解答

第１問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウ	**3,2,3**	**2**
エ	**3**	**2**
オ, カ, キ, ク	**2,3,5,3**	**3**
ケコ	**12**	**2**
サ, シ	**4,5**	**2**
ス, セ	**3,5**	**2**
ソ	**3**	**2**
タチ	**11**	**3**
ツテ	**13**	**2**
トナニ	**-36**	**2**
ヌ, ネノ	**2,10**	**2**
ハ, ヒフ	**3 -4**	**2**
ヘ	**7**	**2**
ホ	**5**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**2,2**	**2**
ウ	**1**	**2**
エ, オ, カ	**2,4,2**	**2**
キ, ク	**4,1**	**2**
ケ, コ	**0,2**	**3**
サ, シ	**2,1**	**2**
ス	**a**	**2**
セ, ソ	**3,3**	**3**
タ	**1**	**2**
チ, ツ	**1,3**	**3**
テ, ト, ナ, ニ, ヌ	**2,4,2,1,3**	**3**
ネ, ノ	**2,3**	**3**
ハ, ヒフ	**2,27**	**1**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア	**6**	**1**
イ, ウ	**2,4**	**2**
エ	**3**	**2**
オ, カ	**3,3**	**2**
キ	**2**	**2**
クケ	**-2**	**2**
コ, サ, シス, セ	**6,5,18,5**	**2**
ソ, タ	**2,2**	**2**
チ	**9**	**1**
ツ, テ	**6,4**	**2**
トナ, ニ	**12,5**	**2**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウ	**2,7,4**	**3**
エ, オカ, キ	**4,-1,2**	**2**
ク, ケ	**1,3**	**1**
コサ, シス, セ	**-1,47,4**	**2**
ソタ	**-3**	**2**
チ, ツ	**2,4**	**3**
テ, ト, ナ	**2,3,6**	**2**
ニヌネ, ノ	**-21,2**	**2**
ハヒ, フ	**21,1**	**3**

解説

第 1 問

[**1**]

(1)

ア〜ウ 加法定理 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ を利用します。

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}, \sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ですので

$\sqrt{3}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cos\theta+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\theta$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{3}{2}\sin\theta}$ と求められます。

エ ①の式は $\sqrt{3}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\theta<0$ と変形できます。上記からこの左辺は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\theta+\dfrac{1}{2}\cdot\sin\theta$ となることがわかります。

$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}, \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるような α は $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ が見つかりますのでこの式は$\underline{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)<0}$と変形できます。

オ〜ク いま $0\leq\theta<2\pi$ ですので $\dfrac{\pi}{3}\leq\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ となります。

この範囲で $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)<0$ となるのは $\pi\leq\theta+\dfrac{\pi}{3}<2\pi$ ですので$\underline{\dfrac{2}{3}\pi\leq\theta<\dfrac{5}{3}\pi}$が求める範囲となります。

(2) ケコ 解と係数の関係より $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{35}{25}=\dfrac{7}{5}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{25}$ です。

恒等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta$ を利用すると左辺は定数になります。右辺にも同様に代入すると

$1=\left(\dfrac{7}{5}\right)^2-2\cdot\dfrac{k}{25}$ が得られます。

整理すると $\dfrac{2}{25}\cdot k=\dfrac{24}{25}$ となりますので$\underline{k=12}$がわかります。

サ〜セ 方程式 $25x^2-35x+12=0$ の左辺は $(5x-3)(5x-4)$ と因数分解できますのですなわち $x=\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}$ が解となります。

いまこの 2 つは $\sin\theta, \cos\theta$ であり $\sin\theta\geq\cos\theta$ を仮定していますのですなわち$\underline{\sin\theta=\dfrac{4}{5}, \cos\theta=\dfrac{3}{5}}$がわかります。

ソ $\sin^2\theta=\dfrac{16}{25}$ ですので $\dfrac{1}{2}<\sin^2\theta<\dfrac{3}{4}$ すなわち $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ がわかります。

この不等式は $\sin\frac{\pi}{4} < \sin\theta < \sin\frac{\pi}{3}$ と書き換えられますので
$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ であれば ${}_{3}\underline{\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3}}$ をみたすことがわかります。

[**2**]

(1) タチ $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ の両辺を 2 乗すると $(t^{\frac{1}{3}})^2 = t^{\frac{2}{3}}$ などから
$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} - 2 = 9$ が得られます。
したがって $t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \underline{11}$ がわかります。

ツテ $(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} + 2$ と展開できます。
上記よりこの値は $11 + 2 = 13$ となりますので $(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = 13$ です。
いま $t > 0$ を仮定していますので $t^{\frac{1}{3}} > 0, t^{-\frac{1}{3}} > 0$ がわかり、したがって $t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \underline{\sqrt{13}}$ がわかります。

ト〜ニ $(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})^3 = t - 3t^{\frac{1}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} - t^{-1}$ と展開できます。
整理すると $-27 = t - t^{-1} - 3(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}) = t - t^{-1} + 9$ となりますので $t - t^{-1} = \underline{-36}$ がわかります。

(2)

ヌ〜ノ $\log_3(x\sqrt{y}) = \log_3 x + \log_3 y^{\frac{1}{2}} = X + \dfrac{1}{2}Y$ となりますので
②の不等式は $X + \dfrac{1}{2}Y \leq 5$
分母を払って$\underline{2X + Y \leq 10}$とできます。

ハ〜フ 底の変換公式を利用して底を 3 にします。すると
$\log_{81} \dfrac{y}{x^3} = \dfrac{\log_3 \frac{y}{x^3}}{\log_3 81} = \dfrac{1}{4} \cdot (\log_3 y - 3\log_3 x)$ とできます。
同様に分母を払って整理すると (今度は負の数をかけるので符号を反転させて)$\underline{3X - Y \geq -4}$と変形できます。

へ ④から $X \leq 5 - \dfrac{Y}{2}$、⑤から $X \geq \dfrac{Y}{3} - \dfrac{4}{3}$ が得られ、合わせると
$\dfrac{Y}{3} - \dfrac{4}{3} \leq X \leq 5 - \dfrac{Y}{2}$ が得られます。
ということは Y は $\dfrac{Y}{3} - \dfrac{4}{3} \leq 5 - \dfrac{Y}{2}$ をみたすことが必要十分とわかります。ということでこの不等式から $Y \leq \dfrac{38}{5} = 7 + \dfrac{3}{5}$ がわかりますので取りうる最大の整数は$\underline{7}$とわかります。

ホ $Y = 7$ のとき、得られる X の関係式は $1 \leq X \leq \dfrac{3}{2}$ です。
すなわち $1 \leq \log_3 x \leq \dfrac{3}{2}$ より $3 \leq x \leq 3^{\frac{3}{2}}$ がわかります。
ここで $3^3 = 27$ であることから $5^2 \leq 3^3 \leq 6^2$ すなわち $5 \leq 3^{\frac{3}{2}} \leq 6$ がわかりますので x のとりうる最大の整数は$\underline{5}$とわかります。

第２問

(1)

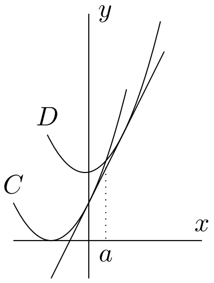
ア〜ウ　C での接点が (t, t^2+2t+1) のとき、$(x^2+2x+1)' = 2x+2$ であることを利用すると l の傾きは $2t+2$ とわかります。
また切片を p とすると通る点から $t^2+2t+1 = (2t+2)\cdot t + p$ となりますので $p = 1-t^2$ がわかります。
したがって l の方程式は $\underline{y = (2t+2)x - t^2 + 1}$ と表せます。

エ〜ク　同様に考えると $f'(s) = 2s - (4a-2)$ であり切片を q とすると $f(s) = (2s-4a+2)s + q$ となりますので $q = 4a^2+1-s^2$ となります。
したがって l の方程式は $\underline{y = (2s-4a+2)x - s^2 + 4a^2 + 1}$ と表せます。

ケ, コ　2 つの式の係数と定数項から $2t+2 = 2s-4a+2, 1-t^2 = 1+4a^2-s^2$ がわかります。
さらに $t = s-2a$ とすることで t を消去でき
$1-(s-2a)^2 = 1+4a^2-s^2$ とできます。
整理すると $4as = 8a^2$ となり、$a > 0$ より $\underline{s = 2a, t = 0}$ と求められます。

サ, シ　t を使った l の式に代入することで $\underline{y = 2x+1}$ がわかります。

(2)　ス　交点の x 座標において $x^2+2x+1 = f(x)$ が成り立ちます。
展開して整理すると $4ax = 4a^2$ となり、$a > 0$ より $x = \underline{a}$ となる x 座標で交点をもつことがわかります。



セ, ソ　l は C の下側で接する (実数 x において $x^2+2x+1 \geq 2x+1$) ことから

$$S = \int_0^a \{(x^2+2x+1) - (2x+1)\}dx = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \underline{\frac{a^3}{3}}$$

と計算できます。

(3)

タ〜ツ　$0 \leq x \leq a$ においては C が D の下側にきて、$a \leq x \leq 2a$ においては D が C の下側にくることがわかりました。$a > 1$ ならば $0 \leq x \leq 1$ の部分では C と直線 l で囲まれる部分の面積が T になります。

C は固定ですのですなわち$\underline{a > 1}$ならば T の値は固定で

$$T = \int_0^1 \{(x^2 + 2x + 1) - (2x + 1)\} dx = \frac{1^3}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

となることがわかります。(S の式で $a = 1$ としたものと同じ)

テ〜ヌ　$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のときは $2a \geq 1$ より $a \leq x \leq 1$ をみたす部分は D と l に囲まれることがわかります。これを利用すると

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a \{(x^2 + 2x + 1) - (2x + 1)\} dx \\ &\quad + \int_a^1 [\{x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 + 1\} - (2x + 1)] dx \\ &= S + \int_a^1 (x^2 - 4ax + 4a^2) dx = \frac{a^3}{3} + \left[\frac{x^3}{3} - 2ax^2 + 4a^2 x\right]_a^1 \\ &= \frac{a^3}{3} + \left(\frac{1}{3} - 2a + 4a^2\right) - \left(\frac{7}{3}a^3\right) = \underline{-2a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

と計算できます。

(4)

ネ, ノ　$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ であるとき

$U = 2T - 3S = -5a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3}$ となります。これを a の関数 $g(a)$ とおくと

$g'(a) = -15a^2 + 16a - 4 = -(5a - 2)(3a - 2)$ となることがわかります。

したがって $g'(a)$ は範囲を考えなければ $a = \frac{2}{5}$ で極小、$a = \frac{2}{3}$ で極大となります。

すなわち $\frac{1}{2} \leq a < \frac{2}{3}$ で U は増加、$\frac{2}{3} < a \leq 1$ で U は減少しますので U は$\underline{a = \frac{2}{3}}$のときに最大値をとることがわかります。

ハ〜フ　$a = \frac{2}{3}$ のときの値を計算すると

$$\begin{aligned} U &= -5 \cdot \frac{8}{27} + 8 \cdot \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ &= -5 \cdot \frac{8}{27} + 8 \cdot \frac{12}{27} - 4 \cdot \frac{18}{27} + \frac{18}{27} = \underline{\frac{2}{27}} \end{aligned}$$

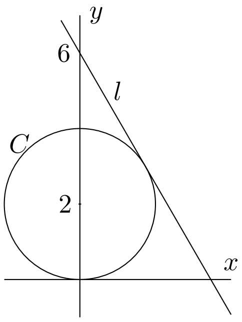
となることがわかります。

第３問

(1)　ア　傾きが m で y 切片が点 A の y 座標である 6 とわかっていますので l の式は$\underline{y = mx + 6}$とわかります。

イ, ウ　中心が (0,2) であり x 軸に接することから半径は y 座標の絶対値である 2 です。ということで半径の 2 乗が 4 ですので C の式は$\underline{x^2 + (y-2)^2 = 4}$とわかります。

(2)　エ　l が C に接するときは、C の中心と l の距離が C の半径に等しくなるときです。l の式は $mx - y + 6 = 0$ と変形できますのですなわち距離の公式を利用して $\dfrac{|m \cdot 0 - 2 + 6|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$ となります。
整理すると $\sqrt{m^2+1} = 2$ より $m^2 = 3$ すなわち$\underline{m = \pm\sqrt{3}}$のときに接することがわかります。



オ, カ　$m = -\sqrt{3}$ のとき l の式は $y = -\sqrt{3}x + 6$ です。接点 (x, y) では l, C の式を両方みたしますのでこれを利用して y を消去すると $x^2 + (6 - \sqrt{3}x - 2)^2 = 4$ となります。
これを整理すると $4x^2 - 8\sqrt{3}x + 12 = 0$ となりこの左辺は $4(x - \sqrt{3})^2$ と因数分解できます。
これより $x = \sqrt{3}, y = 3$ がわかりますので接点の座標は$\underline{(\sqrt{3}, 3)}$とわかります。

(3)　キ　l と C が異なる 2 点で交わる場合は、C の中心と l との距離が C の半径より小さくなるときです。同様に距離の公式を利用すると $\dfrac{|m \cdot 0 - 2 + 6|}{\sqrt{m^2+1}} < 2$ より $\sqrt{m^2+1} > 2$ がわかります。
すなわち $m^2 > 3$ である必要があり、$1^2 < 3, 2^2 > 3$ ですので条件をみたす最小の整数は$\underline{2}$とわかります。

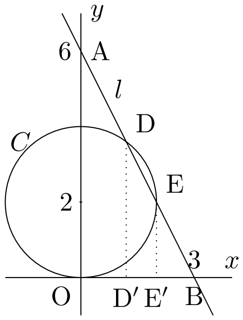
(4) クケ　l が B を通るときは l の式に B の座標を代入して $0 = m \cdot 3 + 6$ が成り立つことになりますからこれを解いて$\underline{m = -2}$となることがわかります。

コ〜タ　(2) と同様に l と C の式から y を消去すると $x^2 + (6 - 2x - 2)^2 = 4$ となります。

整理すると $5x^2-16x+12=0$ となり、左辺は $(5x-6)(x-2)$ と因数分解できることから x の値は 0 に近い方から $\dfrac{6}{5}, 2$ とわかります。それぞれに対して y を計算すると $y=\dfrac{18}{5}, 2$ となりますので $\underline{\mathrm{D}\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{18}{5}\right)}$,E(2,2)が交点とわかります。

チ　△OAB は O が直角の三角形ですので面積は $\dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = \underline{9}$ と計算できます。

ツ, テ　D を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点を D′、E を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点を E′ とおきます。



すると直線が OA が y 軸に一致することから

AD:DE:EB=OD′:D′E′:E′B が成り立つことがわかります。

x 座標から長さを計算すると

$\mathrm{OD}' = \dfrac{6}{5}, \mathrm{D}'\mathrm{E}' = 2 - \dfrac{6}{5} = \dfrac{4}{5}, \mathrm{E}'\mathrm{B} = 3 - 2 = 1$ ですので

AD:DE:EB=$\dfrac{6}{5} : \dfrac{4}{5} : 1 = \underline{6 : 4 : 5}$ がわかります。

ト〜ニ　△ODE,△OAB は直線 AB 上で底辺を考えると高さが等しくなります。ということで

△ODE : △OAB =DE:AB=4:(6+4+5)=4:15 です。

したがって $\triangle\mathrm{ODE} = \dfrac{4}{15} \cdot \triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{4 \cdot 9}{15} = \dfrac{12}{\underline{5}}$ がわかります。

第４問

(1)

ア〜ウ　$t=x+\dfrac{3}{x}$ のとき $t^2=x^2+\dfrac{9}{x^2}+6$ となりますので $x^2+\dfrac{9}{x^2}=t^2-6$ です。

これを利用すると①の左辺は

$2\left(x^2+\dfrac{9}{x^2}\right)-7\left(x+\dfrac{3}{x}\right)+8=2(t^2-6)-7t+8$ となりますので

①は$\underline{2t^2-7t-4=0}$と表されます。

エ〜キ　$2t^2-7t-4=(2t+1)(t-4)$ と変形できますので解は$\underline{t=4,-\dfrac{1}{2}}$がわかります。

ク, ケ　$t=4$ のときはすなわち $x+\dfrac{3}{x}=4$ です。x 倍して整理すると $x^2-4x+3=0$ となります。

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ ですので$\underline{x=1,3}$とわかります。

コ〜セ　$t=-\dfrac{1}{2}$ のときは同様に変形すると $x^2+\dfrac{1}{2}x+3=0$ となります。

平方完成すると $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{47}{16}=0$ となりますので

$\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2=-\dfrac{47}{16}$ より$\underline{x-\dfrac{-1\pm\sqrt{47}}{4}i}$が得られます。

(2) ソタ　$\alpha-1=\sqrt{3}i$ ですので $(\alpha-1)^2=3\cdot i^2=\underline{-3}$ となります。

チ, ツ　上記の式を展開すると $\alpha^2-2\alpha+1=-3$ ですので整理すると $\underline{\alpha^2-2\alpha+4=0}$とできます。

テ〜ナ　順番に計算していくと

$$\begin{aligned}P(x) &= 2x^2(x^2-2x+4)-3x^3-21x+18\\ &= (2x^2-3x)(x^2-2x+4)-6x^2-9x+18\\ &= (2x^2-3x-6)(x^2-2x+4)-21x+42\end{aligned}$$

となりますので商は$\underline{2x^2-3x-6}$です。

ニ〜ノ　余りを因数分解すると $-21x+42=\underline{-21(x-2)}$ がわかります。

ハ〜フ　上記の式に $x=\alpha$ を代入すると

$P(\alpha)=(2\alpha^2-3\alpha-6)(\alpha^2-2\alpha+4)-21(\alpha-2)$ となります。

$\alpha^2-2\alpha+4=0$ を利用すると

$$\begin{aligned}P(\alpha) &= (2\alpha^2-3\alpha-6)\cdot 0-21(\alpha-2)\\ &= -21(\alpha-2)=-21\cdot(1-\sqrt{3}i-2)\\ &= -21\cdot(-1-\sqrt{3}i)=\underline{21\cdot(1+\sqrt{3}i)}\end{aligned}$$

がわかります。

所感

前半が重く、後半は比較的解きやすい問題構成でした。

第 1 問

[1]

三角関数に関する問題です。加法定理や解と係数の関係を絡めていますが難しくはないでしょう。
最後の評価は $\sin\theta \geq \cos\theta$ より $\dfrac{\pi}{4}(45^\circ)$ より大きい、ということは理解したい。

[2]

指数対数関数における問題です。少し手の込んだ式変形をするので時間がかかってしまうでしょう。
最大値の評価も意外に難しそうです。

第 2 問

微積分に関する問題です。全体的にかなり面倒な計算が待っています。
幸い C, D はそれぞれ $y = (x+1)^2, y = (x-2a+1)^2 + 4a$ とでき l が不変ですのでそれを利用した近道が使えるかもしれません。
ただ最後の値 U は直感的でない面積が出ますのでてこずります。

第 3 問

図形と式に関する問題です。全体的に直感的な値が出やすい問題設定になっています。
ただ最後の面積計算は長さの比を x 座標の差分の比と同じ、ということに気づくような思考を要するでしょう。

第 4 問

複素数に関する問題です。
相反方程式や整式の除法を利用した計算と、難関大を狙っている人ならやっていそうな分野になっています。