解答

第 1 問

$A=\{x|ax^2+bx+c>0\}, B=\{x|bx^2+cx+a>0\}$,
$C=\{x|cx^2+ax+b>0\}, P=\{x|x>p\}$ とおく。
問の条件は「$A\cap B\cap C=P$」と表せる。

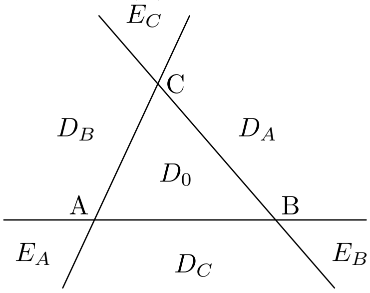
(1) $a<0$ であるとすると不等式 $ax^2+bx+c>0$ は $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2<\dfrac{b^2}{4a^2}-c$ と変形できる。
$\dfrac{b^2}{4a^2}-c\leq 0$ であれば A は空集合なので $A\cap B\cap C$ も空集合となる。P は空集合でないので不適。
$\dfrac{b^2}{4a^2}-c>0$ であればある実数 α,β により $A=\{x|\alpha<x<\beta\}$ と表されることになる。
このとき β,p の両方より大きい元 k を考えると $k\notin A, k\in P$ となるので特に $k\notin A\cap B\cap C, k\in P$ となるので不適。
したがって $a\geq 0$ がわかるので、b,c についても同様にして、$b\geq 0, c\geq 0$ がいえる。

(2) a,b,c いずれも 0 でないとすると、(1) より $a>0,b>0,c>0$ となる。
このとき不等式 $ax^2+bx+c>0$ は $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2>\dfrac{b^2}{4a^2}-c$ となるので A はすべての実数、もしくはある実数 γ,δ により $A\{x|x<\gamma\}\cup\{x|\delta<x\}$ と表される。
したがってどのように p を設定してもじゅうぶんに小さい実数 l をとると $l\in A\cap B\cap C$ と $l\notin P$ がいえる。
すなわち $A\cap B\cap C\neq P$ となるので不適とわかるので、a,b,c の中に 0 が存在することがいえる。

(3) (2) と不等式の循環性により $a=0$ で考えればよい。すると
$A=\{x|bx+c>0\}, B=\{x|bx^2+cx>0\}, C=\{x|cx^2+b>0\}$ となる。
$b=0$ であれば $A=\{x|c>0\}$ となりこれは P を含み特に空でないので $c>0$ であることがわかり、A は実数全体となる。よって $B=\{x|cx>0\}$ より $B=\{x|x>0\}$ となり $C=\{x|cx^2>0\}=\{x|x\neq 0\}$ となるので $A\cap B\cap C=\{x|x>0\}$ がわかる。
また $b\neq 0$ であれば (1) より $b>0, c\geq 0$ なので C は実数全体となり、$A=\{x|x>-\dfrac{c}{b}\}$ であり $bx^2+cx=x(bx+c)$ と $-\dfrac{c}{b}\leq 0$ より $B=\{x|x<-\dfrac{c}{b}\}\cup\{x|x>0\}$ がわかり、すなわち $A\cap B\cap C=\{x|x>0\}$ がわかる。
いずれの場合も $p=0$ であることがいえる。

第２問

　平面を $\triangle$ABC の辺を延長した直線により以下の領域に分割して考える。領域はすべて境界を含むものと考えてよい。



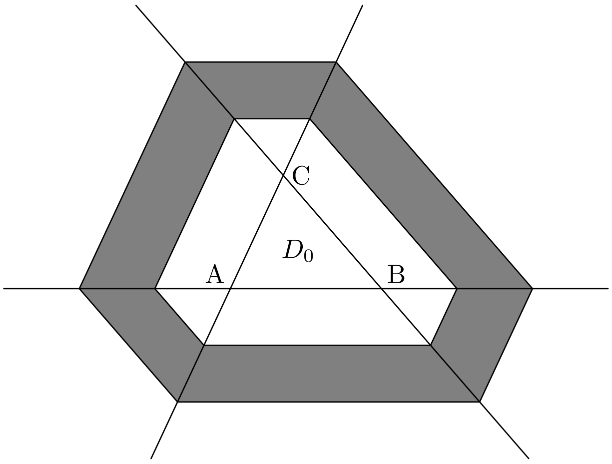
X が D_0 にいるときは $\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{ABC}=1$ なのでこの領域は考えなくてよい。

X が D_A にいるときは $\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}$ となるので $\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=1+2\cdot\triangle\mathrm{BCX}$ となり、条件は $\frac{1}{2}\leq\triangle\mathrm{BCX}\leq 1$ となる。したがって BC を底辺として考えて面積比から高さが $\triangle$ABC の高さの $\frac{1}{2}$ 倍以上 1 倍以下の位置に X がくることになる。

X が E_A にいるときは $\triangle\mathrm{BCX}=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}$ となるので $\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=2\cdot\triangle\mathrm{BCX}-1$ となり、条件は $\frac{3}{2}\leq\triangle\mathrm{BCX}\leq 2$ となる。同様に BC を底辺として考えると高さが $\triangle$ABC の高さの $\frac{3}{2}$ 倍以上 2 倍以下の位置に X がくることになる。

$D_\mathrm{B}, D_\mathrm{C}, E_\mathrm{B}.E_\mathrm{C}$ も同様に考えると、X は以下の領域を動くことがわかる。

ここで領域の境界は外側が各辺を 1:2 に外分する点を頂点とし、内側が各辺を 1:3 に外分する点を頂点とするものである。



したがって面積は D_A 内では $2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$、$E_\mathrm{A}$ 内では $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ なので $3\cdot\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\right)=\underline{\frac{30}{4}}$ とわかる。

第３問

(1) $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{3(1+t)\sqrt{1-t}}{(1+t)\sqrt{1+t}} = 3\cdot\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} = 3\cdot\sqrt{\dfrac{2}{1+t}-1}$ である。

$-1 < t \leq 1$ で $1+t>0$ であり増加するので $\dfrac{2}{1+t}$ は減少する。

したがって $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ が減少することがいえる。

(2) $f(t) = \sqrt{(1+t)^3+9(1+t)^2(1-t)} = (1+t)\sqrt{(1+t)+9(1-t)} = (1+t)\sqrt{10-8t}$ である。

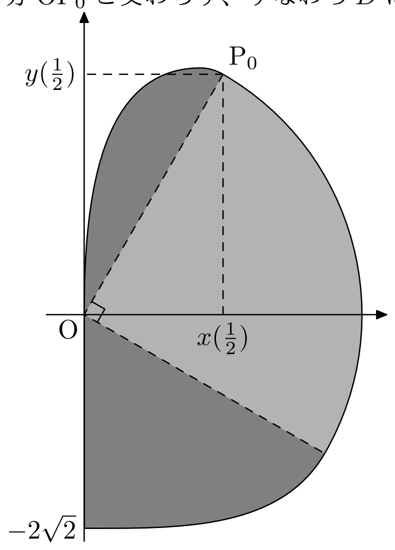
$f'(t) = \sqrt{10-8t} - \dfrac{8(1+t)}{2\sqrt{10-8t}} = \dfrac{6-12t}{\sqrt{10-8t}}$ であるので増減は以下のようになる。

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

また最大値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \underline{\dfrac{3\sqrt{6}}{2}}$ がわかる。

(3) (2) より D を時計回りに 90° 回転させると半径 $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ で中心角 90° のおうぎ形ができる。

また (1) から原点と P を結ぶ線分と x 軸とのなす角は t が大きくなると小さくなるので $t=\dfrac{1}{2}$ のときの P を P_0 とすると P が描く曲線は線分 OP_0 と交わらず、すなわち D は線分 OP_0 で 2 つに分割できる。



よって D が通過する領域は上図のように半径 $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ で中心角 90° のおうぎ形と、D を線分 OP_0 で分割したものに分割できるので、求める面積は D の面積とおうぎ型の面積を合計することで求められる。

$x(t)$ は $-1 \leq t \leq 1$ で単調増加なので $y=f(x)$ となる関数が存在する

ことになり、これを利用すると D の面積は

$$\begin{aligned}
\int_{x(-1)}^{x(1)} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} y(t)x'(t)dt = \int_{-1}^{1} 3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}dt \\
&= \frac{9}{2}\cdot\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}dt \\
&= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt+\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt \\
&= \frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt-\frac{9}{4}\int_{-1}^{1}(-2t)\sqrt{1-t^2}dt \\
&= \frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t+1}{2}dt-\frac{9}{4}\int_{-1}^{1}(-2t)\sqrt{1-t^2}dt \\
&= \frac{9}{2}\cdot\left[\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{9}{4}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}=\frac{9\pi}{4}
\end{aligned}$$

であることがわかる。

したがって求める面積は $\frac{9\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2=\underline{\frac{45}{8}\pi}$

第４問

(1) 正の整数 n に対して $b_n = 2^0 \cdot 2^n + 2^1 \cdot 2^n + \cdots + 2^{n-1} \cdot 2^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right) \cdot 2^n$ とおく。これは一方の指数が n で他方が n 未満の負でない整数であるものの総和なので

$a_{2,n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$ が成り立つ。

等比数列の和の公式を利用すると $b_n = 2^n \cdot \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{2n} - 2^n$ となるので

$$\begin{aligned} a_{n,2} &= \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (2^{2k} - 2^k) = \sum_{k=1}^{n-1} (4^k - 2^k) \\ &= \frac{4 \cdot (4^{n-1} - 1)}{4 - 1} - \frac{2 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = \underline{\frac{4^n}{3} - 2^n + \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

(2) $(1 + 2^0 x) \cdot (1 + 2^1 x) \cdot \cdots \cdot (1 + 2^{n-1} x)$ の展開を考える。

すると x^k の係数は $2^0, 2^1, \cdots, 2^{n-1}$ から k 個選んでできる積の総和となるのですなわち $a_{n,k}$ に等しくなる。

よって $f_n(x) = (1 + 2^0 x) \cdot (1 + 2^1 x) \cdot \cdots \cdot (1 + 2^{n-1} x)$ であることがわかり、

$f_{n+1}(x) = (1 + 2^0 x) \cdot (1 + 2^1 x) \cdot \cdots \cdot (1 + 2^n x)$,

$f_n(2x) = (1 + 2^1 x) \cdot (1 + 2^2 x) \cdot \cdots \cdot (1 + 2^n x)$ なので

$\underline{\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x, \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = 1 + x}$ がわかる。

(3) $f_{n+1}(x) = (1 + 2^n x) f_n(x)$ なので x^{k+1} の係数をそれぞれ計算すると

$a_{n+1,k+1} = a_{n,k+1} + 2^n a_{n,k}$ ①

$f_{n+1}(x) = (1 + x) f_n(2x)$ なので x^{k+1} の係数から

$a_{n+1,k+1} = 2^{k+1} a_{n,k+1} + 2^k a_{n,k}$ ②である。

①の 2^{k+1} 倍から②を引くと $(2^{k+1} - 1) a_{n+1,k+1} = (2^{n+k+1} - 2^k) a_{n,k}$

がわかるので $\underline{\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \dfrac{2^k (2^{n+1} - 1)}{2^{k+1} - 1}}$

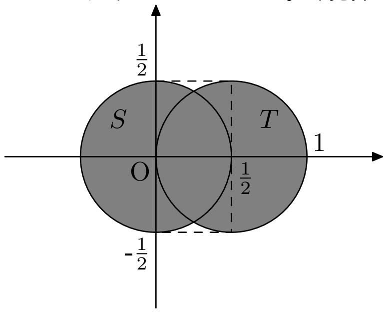
第５問

(1) P の座標を $(x, y, 0)$ とおき、S の頂点を B とおく。S は錐体なので P を底面で動かしたときに線分 PB が通過する領域ととらえることができる。

このとき線分 BP,AP と平面 $z = 1$ における交点は z 座標から考えて $1-0 : 2-1$ すなわち 1:1 に内分する点ととれるのでそれぞれ $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 1\right), \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, 1\right)$ となる。

それぞれを $(X_1, Y_1, 1), (X_2, Y_2, 1)$ とおくと $x = 2X_1 = 2X_2 - 1, y = 2Y_1 = 2Y_2$ が成り立つので x, y の関係式 $x^2 + y^2 \leq 1$ より

$X_1^2 + Y_1^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(X_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + Y_2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ となる。したがって切り口は以下のようになる。（境界を含む）



(2) P を平面 $z = t(0 \leq t \leq 2)$ 上で動かすことを考え、この条件で平面 $z = u(t \leq u \leq 2)$ との切り口を考える。

(1) と同様にして底面上の点 $(x, y, 0)$ と A を両端とする線分上での座標を考えると $\left(\frac{2-t}{2}x, \frac{2-t}{2}y, t\right)$ となることから $x = \frac{2}{2-t}X_1, y = \frac{2}{2-t}Y_1$ となるのですなわち $\mathrm{P}(X_1, Y_1, t)$ がみたす関係式は $X_1^2 + Y_1^2 \leq \left(\frac{2-t}{2}\right)^2$ となる。

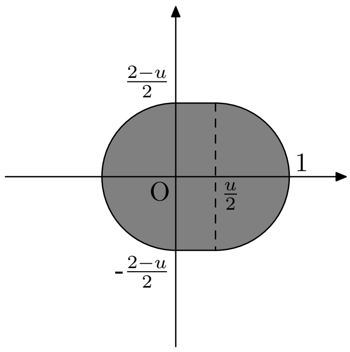
このとき線分 AP と平面 $z = u$ の交点は線分 AP を $u - t : 2 - u$ に内分する点であるのですなわち

$\left(\frac{(2-u)X_1 + (u-t)}{2-t}, \frac{(2-u)Y_1}{2-t}, u\right)$ と表せる。この座標を (X_2, Y_2, u) とおくと $X_1 = \frac{(2-t)X_2 - (u-t)}{2-u}, Y_1 = \frac{2-t}{2-u}Y_2$ となるので関係式は $\left(\frac{2-t}{2-u}X_2 - \frac{u-t}{2-u}\right)^2 + \left(\frac{2-t}{2-u}\right)^2 Y_2^2 \leq \left(\frac{2}{2-t}\right)^2$ となり、整理すると

$\left(X_2 - \frac{u-t}{2-t}\right)^2 + Y_2^2 \leq \left(\frac{2-u}{2}\right)^2$ となる。

すなわち P の z 座標が t のとき、線分 AP が通過する部分の平面 $z = u$ における切り口は中心 $\left(\frac{u-t}{2-t}, 0, u\right)$、半径 $\frac{2-u}{2}$ の円盤である。

$\dfrac{u-t}{2-t}=1-\dfrac{2-u}{2-t}$ であるので P の z 座標を $0 \leq t \leq u$ の範囲で変化させると中心の x 座標は $0 \leq x \leq \dfrac{u}{2}$ の範囲で変化し、また半径は t によらないので T の $z=u$ における切り口は以下の図形となることがわかる。



この面積は $\left(\dfrac{2-u}{2}\right)^2\pi+2\cdot\dfrac{2-u}{2}\cdot\dfrac{u}{2}=\left(\dfrac{2-u}{2}\right)^2\pi+u-\dfrac{u^2}{2}$ であるので、求める体積は

$$\begin{aligned}
&\int_0^2\left\{\left(\frac{2-u}{2}\right)^2\pi+u-\frac{u^2}{2}\right\}du \\
=\quad&\left[-\frac{(2-u)^3}{12}\pi+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\right]_0^2=\underline{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\pi}
\end{aligned}$$

第６問

(1) $f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)$ とおく。
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\geq A-1>0$
$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\leq -A+1<0$
$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)\geq A-1>0$
$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)\leq -A+1<0$ であるので
$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{7\pi}{4}$ の範囲に方程式 $f(\theta)=0$ の解が存在することがわかる。
$f(0)=0$ であれば $\theta=0$ が 4 番目の解であり、$f(0)<0$ であれば $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲に解が存在する。
$f(0)>0$ であれば $f(2\pi)=-\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha=f(0)$ なので $\frac{7\pi}{4}<\theta<2\pi$ の範囲に解が存在する。
したがって $A>1$ ならば $f(\theta)=0$ は $0\leq\theta<2\pi$ の範囲に 4 個以上の解をもつことがわかる。

(2) C 上の点は媒介変数 θ によって $(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta)$ と表せる。
この座標を θ の関数と考え θ で微分すると $(-\sqrt{2}\sin\theta,\cos\theta)$ となるので $\mathrm{Q}(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta)$ における C の接線は $(-\sqrt{2}\sin\theta,\cos\theta)$ に平行な直線とわかる。
この直線と Q で直交する直線を考えるとき、$\mathrm{R}(x,y)$ をその直線上の点とする。このとき R は Q と同一であるか $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ と $(-\sqrt{2}\sin\theta,\cos\theta)$ は直角をなす。
いずれの場合も内積の値が 0 となるので
$(x-\sqrt{2}\cos\theta)\cdot(-\sqrt{2}\sin\theta)+(y-\sin\theta)\cdot\cos\theta=0$ が成り立つ。
したがって Q で接線と直交する直線の式は
$\sin\theta\cos\theta-\sqrt{2}x\sin\theta+y\cos\theta=0$ ①となる。
すなわち点 $\mathrm{P}(x,y)$ において C 上の点 Q で Q の接線と PQ が直交するとき、Q の座標 $(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta)$ は①の式をみたすことになるので問題の条件は①をみたす θ が 4 個以上ある、と言い換えられる。
さらに①を計算すると①の左辺が $\frac{1}{2}\sin 2\theta-\sqrt{2}x\sin\theta+y\cos\theta=0$ となり、三角関数の合成を考えると $-\sqrt{2}x=k\cos\alpha, y=k\sin\alpha$ となるような $k(>0),\alpha$ をとることができて
$\frac{1}{2}\sin 2\theta-k\sin(\theta+\alpha)=0$ と変形できる。
よって $r=\frac{1}{2}$ とすると、$k^2=2x^2+y^2<r^2, k\geq 0$ が成り立ち
$k\neq 0$ のとき①は $\frac{1}{2k}\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0$ と変形でき、$\frac{1}{2k}>1$ なので (1) よりこの式をみたす θ は 4 個以上とわかる。

また $k=0$ ならば①は $\sin 2\theta = 0$ となるので $\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ がこの式をみたすことがわかる。
すなわち $r = \dfrac{1}{2}$ は問題の条件をみたすことがわかる。
一方 $r > \dfrac{1}{2}$ とした場合、$2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{4} < r^2$ なので P として $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ が考えられる。このとき①は
$\sin\theta\cos\theta - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos\theta = 0$ となる。
$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2 = \dfrac{1}{8}(1 - 2\sin\theta\cos\theta)$ であり
$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ なので①は
$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ となる。
ここから $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1, -\dfrac{1}{2}$ がわかり $\theta = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}$ が得られるので、すなわち $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ においては条件をみたす Q は 3 点しかないことがわかる。
よって $r > \dfrac{1}{2}$ ならば条件に反する P が存在するので、求める最大値は
$\underline{r = \dfrac{1}{2}}$

所感

論述する力を試される問題がそろいました。ちゃんとした文章を書けない人はお断り、という姿勢のようです。

第 1 問

不等式と集合を検証して候補を絞り込んでいく問題です。混乱しなければ最後までいけるので、完答したいです。
ただし条件は対称ではない (a, b を入れ替えると式の見た目が変わってしまう) ので「対称性より」と記述しないようにしましょう。
予想配点：15

点数	条件
2	(1) $a < 0$ として A の考えられる場合をとる
3	(1) を完答する
2	(2) $a > 0$ として A の考えられる場合をとる
1	(2) A, B, C がすべての実数なら不適
2	(2) を完答する
2	(3) で $a = b = 0$ の場合を考える
2	(3) で $a = 0, b > 0$ の場合を考える
1	(3) 残りは循環性でいえることをいう

第 2 問

面積の条件から解いていくという、「図形の性質」に絡めた問題です。領域を決定するためにはこの答案のようにうまく X の位置で場合分けする必要が出てきます。
予想配点：20

点数	条件
1	平面を 7 つに分割する
3	△ABC の内部に X はこないことをいう
2	D_{A} に X があるときの面積の等式
2	D_{A} に X がくる条件
3	D_{A} 内における X の存在範囲の面積
2	E_{A} に X があるときの面積の等式
2	E_{A} に X がくる条件
3	E_{A} 内における X の存在範囲の面積
2	求める面積を計算

第３問

　媒介変数を利用した曲線の問題です。解き方は一直線なのでやりやすいと思います。
ただし問題は「時計回り」に回転させるとありますので、図を描いている場合はうっかり反時計回りに動かしてできる領域を描かないようにしましょう。
予想配点：20

点数	条件
1	(1) $\frac{y(t)}{x(t)}$ を計算する
3	(1) $\frac{y(t)}{x(t)}$ を微分または式変形で単調減少であることをいう
2	(2) $f(t)$ を計算する
2	(2) $f'(t)$ を計算する
2	(2) $f(t)$ の増減を調べる
1	(2) $f(t)$ の最大値を求める
2	(3) (1) から D は $(0,0), \left(x\left(\frac{1}{2}\right), y\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ を
	両端とする線分で分割できることをいう
2	(3) 面積を求める図形は D と扇形を合わせたものとできることをいう
3	(3) D の面積を計算
2	(3) 面積を計算する

第４問

　文科、理科で共通で出題された、場合の数と整式の融合問題です。おそらく今回の出題の中では最も難しいと思います。
経験がないと (1) もまともに解けないかもしれません。
(2)(3) もうまい方法を考えつかないと手が出せないと思います。
この問題は $f_n(x) = (1+2^0x)\cdot(1+2^1x)\cdot\cdots\cdot(1+2^{n-1}x)$ に気づくのが最大の関門ですが、当初は (1) を $(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2 = 2a_{n,2} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ から、(2) では $a_{n+1,k+1}$ の漸化式を「取り出し方において 2^n の有無で分ける」「取り出し方において 2^0 の有無で分ける」で作成し、解いていました。
すると①②を直接導くことができ、(3) を軽く解くことができます。
予想配点：20

点数	条件
2	(1) $a_{n,2}$ を b_k で分割もしくは $(2^0+\cdots+2^{n-1})^2$ の展開
2	(1) $a_{n,2}$ を求める
3	(2) $f_n(x)=(1+2^0x)\cdot\cdots\cdot(1+2^{n-1}x)$ であることを説明する
2	(2) $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ を計算する
3	(2) $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を計算する
3	(3) $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ の分母をはらい x^{k+1} の係数を比較
3	(3) $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ の分母をはらい x^{k+1} の係数を比較
2	(3) 得られた係数比較から値を求める

第5問

立体の積分問題です。立体で中身の詰まったものを取り上げますが実は比較的解きやすいです。
直感で z 座標を固定したら T の切り口は円盤を横方向に動かしてできる図形であると気付けるかもしれません。
予想配点:20

点数	条件
2	(1) S 内の点が $z=1$ でみたす関係式
2	(1) P の座標を設定したときの平面 $z=1$ と線分 AP との交点
2	(1) P が S の底面にあるときの交点がみたす関係式
1	(1) 領域を描画
1	(2) P を $z=t$ 上に固定、T を $z=u$ の切り口で考えることをいう
2	(2) $z=u$ での線分 AP の交点
2	(2) P を $z=t$ 上に固定したときの P の座標における関係式
2	(2) $z=u$ における、P を $z=t$ で固定したときの切り口の図形
2	(2) T の $z=u$ における切り口の図形
2	(2) T の $z=u$ における切り口の面積
2	(2) T の体積

第6問

(1) と (2) の関係が一瞥しても見つけづらい、二次曲線の問題です。
C の法線が P を通る条件で (1) が出るのですが、安心して最大値の検証を怠らないようにしてください。
それより大きいと不適、といわないと最大であることが示せません。
予想配点：25

点数	条件
3	(1)$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0.f\left(\frac{5\pi}{4}\right)>0, f\left(\frac{7\pi}{4}\right)<0$ をいう
1	(1) 上記から 3 つが存在することをいう
1	(1) $f(0)=0$ なら $\theta=0$ が解であるという
1	(1) $f(0)<0$ なら $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ に解があることをいう
2	(1) $f(0)>0$ なら $\frac{7\pi}{4}<\theta<2\pi$ に解があることをいう
1	(2) C 上の点を媒介変数で表現
2	(2) C の接線に接点で直交する直線の式
2	(2) 問題文の条件を媒介変数を利用した言い換えにする
2	(2) P が原点でないときを問題文の条件を (1) の式に似た形に変形
2	(2) P が原点でないとき (1) の条件を適用できる r をみつける
2	(2) P が原点であるときの 4 本を求める
3	(2) みつけた r より大きくしたとき、条件をみたさない点を挙げる
3	(2) 挙げた点が実際に条件を満たさないことを示す