でも成立します。
したがって $T_k = {}_{5}\underline{2\cdot 3^{k-1}}$ です。

ニ $k \geq 2$ ならば $U_k = S_{k-1} = 3^{k-1}$ です。
$U_1 = a_4 = 1$ ですので $k = 1$ でも成立します。
したがって $U_k = {}_{1}\underline{3^{k-1}}$ です。

第４問

(1)

ア, イ　$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{q} - \vec{p}$ です。計算すると

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2 &= |\vec{q}-\vec{p}|^2 = (\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}-\vec{p}) = \vec{q}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{q}\cdot\vec{p}\\ &= |\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2-2(\vec{p}\cdot\vec{q}) = 1+1-2\cdot x = \underline{2-2x}\end{aligned}$$

となります。

(2)

ウ～オ　$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (\vec{p}+s\vec{q}) - \vec{q} = \vec{p} + (s-1)\vec{q}$ です。これを利用すると

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|^2 &= |\vec{p}+(s-1)\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2+(s-1)^2|\vec{q}^2|+2(s-1)(\vec{p}\cdot\vec{q})\\ &= 1+(s-1)^2+2(s-1)x = s^2+(2x-2)s+2-2x\end{aligned}$$

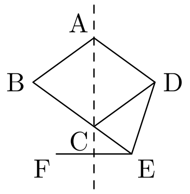
となります。
いま $\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| = 1$ ですのですなわち $s^2+2(x-2)s+(2-2x)=1$ が成り立ちます。
整理すると $s^2+2(x-2)s+(1-2x)=0$ となります。
これは因数分解できて $(s-1)(s+2x-1)=0$ とできます。
$s=1$ のときは $\vec{p}+\vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ですのでこれが点 C にきます。
したがって E が C と異なることから $\underline{s=-2x+1}$ がわかります。

(3)

カ～ク　$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = s\vec{q}$ であったので $\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = s|\vec{q}| = -2x+1$ です。
すなわち (1) より $2-2x = (-2x+1)^2$ が成り立ちます。
整理すると $4x^2-2x-1=0$ となります。
公式を使うと $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ となります。
いま $\angle\mathrm{BAD} > 90^\circ$ ですので $\vec{p}\cdot\vec{q} < 0$ が成り立ちます。
すなわち得られた解のうち負のものが求めるものですのでその値は $\underline{x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}$ となります。

ケ～サ　$s = -2x+1 = 1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ですので $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{p} + \underline{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}\vec{q}$ がわかります。

(4)



シ～セ 点 B と点 D が直線 AC に対して対称ということは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を直線 AC に対して対称移動させるとそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に一致することになります。
すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を表す式の $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を入れ替えた形として表されますので
$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \underline{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}\vec{p} + \vec{q}$ がわかります。

ソ～ツ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{EF}} &= \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p} + \vec{q}\right) - \left(\vec{p} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{p} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\vec{q} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}(\vec{p}-\vec{q}) \end{aligned}$$

とできます。$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{p} - \vec{q}$ ですので $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \underline{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ がわかります。

テ～ナ $\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = -2x+1 = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \underline{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ と計算できます。

ニ $\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right| = \left|\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{DB}}\right| = \left|\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right| \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
$= \dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2\cdot 2} = \dfrac{4}{4} = \underline{1}$ と計算できます。

(5)

ヌ～ハ $\overrightarrow{\mathrm{FM}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{1}{2}\vec{q} - \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p} + \vec{q}\right)$
$= -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p} - \dfrac{1}{2}\vec{q}$ ですので
$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FM}} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{p}\cdot\vec{q}) - \dfrac{1}{2}|\vec{q}|^2 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{2} = 0$
となり、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が垂直であることが確かめられます。
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = t\overrightarrow{\mathrm{AF}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくとき、これを $\vec{p}, \vec{q}$ で表すと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AR}} &= t\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p} + \vec{q}\right) + (1-t)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{q}\right) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)\vec{p} + \frac{1+t}{2}\vec{q} \end{aligned}$$

となります。一方 R が直線 AC 上の点であることから実数 u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = u\overrightarrow{\mathrm{AC}} = u(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = u\vec{p} + u\vec{q}$ と表すこともできます。
得られた 2 式の係数を比較することで
$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)t = \dfrac{1+t}{2} = u$ がわかります。
これより $t = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ がわかりますので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\vec{p} + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\vec{q} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(\vec{p}+\vec{q}) = \underline{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}(\vec{p}+\vec{q})\end{aligned}$$

がわかります。

第５問

(1) アイ　有権者は表の中のどれかにあてはまりますので全体で 100%です。
したがって今回投票かつ前回棄権の割合は
$100 - 45 - 10 - 29 - 3 - 1 = \underline{12}\%$ となります。

ウエ　今回投票は表の上段に該当する人の割合ですので%の値を小数に直して $0.45 + 0.12 + 0.03 = \underline{0.60}$ となります。

オカ　前回投票は表の左から (項目部分を除く)1 列目に該当する人の割合ですので同様に計算すると $0.45 + 0.10 = \underline{0.55}$ となります。

キク　今回棄権かつ前回投票の割合は 10%ですので X は二項分布 $B(900, \underline{0.10})$ に従うことになります。

ケコ　二項分布 $B(n, p)$ の平均は np で表されますので値は $900 \cdot 0.10 = \underline{90}$ となります。

サ, シ　二項分布 $B(n, p)$ の分散は $np(1-p)$ で表されますので値は $900 \cdot 0.10 \cdot (1 - 0.10) = 81$ です。
標準偏差は分散の正の平方根ですので $\sqrt{81} = \underline{9.0}$ となります。

スセ　X が 105 以上であるとき、標準化のため $Z = \dfrac{X - 90}{9}$ とすると
$Z \geq \dfrac{105 - 90}{9} = \dfrac{5}{3}$ となります。
すなわち $P(X \geq 105) = P\left(Z \geq \dfrac{5}{3}\right)$ です。
$1.66 < \dfrac{5}{3} < 1.67$ ですので
$P(Z \geq 1.66) > P\left(Z \geq \dfrac{5}{3}\right) > P(Z \geq 1.67)$ です。
いま Z は標準正規分布に従うと近似していますので両側の値を正規分布表から探しましょう。
$P(Z \geq 1.66) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.66) = 5 - 0.4515 = 0.0485$
$P(Z \geq 1.67) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.67) = 5 - 0.4525 = 0.0475$ ですので
$0.0475 < P\left(Z \geq \dfrac{5}{3}\right) < 0.0485$ となります。
この範囲ならばどのようなものでも小数第 3 位を四捨五入すると $\underline{0.05}$となります。

(2) ソ　正規分布表で $z_0 = 1.96$ のときの値を表から読み取ると 0.4750 となっています。
すなわち $C = p - 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{r(1-r)}{n}}, D = p + 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{r(1-r)}{n}}$ とすると信頼度は 0.9500 すなわち 95%となります。
このとき $L = 1.96 \cdot {}_5\underline{2\sqrt{\dfrac{r(1-r)}{n}}}$ となります。

タチツ　$L=0.1$ になるとき、$0.1=1.96\cdot 2\sqrt{\dfrac{0.5\cdot 0.5}{n}}$ となる n を求めることになります。
2 乗して根号を外すと $0.01=3.84\cdot 4\cdot \dfrac{0.25}{n}$ となりますので整理すると
$n=\dfrac{3.84\cdot 4\cdot 0.25}{0.01}=\underline{384}$ となります。

テ　いま n と信頼度を固定していますので信頼区間の幅は $\sqrt{r(1-r)}$ の値に比例します。
$r(1-r)=r-r^2=\dfrac{1}{4}-\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2$ となります。
また根号の中の値が大きいほど値が大きくなりますので、当てはまるものは
1 r の値によって変化して、$r=0.5$ のときに最大となるとなります。

所感

深い思考はそこまで問われない代わりに、計算や検証の複雑さが目立ちます。
選択問題はどれを選んでも大差はなさそうです。

第 1 問

[1]

指数対数関数を利用した問題です。
指数表記をわかりやすく置き換えていますので、そこまで難しくないと思います。
最後の範囲はここでは本文に出ている近似値から計算していますが、
$2^3 < 3^2, 3^5 < 2^8$ から $2^{1.5} < 3 < 2^{1.6}$ を導いて解くこともできます。

[2]

三角関数の問題です。(1) は指示通りに計算すればいけると思います。
(2) は範囲の評価により説明しようとすると少々面倒な気がしますが、単純な sin 関数ですのでグラフを持ち出すのが楽かもしれません。

第 2 問

微積分の問題です。変わったことは問われていないと思いますが値の計算は複雑なのでそこだけ注意しましょう。

第 3 問

数列の問題です。$\{a_n\}$ は一般項が単純な形式で表せないので、原点に立ち返らないと厳しいかもしれません。
ただそれができれば問題文に沿って進めることで高得点が期待できます。

第 4 問

ベクトルに関する問題です。終始平方根と付き合うので大変です。
実は多角形 ABFED が正五角形になるのでそこに着目すると気が楽になると思います。

第５問

　データの分析に関する問題です。
基本的なことを問われていますが信頼区間に対する問題は少々ひねっています。