解答

第１問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウ	**3,2,3**	**2**
エ	**3**	**2**
オ, カ, キ, ク	**2,3,5,3**	**3**
ケコ	**12**	**2**
サ, シ	**4,5**	**2**
ス, セ	**3,5**	**2**
ソ	**3**	**2**
タチ	**11**	**3**
ツテ	**13**	**2**
トナニ	**-36**	
ヌ, ネノ	**2,10**	**2**
ハ, ヒフ	**3 -4**	**2**
ヘ	**7**	**2**
ホ	**5**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**2,2**	**2**
ウ	**1**	**2**
エ, オ, カ	**2,4,2**	**2**
キ, ク	**4,1**	**2**
ケ, コ	**0,2**	**3**
サ, シ	**2,1**	**2**
ス	**a**	**2**
セ, ソ	**3,3**	**3**
タ	**1**	**2**
チ, ツ	**1,3**	**3**
テ, ト, ナ, ニ, ヌ	**2,4,2,1,3**	**3**
ネ, ノ	**3,2**	**3**
ハ, ヒフ	**2,27**	**1**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア	**6**	**2**
イ	**0**	**1**
ウ, エ, オ	**1,1,2**	**2**
カ	**3**	**1**
キ	**1**	**1**
ク, ケ, コ	**2,1,1**	**2**
サ, シ, ス, セ	**1,6,1,2**	**2**
ソ, タ, チ	**2,3,1**	**2**
ツ, テ, ト	**3,1,4**	**2**
ナ, ニ, ヌ	**1,2,2**	**2**
ネ, ノ, ハ	**1,0,0**	**1**
ヒ	**1**	**2**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**3,6**	**2**
ウ, エ	**4,3**	**2**
オカ	**36**	**2**
キク, ケ	**-2 3**	**1**
コ	**1**	**1**
サ, シ	**2,6**	**2**
ス, セ, ソタ	**2,2,-4**	
チ	**3**	**2**
ツテ	**30**	**2**
ト, ナ, ニ, ヌ, ネ, ノ	**1,2,2,1,2,2**	**2**
ハヒ	**60**	**1**
フ	**3**	**1**
ヘ, ホ	**4,3**	**1**

第５問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**1,4**	**2**
ウ, エ	**1,2**	**2**
オ, カ	**7,4**	**2**
キクケ	**240**	**2**
コサ	**12**	**2**
シス	**02**	**2**
セ	**2**	**2**
ソ	**6**	**2**
タチ	**60**	**1**
ツテ	**30**	**1**
トナ. ニ	**44.1**	**1**
ヌネ. ノ	**55.9**	**1**

解説

第 1 問

[1]

(1)

ア〜ウ　加法定理 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ を利用します。

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}, \sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ですので

$\sqrt{3}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cos\theta+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\theta$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{3}{2}\sin\theta}$ と求められます。

エ　①の式は $\sqrt{3}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\theta<0$ と変形できます。上記からこの左辺は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\theta+\dfrac{1}{2}\cdot\sin\theta$ となることがわかります。

$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}, \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるような α は $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ が見つかりますのでこの式は$\underline{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)<0}$と変形できます。

オ〜ク　いま $0\leq\theta<2\pi$ ですので $\dfrac{\pi}{3}\leq\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ となります。

この範囲で $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)<0$ となるのは $\pi\leq\theta+\dfrac{\pi}{3}<2\pi$ ですので$\underline{\dfrac{2}{3}\pi\leq\theta<\dfrac{5}{3}\pi}$が求める範囲となります。

(2) ケコ　解と係数の関係より $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{35}{25}=\dfrac{7}{5}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{25}$ です。

恒等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta$ を利用すると左辺は定数になります。右辺にも同様に代入すると

$1=\left(\dfrac{7}{5}\right)^2-2\cdot\dfrac{k}{25}$ が得られます。

整理すると $\dfrac{2}{25}\cdot k=\dfrac{24}{25}$ となりますので$\underline{k=12}$がわかります。

サ〜セ　方程式 $25x^2-35x+12=0$ の左辺は $(5x-3)(5x-4)$ と因数分解できますのですなわち $x=\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}$ が解となります。

いまこの 2 つは $\sin\theta,\cos\theta$ であり $\sin\theta\geq\cos\theta$ を仮定していますのですなわち$\underline{\sin\theta=\dfrac{4}{5},\cos\theta=\dfrac{3}{5}}$がわかります。

ソ　$\sin^2\theta=\dfrac{16}{25}$ ですので $\dfrac{1}{2}<\sin^2\theta<\dfrac{3}{4}$ すなわち $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ がわかります。

この不等式は $\sin\dfrac{\pi}{4} < \sin\theta < \sin\dfrac{\pi}{3}$ と書き換えられますので
$0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であれば ${}_{3}\underline{\dfrac{\pi}{4} \leq \theta < \dfrac{\pi}{3}}$ をみたすことがわかります。

[**2**]

(1) タチ $t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ の両辺を 2 乗すると $(t^{\frac{1}{3}})^2=t^{\frac{2}{3}}$ などから
$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}-2=9$ が得られます。
したがって $t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\underline{11}$ がわかります。

ツテ $(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}})^2=t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}+2$ と展開できます。
上記よりこの値は $11+2=13$ となりますので $(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}})^2=13$ です。
いま $t>0$ を仮定していますので $t^{\frac{1}{3}}>0, t^{-\frac{1}{3}}>0$ がわかり、したがって $t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\underline{\sqrt{13}}$ がわかります。

ト〜ニ $(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})^3=t-3t^{\frac{1}{3}}+3t^{-\frac{1}{3}}-t^{-1}$ と展開できます。
整理すると $-27=t-t^{-1}-3(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})=t-t^{-1}+9$ となりますので $t-t^{-1}=\underline{-36}$ がわかります。

(2)

ヌ〜ノ $\log_3(x\sqrt{y})=\log_3 x+\log_3 y^{\frac{1}{2}}=X+\dfrac{1}{2}Y$ となりますので
②の不等式は $X+\dfrac{1}{2}Y\leq 5$
分母を払って$\underline{2X+Y\leq 10}$とできます。

ハ〜フ 底の変換公式を利用して底を 3 にします。すると
$\log_{81}\dfrac{y}{x^3}=\dfrac{\log_3\frac{y}{x^3}}{\log_3 81}=\dfrac{1}{4}\cdot(\log_3 y-3\log_3 x)$ とできます。
同様に分母を払って整理すると (今度は負の数をかけるので符号を反転させて)$\underline{3X-Y\geq -4}$と変形できます。

ヘ ④から $X\leq 5-\dfrac{Y}{2}$、⑤から $X\geq\dfrac{Y}{3}-\dfrac{4}{3}$ が得られ、合わせると
$\dfrac{Y}{3}-\dfrac{4}{3}\leq X\leq 5-\dfrac{Y}{2}$ が得られます。
ということは Y は $\dfrac{Y}{3}-\dfrac{4}{3}\leq 5-\dfrac{Y}{2}$ をみたすことが必要十分とわかります。ということでこの不等式から $Y\leq\dfrac{38}{5}=7+\dfrac{3}{5}$ がわかりますので取りうる最大の整数は$\underline{7}$とわかります。

ホ $Y=7$ のとき、得られる X の関係式は $1\leq X\leq\dfrac{3}{2}$ です。
すなわち $1\leq\log_3 x\leq\dfrac{3}{2}$ より $3\leq x\leq 3^{\frac{3}{2}}$ がわかります。
ここで $3^3=27$ であることから $5^2\leq 3^3\leq 6^2$ すなわち $5\leq 3^{\frac{3}{2}}\leq 6$ がわかりますので x のとりうる最大の整数は$\underline{5}$とわかります。

第２問

(1)

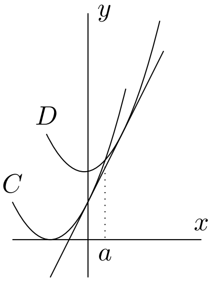
ア〜ウ　C での接点が (t, t^2+2t+1) のとき、$(x^2+2x+1)'=2x+2$ であることを利用すると l の傾きは $2t+2$ とわかります。
また切片を p とすると通る点から $t^2+2t+1=(2t+2)\cdot t+p$ となりますので $p=1-t^2$ がわかります。
したがって l の方程式は $\underline{y=(2t+2)x-t^2+1}$ と表せます。

エ〜ク　同様に考えると $f'(s)=2s-(4a-2)$ であり切片を q とすると $f(s)=(2s-4a+2)s+q$ となりますので $q=4a^2+1-s^2$ となります。
したがって l の方程式は $\underline{y=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1}$ と表せます。

ケ, コ　2 つの式の係数と定数項から $2t+2=2s-4a+2, 1-t^2=1+4a^2-s^2$ がわかります。
さらに $t=s-2a$ とすることで t を消去でき
$1-(s-2a)^2=1+4a^2-s^2$ とできます。
整理すると $4as=8a^2$ となり、$a>0$ より $\underline{s=2a, t=0}$ と求められます。

サ, シ　t を使った l の式に代入することで $\underline{y=2x+1}$ がわかります。

(2)　ス　交点の x 座標において $x^2+2x+1=f(x)$ が成り立ちます。
展開して整理すると $4ax=4a^2$ となり、$a>0$ より $x=\underline{a}$ となる x 座標で交点をもつことがわかります。



セ, ソ　l は C の下側で接する (実数 x において $x^2+2x+1\geq 2x+1$) ことから

$$S=\int_0^a \{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx=\int_0^a x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\underline{\frac{a^3}{3}}$$

と計算できます。

(3)

タ〜ツ $0 \leq x \leq a$ においては C が D の下側にきて、$a \leq x \leq 2a$ においては D が C の下側にくることがわかりました。$a > 1$ ならば $0 \leq x \leq 1$ の部分では C と直線 l で囲まれる部分の面積が T になります。

C は固定ですのですなわち$\underline{a > 1}$ならば T の値は固定で

$$T = \int_0^1 \{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx = \frac{1^3}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

となることがわかります。(S の式で $a = 1$ としたものと同じ)

テ〜ヌ $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のときは $2a \geq 1$ より $a \leq x \leq 1$ をみたす部分は D と l に囲まれることがわかります。これを利用すると

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^a \{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx \\
&\quad + \int_a^1 [\{x^2-(4a-2)x+4a^2+1\}-(2x+1)]dx \\
&= S + \int_a^1 (x^2-4ax+4a^2)dx = \frac{a^3}{3} + \left[\frac{x^3}{3} - 2ax^2 + 4a^2x\right]_a^1 \\
&= \frac{a^3}{3} + \left(\frac{1}{3} - 2a + 4a^2\right) - \left(\frac{7}{3}a^3\right) = \underline{-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

と計算できます。

(4)

ネ, ノ $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ であるとき

$U = 2T - 3S = -5a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3}$ となります。これを a の関数 $g(a)$ とおくと

$g'(a) = -15a^2 + 16a - 4 = -(5a-2)(3a-2)$ となることがわかります。

したがって $g'(a)$ は範囲を考えなければ $a = \frac{2}{5}$ で極小、$a = \frac{2}{3}$ で極大となります。

すなわち $\frac{1}{2} \leq a < \frac{2}{3}$ で U は増加、$\frac{2}{3} < a \leq 1$ で U は減少しますので U は$\underline{a = \frac{2}{3}}$のときに最大値をとることがわかります。

ハ〜フ $a = \frac{2}{3}$ のときの値を計算すると

$$\begin{aligned}
U &= -5 \cdot \frac{8}{27} + 8 \cdot \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\
&= -5 \cdot \frac{8}{27} + 8 \cdot \frac{12}{27} - 4 \cdot \frac{18}{27} + \frac{18}{27} = \underline{\frac{2}{27}}
\end{aligned}$$

となることがわかります。

第３問

(1)　ア　①の式に $n=1$ を代入すると $a_2 = \dfrac{4}{2}\cdot(3a_1+3^2-2\cdot 3) = \underline{6}$ がわかります。

(2)　イ　b_n の式に $n=1$ を代入すると $b_1 = \dfrac{a_1}{3\cdot 2\cdot 3} = \underline{0}$ がわかります。

ウ〜カ　①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると左辺は $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}\{(n+1)+1\}\{(n+1)+2\}} = b_{n+1}$ となります。また右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{n+3}{3^{n+1}(n+1)(n+2)(n+3)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\} \\ = \ & \frac{1}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\} \\ = \ & \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3^{n+1}} \\ = \ & \underline{b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} \end{aligned}$$

となります。

キ　$\dfrac{k}{n+1} - \dfrac{k}{n+2} = \dfrac{k(n+2)-k(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{k}{(n+1)(n+2)}$ となることから

$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ が得られますので

$b_{n+1} - b_n = \underline{\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ となります。

ク〜コ　$n \geq 2$ であれば

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{2(n+1)} \\ &= \frac{n-1}{2(n+1)} = \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} \end{aligned}$$

となります。

サ〜セ　$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k+1}$ は初項 $\dfrac{1}{9}$、公比 $\dfrac{1}{3}$、項数 $n-1$ の等比数列の和ですので $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} &= \frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \underline{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}} \end{aligned}$$

となります。

ソ〜チ　階差数列の和の公式から

$$\begin{aligned}
b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}=\frac{3(n-1)-(n+1)}{6(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\\
&= \frac{2n-4}{6(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\underline{\frac{n-2}{3(n+1)}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}
\end{aligned}$$

が導かれ、これは $n=1$ のときも成立することがわかります。

(3)

ツ〜ヌ　b_n の式から

$$\begin{aligned}
a_n &= b_n\cdot 3^n(n+1)(n+2)\\
&= 3^n(n+1)(n+2)\cdot\left\{\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}\\
&= 3^{n-1}(n+2)(n-2)+\frac{1}{2}\cdot 3^n\cdot 3^{-n}\cdot(n+1)(n+2)\\
&= \underline{3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}}
\end{aligned}$$

がわかります。$(n+1)(n+2)$ の一方は偶数となることから $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ は整数になることがわかります。

(4)

ネ〜ハ　$n\geq 2$ のとき $3^{n-1}=3\cdot 3^{n-2}$ より 3^{n-1} は 3 の倍数となります。
したがって $n\geq 2$ ならば a_n を 3 で割った余りは $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ を 3 で割った余りに等しいです。
$n=3k$ のとき $\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}=\frac{9k(k+1)}{2}+1$ です。
また $n=3k+1$ のときは $n+2$ が、$n=3k+2$ のときは $n+1$ が 3 で割り切れます。
これより、$k\geq 1$ のとき a_{3k},a_{3k+1},a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ$\underline{1,0,0}$となります。

ヒ　a_1,a_2 も 3 で割った余りが 0 になりますから初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは $a_3,a_6,\cdots,a_{2019}$ の和を 3 で割った余りに等しいです。これらを 3 で割った余りはすべて 1 ですので、$2019=3\cdot 673$ から 673 を 3 で割った余りに等しくなります。
したがって $673=3\cdot 224+1$ より求める値は$\underline{1}$となります。

第４問

(1)

ア, イ　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{3^2+3^2+(-6)^2} = 3\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \underline{3\sqrt{6}}$ と計算できます。

ウ, エ　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \sqrt{(2+2\sqrt{3})^2+(2-2\sqrt{3})^2+(-4)^2}$
$= \sqrt{(16+8\sqrt{3})+(16-8\sqrt{3})+16} = \sqrt{48} = \underline{4\sqrt{3}}$ と計算できます。

オカ　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3\cdot(2+2\sqrt{3})+3\cdot(2-2\sqrt{3})+(-6)\cdot(-4)$
$= 3\cdot(2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3})+24 = 3\cdot 4+24 = \underline{36}$ がわかります。

(2)

キ〜コ　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の設定から内積を利用して
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + t\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})$
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}) + t\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$ がわかります。
①より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ がわかりますので値を代入すると
$0 = 54s+36t, 24 = 36s+48t$ がわかり、整理すると $3s+2t = 0, 3s+4t = 2$ がわかります。
これを解くと$\underline{s = -\frac{2}{3}, t = 1}$がわかります。

サ, シ　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-2,-2,4)+(2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, -4)$
$= \underline{(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0)}$ と求められますので
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2+0^2} = \sqrt{24} = \underline{2\sqrt{6}}$ と計算できます。

(3)

ス〜タ　$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ですので
$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \underline{(2,2,-4)}$ と計算できます。

チ　$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \pm\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となることから､辺 CB は辺 OA と平行ですが長さは等しくないことがわかります。ということで四角形 OABC は $\underline{{}_2\text{平行四辺形ではないが台形である}}$ といえます。

ツテ　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であることから辺 OA と BC を上底下底とすると辺 OC の長さが高さに等しいことがわかります。したがって四角形 OABC の面積は
$\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|\right)\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left(3\sqrt{6}+\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{6}\right)\cdot 2\sqrt{6}$
$= 5\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} = \underline{30}$ と計算できます。

(4)

ト〜ノ　D の座標を $(x,y,1)$ とおきます。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6}$ ですので

$3x+3y-6=0, 2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y=2\sqrt{6}$ がわかります。

整理すると $x+y=2, x-y=\sqrt{2}$ ですので $x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

です。したがって D の座標は $\underline{\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)}$ となります。

ハヒ　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|=\sqrt{\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)+\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)+1}=2$ と計算できますので内積の定義式から

$\cos\angle\mathrm{COD}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$ と計算できます。したがって $\angle\mathrm{COD}=\underline{60^\circ}$ がわかります。

フ　三角形 ABC を底面としたとき四面体 DABC の高さは D から α におろした垂線の長さになります。いま α と β が垂直なのでその垂線は β 上にくることになります。

α と β の共通部分は直線 OC ですので四面体 DABC の高さは D から直線 OC におろした垂線の高さです。

したがって三角形 OCD で考えることで高さは

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|\cdot\sin\angle\mathrm{COD}=2\sin 60^\circ=\underline{\sqrt{3}}$ と求められます。

ヘホ　三角形 ABC は台形 OABC の一部であることから BC を底辺と考えると高さは OC の長さです。ということで底面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ で計算できます。

したがって四面体 DABC の体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{3}=\underline{4\sqrt{3}}$ と求められます。

第５問

(1)

ア, イ　X の値としてありうるものは 0,1,2,3 ですので
$E(X) = \dfrac{0\cdot 612 + 1\cdot 54 + 2\cdot 36 + 3\cdot 18}{720} = \dfrac{180}{720} = \dfrac{1}{\underline{4}}$ です。

ウ, エ　同様に計算すると
$E(X^2) = \dfrac{0\cdot 612 + 1^2\cdot 54 + 2^2\cdot 36 + 3^2\cdot 18}{720} = \dfrac{360}{720} = \dfrac{1}{\underline{2}}$ となります。

オ, カ　分散は $E(X^2) - \{E(X)\}^2$ で計算できますので標準偏差は
$\sqrt{\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{7}{16}} = \underline{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$ となります。

(2)

キ〜ケ　Y は二項分布 $B(600, p)$ に従いますので
$E(Y) = 600\cdot p = 600\cdot 0.4 = \underline{240}$ となります。

コサ　二項分布に従う場合分散は $600\cdot p\cdot(1-p)$ となりますので標準偏差は $\sqrt{600\cdot 0.4\cdot 0.6} = \sqrt{144} = \underline{12}$ となります。

シス　$Y \leq 215$ を Z の式で表すことを考えます。$Z = \dfrac{Y-240}{12}$ ですので $Y = 12Z + 240$ です。
すなわち $12Z + 240 \leq 215$ より $Z \leq -\dfrac{25}{12}$ となります。
いま Z は標準正規分布に従うと仮定していますので求める確率は
$P\left(Z \leq -\dfrac{25}{12}\right) = 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{25}{12}\right)$ で計算できます。
$2.08 < \dfrac{25}{12} < 2.09$ ですので求める確率 q は
$0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.09) < q < 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.08)$ をみたします。両辺の値を正規分布表から計算すると
$0.0183 < q < 0.0188$ がわかりますので、q は小数第 3 位を四捨五入すると$\underline{0.02}$と求められます。

セ　$p = 0.2$ のとき、Y の平均は p が $\dfrac{0.2}{0.4} = \dfrac{1}{2}$ 倍となることから$\dfrac{1}{\underline{2}}$倍となることがわかります。

ソ　$p = 0.2$ のとき、Y の標準偏差は $\sqrt{\dfrac{600\cdot 0.2\cdot 0.8}{600\cdot 0.4\cdot 0.6}} = \sqrt{\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$
$= \underline{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ 倍となることがわかります。

(3)

タチ　$E(U_i) = E(W_i) - 60$ ですので $U_1, \cdots, U_n$ の平均は $E(W_i) - 60 = \underline{m - 60}$ となります。

ツテ　$\sigma(U_i) = \sigma(W_i)$ ですので母標準偏差から $\sigma(U_i) = \underline{30}$ となります。

ト〜ノ　得られた標本平均は標準偏差 $\dfrac{30}{\sqrt{100}} = 3$ の正規分布から推定できます。

信頼度 95%の幅は $P(0 \leq Z \leq z) = 0.475$ となる z から計算できます。この z は正規分布表から 1.96 となりますので信頼区間は $50 - 1.96 \cdot 3 \leq t \leq 50 + 1.96 \cdot 3$ となります。

計算すると $44.12 \leq t \leq 55.88$ となりますので小数第 2 位を四捨五入して $\underline{44.1 \leq t \leq 55.9}$ と求められます。

所感

計算が多く圧倒されました。選択問題で 5 番を選んでいなかったら時間切れも十分に考えられます。

第 1 問

[**1**]

三角関数に関する問題です。加法定理や解と係数の関係を絡めていますが難しくはないでしょう。
最後の評価は $\sin\theta \geq \cos\theta$ より $\dfrac{\pi}{4}(45^\circ)$ より大きい、ということは理解したい。

[**2**]

指数対数関数における問題です。少し手の込んだ式変形をするので時間がかかってしまうでしょう。
最大値の評価も意外に難しそうです。

第 2 問

微積分に関する問題です。全体的にかなり面倒な計算が待っています。
幸い C, D はそれぞれ $y = (x+1)^2, y = (x-2a+1)^2 + 4a$ とでき l が不変ですのでそれを利用した近道が使えるかもしれません。
ただ最後の値 U は直感的でない面積が出ますのでてこずります。

第 3 問

数列の問題です。累乗や部分分数分解がからみ、かなり面倒な計算を一貫してやることになります。
(4) は比較的解きやすいので取り掛かれる気力を残したいところです。

第 4 問

空間ベクトルを利用した問題です。少々面倒な成分がありますのでこちらも結構面倒です。
大きな値が出まくるのも難しく感じる要因でしょう。

第５問

　統計に関する問題です。こちらは例年より分量が少ないように感じます。ただ、(2) の割合計算ではきりのいい計算結果が出ませんのでそこの思考だけが山となったことでしょう。