解答

第１問		
解答欄	正解	配点
アイ, ウ	**-2,4**	**3**
エ, オ	**0,4**	**2**
カキ	**-2**	**2**
ク, ケ, コ, サシ	**5,3,6,13**	**3**
スセ, ソ	**-1,2**	**2**
タチツ, テト	**-14,13**	**3**
ナ	**2**	**2**
ニ	**5**	**2**
ヌネ	**12**	**2**
ノ	**4**	**2**
ハ	**3**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**1,3**(順不同)	$\mathbf{2} \times \mathbf{2}$
ウ	**6**	**4**
エ, オ	**2,4**	**2**
カ, キ	**1,4**	**3**
クケ	**-4**	**2**
コ, サ	**1,0**	**2**
シ, ス	**2,3**	**2**
セ, ソ	**3,3**	**2**
タチ	**-4**	**2**
ツ, テ, ト	**8,6,3**	**2**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**2,3**	**3**
ウ, エ	**5,3**	**3**
オ, カ	**5,5**	**3**
キ, ク	**3,1**	**5**
ケ	**1**	**2**
コ	**3**	**3**
サ	**5**	**3**
シ, ス, セ	**3,5,5**	**3**
ソタ, チ	**20,5**	**2**
ツ, テ, ト	**8,5,5**	**3**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**3,5**(順不同)	$\mathbf{3} \times \mathbf{2}$
ウ	**6**	**3**
エ	**4**	**3**
オ	**3**	**3**
カ	**2**	**1**
キ	**1**	**2**
ク	**0**	**2**

解説

第 1 問

[**1**]

(1)

ア〜ウ　l の傾きは a^2-2a-8 ですのでこれが負になる場合とはすなわち $a^2-2a-8<0$ となる場合です。
$a^2-2a-8=(a+2)(a-4)$ と因数分解できますのでこの値が負となる場合は $\underline{-2<a<4}$ のときとわかります。

(2)

エ, オ　l が x 座標が b の点で x 軸と交わる場合、$0=(a^2-2a-8)b+a$ が成り立ちます。
$a>0$ である場合、$b>0$ となるのは $a^2-2a-8<0$ となる場合ですので (1) の結果を利用すると $\underline{0<a<4}$ がわかります。

カキ　$a\leq 0$ である場合、$b>0$ となるのは $a^2-2a-8>0$ となる場合ですので同様に考えて $\underline{a<-2}$ であることがわかります。

ク〜シ　$a=\sqrt{3}$ のとき $a^2-2a-8=3-2\sqrt{3}-8=-5-2\sqrt{3}$ となりますのですなわち $\sqrt{3}-(5+2\sqrt{3})b=0$ が成り立ちます。したがって

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot(5-2\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})} \\ &= \frac{5\sqrt{3}-6}{25-12}=\underline{\frac{5\sqrt{3}-6}{13}} \end{aligned}$$

となります。

(3)

ス〜ソ　$f(1)=(a^2-2a-8)+a, f(-1)=-(a^2-2a-8)+a$ ですので $f(1)+f(-1)=2a$ です。すなわち $|2a|=1$ より $|a|=\dfrac{1}{2}$ がわかります。
いま $a<0$ で考えていますので $\underline{a=-\dfrac{1}{2}}$ となります。

タ〜ト　$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき $f(x)=-\dfrac{27}{4}x-\dfrac{1}{2}$ です。x の係数が負ですので x が大きくなるほど $f(x)$ が小さくなります。したがって $-2\leq x\leq 2$ において $f(2)\leq f(x)\leq f(-2)$ であり、$f(2)=-14, f(-2)=13$ となりますので $\underline{-14\leq f(x)\leq 13}$ がわかります。

[**2**]

(1) ナ $32 = 4 \cdot 8 = 6 \cdot 5 + 2$ ですので 4 の倍数ですが 6 の倍数ではありません。すなわち 32 は $P, \overline{Q}$ の元ですので $32 \in {}_{2}\underline{P \cap \overline{Q}}$がわかります。

ニ $50 = 4 \cdot 12 + 2 = 6 \cdot 8 + 2 = 24 \cdot 2 + 2$ ですので 4,6,24 いずれの倍数でもありません。したがって 50 は $\overline{P}.\overline{Q}, \overline{R}$ の元ですので $50 \in {}_{5}\underline{\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}}$ がわかります。

(2) ヌネ $P \cap Q$ に属するということはすなわち p, q の両方をみたす、ということです。その最小の自然数ということはすなわち 4 と 6 の最小公倍数となりますので、その値は<u>12</u>となります。

ノ 12 は 24 の倍数ではありませんので $12\ {}_{4}\underline{\notin}R$ となります。

(3) ハ (2) から自然数 12 は条件 p, q をともにみたしますが r をみたさないことがわかりましたので、すなわち ${}_{3}$<u>「(p かつ q) $\Rightarrow$ r」</u>の反例であるといえます。

第 2 問

[1]

(1)

ア, イ　それぞれ検証しましょう。

0,1　関数 $y = x^2 + ax + b$ において x^2 の係数は 1 で正ですので F は下に凸であることがわかります。すなわち<u>選択肢 1</u>が正しいといえます。

2,3　$x^2 + ax + b = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + b - \dfrac{a^2}{4}$ と平方完成できることから、F と x 軸が共有点をもたない場合は $b - \dfrac{a^2}{4} > 0$ のとき、すなわち $a^2 < 4b$ のときです。このことから<u>選択肢 3</u>が正しいといえます。

4,5　F と y 軸は任意の a, b に対して $(0, b)$ で共有点をもちますのでいずれも誤りといえます。

(2)　ウ　平方完成すると $x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$ となります。$-3 \leq x \leq 2$ において $-2 \leq x + 1 \leq 3$ ですので $0 \leq (x+1)^2 \leq 9$ となります。したがって $-2 \leq (x+1)^2 - 2 \leq 7$ がわかりますので $_6$<u>最小値 -2, 最大値 7</u>が正しいといえます。

[2]

(1)

エ, オ　2 次関数のグラフを平行移動した場合、x^2 の係数は変わりません。また 2 点 $(c, 0)(c+4, 0)$ を通るようにした場合、G の式を $y = f(x)$ とすると方程式 $f(x) = 0$ の解は $x = c, c+4$ であり x^2 の係数は 1 ですので $f(x) = (x - c)\{x - (c+4)\}$ がわかります。
$c + (c+4) = 2c + 4 = 2(c+2)$ ですので $y = f(x)$ を問題文に合うように展開すると
$y = x^2 - 2(c + \underline{2})x + c(c + \underline{4})$ となります。

カ, キ　G が点 $(3, k)$ を通るときすなわち $f(3) = k$ となります。
$f(3) = (3 - c)(-1 - c) = c^2 - 2c - 3$ ですので平方完成して $k = (c - \underline{1})^2 - \underline{4}$ となります。

クケ　c が実数全体を動くとき $(c-1)^2$ は負でないすべての実数をとりますから k の最小値は $c - 1 = 0$ のときの値で<u>-4</u>となります。

コ〜ス　$-3 \leq k \leq 0$ となるとき $-3 \leq (c-1)^2 - 4 \leq 0$ より $1 \leq (c-1)^2 \leq 4$ です。したがって $-2 \leq c - 1 \leq -1$ または $1 \leq c - 1 \leq 2$ となりますから求める範囲は<u>$-1 \leq c \leq 0, 2 \leq c \leq 3$</u>となります。

(2)

セ〜チ　G が点 $(3,-1)$ を通るとき $f(3)=-1$ より $(c-1)^2-4=-1$ です。
すなわち $(c-1)^2=3$ と $2\leq c\leq 3$ より $c=1+\sqrt{3}$ がわかります。
また $f(x)$ の式を平方完成すると
$f(x)=\{x-(c+2)\}^2+c(c+4)-(c+2)^2=\{x-(c+2)\}^2-4$
となります。すなわち G は x 軸方向に $c+2=\underline{3+\sqrt{3}}$、$y$ 軸方向に $\underline{-4}$ 平行移動させたものとわかります。

ツ〜ト　G と y 軸との交点の y 座標はすなわち $x=0$ のときの値ですから $c(c+4)$ の値です。いま $c=1+\sqrt{3}$ ですのでその値は
$(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=5+6\sqrt{3}+3=\underline{8+6\sqrt{3}}$ と計算できます。

第３問

(1)

ア, イ　余弦定理を利用しましょう。

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ABC} &= \frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{5^2+6^2-21}{2\cdot5\cdot6}\\ &= \frac{40}{2\cdot5\cdot6} = \frac{2}{\underline{3}}\end{aligned}$$

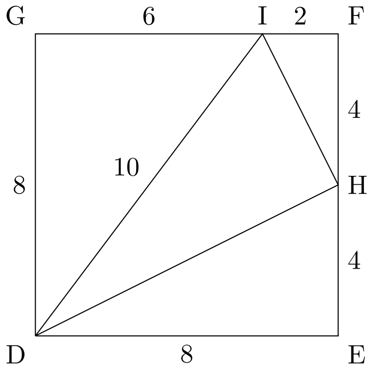
となります。

ウ, エ　相互関係より $\sin^2\angle\mathrm{ABC}+\cos^2\angle\mathrm{ABC}=1$ がわかりますので $\sin^2\angle\mathrm{ABC}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$ です。
$\angle\mathrm{ABC}$ 三角形の内角 (180° 未満) ですので $\sin\angle\mathrm{ABC}>0$ が成り立ちます。したがって $\sin\angle\mathrm{ABC}=\underline{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ となります。

オ, カ　三角形の面積は $\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$ を計算することで求められます。
値を代入すると $\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\underline{5\sqrt{5}}$ となります。

(2)　キ　$\sin\angle\mathrm{DIG}=\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{DI}}$ であり DG の長さがわかっていますので $\sin\angle\mathrm{DIG}$ を計算しましょう。(1) で使用した理屈と同様に計算すると
$\sin\angle\mathrm{DIG}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ となります。
すなわち $\frac{4}{5}=\frac{8}{\mathrm{DI}}$ となりますので $\mathrm{DI}=8\cdot\frac{5}{4}={}_{3}\underline{10}$ がわかります。

ク　DI=10 がわかりましたので $\cos\angle\mathrm{DIG}=\frac{\mathrm{GI}}{\mathrm{DI}}$ を利用して
$\mathrm{GI}=\mathrm{DI}\cdot\cos\angle\mathrm{DIC}=10\cdot\frac{3}{5}=6$ がわかります。
これより FI=FG-GI=8-6=2 となりますので $\tan\angle\mathrm{FIH}=\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{FI}}$ から FH が計算でき、$\mathrm{FH}=\mathrm{FI}\cdot\tan\angle\mathrm{FHI}=2\cdot2=4$ と求められます。
したがって $\mathrm{HI}=\sqrt{\mathrm{FH}^2+\mathrm{FI}^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}={}_{1}\underline{2\sqrt{5}}$ がわかります。



ケ　まず EH=EF-FH=8-4=4 ですので HF:FI=DE:EH=2:1,$\angle$DEH $=$ $\angle$HFI $= 90^\circ$ より $\triangle$HFI と $\triangle$DEH が相似であるとわかります。
また $\triangle$DEH と $\triangle$HEI の相似比が 2:1 であることから DH:HI=2:1 もわかります。
さらに $\angle \mathrm{DHI} = 180^\circ - \angle \mathrm{DHE} - \angle \mathrm{EHI} = 180^\circ - \angle \mathrm{HIE} - \angle \mathrm{EHI} = \angle \mathrm{HEI} = 90^\circ$ ですので $\triangle$HFI と $\triangle$DHI も相似と分かります。
$\triangle$DGI は直角をはさむ辺の比が $8:6$ であり $2:1$ になっていませんので相似ではありません。
したがって $\triangle$HFI と相似なものは ${}_1\underline{\triangle \mathrm{DEH} \text{ と } \triangle \mathrm{DHI}}$であるとわかります。

コ　$\angle \mathrm{DIH} = \angle \mathrm{HIF}$ ですのでこれで比較します。どちらも直角三角形の直角でない角ですのですなわち鋭角であり、これより正接の値の大小が角の大小に対応することがわかります。
$\tan \angle \mathrm{DIG} = \dfrac{\mathrm{GD}}{\mathrm{IG}} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ であり、また仮定より $\tan \angle \mathrm{HIF} = 2$ です。
したがって $0 < \tan \angle \mathrm{DIG} < \tan \angle \mathrm{HIF}$ が成り立ちますので
$\angle \mathrm{DIG} \ {}_3\underline{<} \angle \mathrm{DIH}$ がわかります。

サ　$\triangle$DHI は $\angle$DHI が直角の三角形ですので外接円の中心は斜辺 DI の中点です。したがって半径は $\dfrac{\mathrm{DI}}{2} = \dfrac{10}{2} = \underline{5}$ となります。

シ〜セ　$\triangle$DHI の内接円の半径を r とすると面積の公式より
$\dfrac{1}{2} \cdot r \cdot (\mathrm{DH} + \mathrm{HI} + \mathrm{DI}) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{DH} \cdot \mathrm{HI}$ となります。
$\triangle$DEH と $\triangle$HEI の相似比は $2:1$ ですので $\mathrm{DH} = 2 \cdot \mathrm{HI} = 4\sqrt{5}$ です。
したがって $\mathrm{DH} + \mathrm{HI} + \mathrm{DI} = 10 + 6\sqrt{5}, \mathrm{DH} \cdot \mathrm{HI} = 40$ となることから

$$\begin{aligned} r &= \frac{\mathrm{DH} \cdot \mathrm{HI}}{\mathrm{DH} + \mathrm{HI} + \mathrm{DI}} = \frac{40}{10 + 6\sqrt{5}} = \frac{20}{3\sqrt{5} + 5} \\ &= \frac{20 \cdot (3\sqrt{5} - 5)}{9 \cdot 5 - 5^2} = \frac{20 \cdot (3\sqrt{5} - 5)}{20} = \underline{3\sqrt{5} - 5} \end{aligned}$$

と求められます。

(3)

ソ〜チ　$\triangle$DHJ は $\angle \mathrm{DHJ} = 90^\circ$ の直角三角形であり $\triangle$IHJ は $\angle \mathrm{IHJ} = 90^\circ$ の直角三角形となります。したがって
$\mathrm{DJ} = \sqrt{\mathrm{DH}^2 + \mathrm{HJ}^2} = \sqrt{80 + 64} = \sqrt{144} = 12$
$\mathrm{IJ} = \sqrt{\mathrm{IH}^2 + \mathrm{HJ}^2} = \sqrt{20 + 64} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ がわかります。ここから DJ:JI:ID=$12 : 2\sqrt{21} : 10 = 6 : \sqrt{21} : 5$ となり、この連比は (1) の BC:CA:AB に等しいことがわかります。
したがって $\triangle$ABC が $\triangle$IDJ に相似で相似比が 1:2 であることから面積比は 1:4 となります。
$\triangle$ABC の面積は (1) で計算していますので $\triangle$IDJ の面積は $4{\cdot}5\sqrt{5} = \underline{20\sqrt{5}}$ であるとわかります。

ツ〜ト　H から $\triangle$IDJ におろした垂線 HK の長さは四面体 JDHI を底面が $\triangle$IDJ である三角錐と考えたときの高さです。
この四面体は $\triangle$DHI を底面と考えると高さは辺 HJ の長さに等しくなります。これより体積を計算することで
$\frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{IDJ} \cdot \mathrm{HK} = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot \mathrm{HJ}$ が成り立ちます。
これより $\mathrm{HK}\frac{20 \cdot \mathrm{HJ}}{\triangle\mathrm{IDJ}} = \frac{20 \cdot 8}{20\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{8\sqrt{5}}{5}}$ と求められます。

第４問

(1)

ア, イ　それぞれ検証しましょう。

0 例えば第 1 四分位数より小さいデータは極端に小さい (もしくは第 3 四分位数より大きいデータは極端に大きい) 場合を考えましょう。
そうすると平均値は無限に小さく (もしくは大きく) できます。ということでこれは成立しないことがあります。
(実際、24 個のデータが-300、残りは値が $1,2,\cdots,75$ とすると平均がマイナスとなり成立しないことがわかる)

1 これは第 1 四分位数より小さいデータは極端に小さく、第 3 四分位数より大きいデータは極端に大きい場合を考えると標準偏差が大きくなるようにできます。ということでこれは成立しないことがあります。
(実際、24 個の-10、49 個の 0、24 個の 10、残りを 1 と-1 にすると四分位範囲は 2、標準偏差は 6 より大きくなる)

2 中央値と等しい値のデータが複数あると中央値より小さい観測値の個数は 49 個より小さくなることがあります。ということでこれは成立しないことがあります。

3 最大値に等しい観測値を 1 個削除した場合、中央値は 50 番目の値から「49 番目の値と 50 番目の値との中間」となります。
第 1 四分位は「小さい順に並べた後、中央値をとった観測値より手前のデータでみたときの中央値」で求めます。
すなわち最大値に等しい観測値を 1 個削除する前もした後も第 1 四分位は 49 番目までの値で計算しますので**この記述は常に成り立つ**ことがわかります。

4 第 1 四分位に等しい観測値や第 3 四分位に等しい観測値が複数あると 51 個より多く残る可能性があります。ということでこれは成立しないことがあります。

5 第 1 四分位は 25 番目の値、第 3 四分位は 75 番目の観測値として存在する値ですので四分位範囲はある観測値から別のある観測値までの範囲となります。したがってその外側の観測値をすべて削除すると最大値はもとの第 3 四分位数、最小値はもとの第 1 四分位数に等しくなります。ということで**この記述は常に成り立つ**ことがわかります。

したがって3 と 5が正しいとわかります。

(2)　ウ　それぞれの記述を検証します。

(I) 四分位範囲は長方形の箱であらわされます。P10 の四分位範囲をみてみると、第 1 四分位数は 79.6 ぐらいですが第 3 四分位数は 80.9 程度となっています。すなわちこの都道府県は四分位範囲が 1 より大きいですので誤りとわかります。

(II) 中央値は太い線であらわされています。これをみてみるとたとえば P8 の中央値は P7 の中央値より大きくなっていることが読み取れます。ほかにも多くありますのでこの記述は誤りとわかります。

(III) すべての値はひげで記された範囲にきます。P1 の最大値は 79.3 程度であり P47 の最小値は 81.2 程度です。すなわち P47 の最小が P1 の最大より 1.5 以上大きいですのでどのデータでも 1.5 以上の差が生じることになります。ということで正しいとわかります。

したがって正しいものは $_6$(I) 誤,(II) 誤,(III) 正となります。

(3) エ データのヒストグラムにある度数を計算すると 2+4+9+3+2=20 となりますので図に出ているものですべてとなります。ということは最小値は 79.5 以上 80.0 未満であり最大値は 81.5 以上 82.0 未満です。この条件から選択肢 0,1,2,3,6,7 を除外できます。
また、小さい値から 9 番目と 10 番目はどちらも 80.5 以上 81.0 未満ですので中央値はこの範囲にきます。(新たに除外されるものはない)
さらに第 1 四分位を考えます。この値は 5 番目と 6 番目の値の中間です。いずれも 80.0 以上 80.5 未満ですから第 1 四分位もこの範囲にくることがわかり、これより選択肢 5 が除外されます。
最後に第 3 四分位を考えます。第 3 四分位は 15 番目と 16 番目の値の中間であり、15 番目は 80.5 以上 81.0 未満、16 番目は 81.0 以上 81.5 未満ですから 81.0 前後にくるのが妥当です。
したがってあてはまる箱ひげ図は選択肢 4 とわかります。

(4) オ 切片が k で傾き 1 の直線ということは縦軸の値 (女) から横軸の値 (男) を引いてえられる値が切片の値ということになります。
ということは補助的にひかれているものは「平均寿命の差が 5.5 となる線から 7.5 となる線まで 0.5 刻み」ということになります。
これをふまえて検証しましょう。端の値でみるのがやりやすいです。
5.5〜6.0 の度数を考えると散布図では差が 5.5 の直線 (引かれているいちばん下の線) と 6.0 の直線との間にくるデータが 9 個あります。
また、7.0〜7.5 の度数を考えると散布図では引かれているいちば

ん上の線と 7.0 の直線との間にくるデータが 3 個あります。
どちらでみても考えられるヒストグラムは選択肢 3のみであることがわかります。

(5)　カ　変動係数を平均値で割ることを考えます。$V = \dfrac{20.1}{27.2} > \dfrac{18}{30} = 0.6$ ですので $_2\underline{V > 0.509}$ が成り立つことがわかります。

キ　データの値をすべて 100 倍すると平均値も標準偏差も同じく 100 倍になります。ということで分母分子どちらも 100 倍になりますので変動係数は $_1$変わらないことがわかります。

ク　データの値にすべて 100 を加えると平均値は 100 増えますが標準偏差は変わりません。ということで分母が大きくなり分子はそのままですので変動係数は $_0$小さくなることがわかります。

所感

今回は次回実施予定の共通テストを踏まえてか、少し趣向が変わっている問題がそろいました。
後半は歯ごたえがある問題となっています。

第 1 問

[1]

1 次関数のような 2 次関数の問題です。丁寧な場合分けや分母の有理化に気を付ければ大丈夫だと思います。

[2]

集合と条件に関する問題です。最初の選択肢が少々面倒ですが難しくはないでしょう。

第 2 問

[1]

2 次関数のグラフと最大最小に関する問題です。(1) は条件が緩そうですが基本的だと思います。

[2]

2 次関数のグラフを移動させることを考える問題です。少し考える部分がありますが比較的計算しやすい設定になっていますので早く解きたい。

第 3 問

図形と計量の問題です。(2) は比較的よく出る三角形がそろいますがなれないと時間を取られてしまいます。

第４問

　データの分析に関する問題です。(1) は高校数学における四分位数の定義を正確に理解し、またデータとしてありうる可能性を多く考えていないと解けない難問です。

(2)～(4) は図の読み方を押さえていれば問題ないと思います。

(5) はざっくりとした計算で正解したい。