解答

第１問		
解答欄	正解	配点
ア, イ, ウ	**6,2,9**	**2**
エ	**0**	**1**
オ, カ	**3,4**	**2**
キク, ケ	**-4,3**	**2**
コ	**5**	**2**
サ, シ, ス	**2,6,8**	**4**
セ, ソ	**1,3**	**2**
タ	**1**	**1**
チ	**2**	**1**
ツ	**7**	**1**
テ, ト	**3,1**	**2**
ナ	**2**	**2**
ニ	**0**	**2**
ヌ	**0**	**1**
ネ	**4**	**2**
ノ	**3**	**1**
ハヒ	**11**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	**0**	**1**
イウ	**-3**	**2**
エ, オ, カ	**3,3,2**	**3**
キ	**0**	**2**
クケ	**-3**	**1**
コサ	**-1**	**2**
シ	**1**	**1**
ス	**3**	**1**
セ	**1**	**2**
ソ, タ	**1,3**	**2**
チ, ツ, テ	**3,1,3**	**3**
ト	**2**	**1**
ナ, ニ, ヌ	**6,2,3**	**3**
ネ, ノ	**1,3**	**3**
ハ	**3**	**3**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**4,0**	**2**
ウ, エ, オ	**6,2,4** または **2,6,4**	**2**
カ, キ, ク	**6,2,4**	**2**
ケ, コ	**2,3**	**2**
サ, シ	**0,1**	**2**
ス, セ, ソ	**4,2,1**	**2**
タ	**1**	**1**
チ	**3**	**1**
ツ, テ	**1,4**	**1**
ト, ナ	**3,4**	**1**
ニヌ	**90**	**2**
ネノ	**30**	**2**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア	**1**	**1**
イ, ウ	**1,2**	**2**
エオ	**-1**	**1**
カ	**7**	**1**
キ, ク	**4,3**	**2**
ケ	**2**	**1**
コサ	**-7**	**1**
シス	**16**	**1**
セソ	**17**	**3**
タ, チツ	**1,15**	**2**
テ, トナ	**2,12**	**3**
ニヌネノ	**-158**	**2**

解説

第 1 問

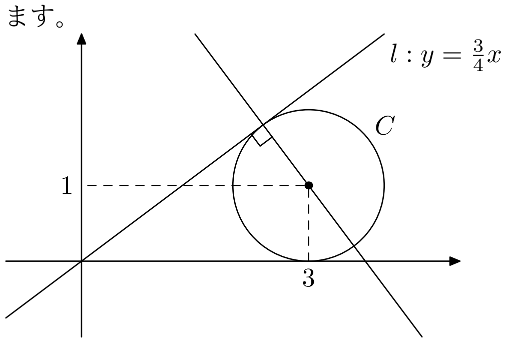
[**1**]

(1)

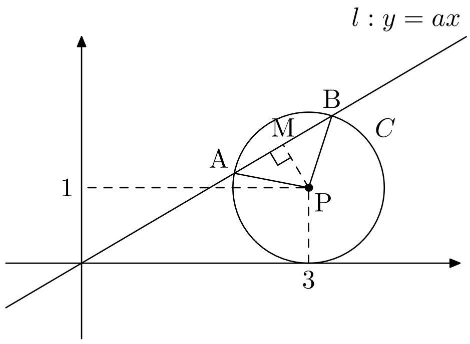
ア〜ウ　C は中心が (3,1)、半径が 1 ですので方程式は $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ と表されます。
これを展開して整理すると $\underline{x^2+y^2-6x-2y+9=0}$ となります。

(2)

エ〜カ　C と l が接する場合は C の中心と l との距離が C の半径に等しくなる場合です。l を $ax-y=0$ と変形するとこの関係から
$\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$ をみたす場合だとわかります。
2 乗して整理すると $9a^2-6a+1=a^2+1$ より $8a^2-6a=0$ です。
$8a^2-6a=2a(4a-3)$ より l が接するのは $\underline{a=0,\dfrac{3}{4}}$ のときとなります。



キ〜コ　C と l が接するとき、その接点を通り l に垂直な直線は C の中心を通ります。またその傾きを b とすると $ab=-1$ が成り立ちます。
いま $a=\dfrac{3}{4}$ としていますので $b=-\dfrac{4}{3}$ でありこの方程式は
$y=-\dfrac{4}{3}(x-3)+1$ と表せます。これを整理すると $\underline{y=-\dfrac{4}{3}x+5}$ となります。



(3)

サ〜ス　C の中心を P として、P から l に垂線を引きます。その足を M とすると $\mathrm{AM}^2 + \mathrm{PM}^2 = \mathrm{AP}^2, \mathrm{AM} = \mathrm{BM}$ が成り立ちますので
$\mathrm{AB} = 2\sqrt{\mathrm{AP}^2 - \mathrm{PM}^2}$ で求められます。
AP は C の半径、PM は P と l との距離ですので
$\mathrm{AB} = 2\sqrt{1 - \dfrac{(3a-1)^2}{a^2+1}} = \underline{2\sqrt{\dfrac{6a-8a^2}{a^2+1}}}$ と求められます。

セ, ソ　AB の長さが 2 となるということは線分 AB が円の直径になる、ということですから l が P を通ることになります。すなわち $1 = 3a$ が成立しますので $\underline{a = \dfrac{1}{3}}$ のときとわかります。

[2]

(1)

タ, チ　$2^0 = 1, 2^1 = 2$ なので$\underline{\log_2 1 = 0, \log_2 2 = 1}$です。

ツ　$2^6 = 64, 2^7 = 128$ ですので x が 100 以下の正の整数で $\log_2 x$ が整数になるものは $x = 2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^6$ の$\underline{7\text{ 個}}$となります。

(2)

テ, ト　$54 = 3^3 \cdot 2$ ですので $\log_2 54 = 3\log_2 3 + \log_2 2 = \underline{3r + 1}$ です。

ナ　$\dfrac{r+3}{2} = \dfrac{1}{2}(\log_2 3 + 3\log_2 2) = \dfrac{1}{2}\log_2 24 = \log_2 \sqrt{24}$ です。
$5 = \sqrt{25}$ であり底が 1 より大きいですので $\log_2 \sqrt{25} > \log_2 \sqrt{24}$
すなわち$\underline{2{:}\log_2 5 > \dfrac{r+3}{2}}$がわかります。

ニ　$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{3}}}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \log_2 \sqrt{3}$ です。
$\sqrt{3} < 3$ ですので $\log_2 \sqrt{3} < \log_2 3$ がわかり、したがって
$\underline{0{:}\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{3}} < r}$がわかります。

(3)　ヌ　いま k は 3 以上ですので $2 < k = k^1$ がわかります。
また $k^0 = 1 < 2$ ですので $0 \leq \log_k 2 < 1$ です。すなわち
$n \leq \log_k 2 < n + 1$ をみたす整数 n は$\underline{0}$とわかります。

ネ　$\dfrac{m}{10} \leq \log_k 2$ を変形すると $m\log_k k \leq 10\log_k 2$ となりさらに $\log_k k^m \leq \log_k 2^{10}$ とできます。
底が 1 より大きいですので真数を比較して$\underline{4{:}k^m \leq 2^{10}}$とできます。

ノ　同様に $\dfrac{m+1}{10} > \log_k 2$ は $k^{m+1} > 2^{10}$ とできますので
$k^m \leq 2^{10} < k^{m+1}$ となる整数 m を探すことで $\log_k 2$ の小数第一位が求められます。
$k = 7$ のとき $7^3 = 343, 7^4 = 2401$ であり $2^{10} = 1024$ ですので
$7^3 \leq 2^{10} < 7^4$ がわかります。
これは $0.3 \leq \log_7 2 < 0.4$ と言い換えられますので $\log_7 2$ の小数第一位は$\underline{3}$と求められます。

ハヒ　また $10^3 \leq 2^{10}$ ですが $11^2 = 121, 11^3 = 1331$ より $11^2 \leq 2^{10} < 11^3$ ですので $\log_k 2 = 0.2\cdots$ となる最小の k は$\underline{11}$とわかります。

第２問

(1)　ア　$f(x)$ は $x=1$ で極値をとりますので$\underline{f'(1)=0}$がわかります。

イウ　$f'(x)=3px^2+q$ ですので $x=1$ を代入して $3p+q=0$ となり、すなわち$\underline{q=-3p}$がわかります。

エ〜カ　点 $(s,f(s))$ における C の接線の式は $y=f'(s)(x-s)+f(s)$ となります。
展開して $y=(3ps^2-3p)(x-s)+ps^3-3ps$ となり、
整理して$\underline{y=(3ps^2-3p)x-2ps^3}$となります。

キ〜ケ　接線の傾きは $3ps^2-3p$ ですから$\underline{s=0}$のときに最小値$\underline{-3p}$をとります。

(2)

コ〜ス　C と直線 $y=-x$ の共有点の x 座標においては $px^3+qx=-x$ が成り立ちます。
式をまとめると $px^3+(1-3p)x=0$ となり、これはさらに $x(px^2+1-3p)=0$ と変形できます。
ということは $1-3p<0$ のときは $x=0,\pm\sqrt{3p-1}$ で共有点をもち、$1-3p\geq 0$ のときは $x=0$ でのみ共有点をもちます。
すなわち$\underline{-3p\geq -1}$のときに共有点は$\underline{1}$個、$-3p<-1$ のときに$\underline{3}$個もつことになります。

セ〜タ　C と l との共有点の個数は方程式 $px^3+(1-3p)x=r$ の解の個数です。左辺を $g(x)$ とおくと $g'(x)=3px^2+(1-3p)$ です。
この値が負になることがある場合 $g(x)$ は極値をもちますので r の値によっては共有点が 3 個になります。
逆に $1-3p\geq 0$ のとき $g'(x)$ はつねに 0 以上ですので $g(x)$ は単調増加となります。
すなわち$\underline{0<p\leq\frac{1}{3}}$のときは r によらず共有点は$\underline{1}$個となります。

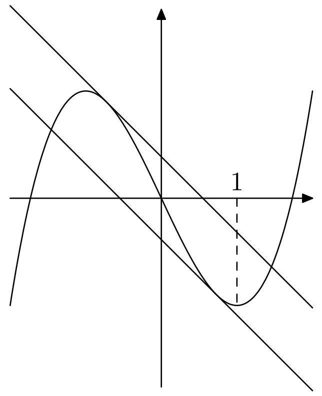
(3)

チ〜テ　C の接線の傾きが-1 になるときはすなわち $f'(s)=-1$ が成り立つときです。
すなわち $3ps^2-3p=-1$ より $s^2=\dfrac{3p-1}{3p}$ がわかります。いま $p>\dfrac{1}{3}$ としていますので$\underline{s=\pm\sqrt{\dfrac{3p-1}{3p}}}$のときに $f'(s)=-1$ になることがわかります。

ト　l がどちらかに一致するとき l は C の接線となりますので C と l との共有点は$\underline{2}$個となります。

ナ〜ヌ　接線の傾きが-1 に一致するときその式は $y=-x\pm\dfrac{6p-2}{3}\sqrt{\dfrac{3p-1}{3p}}$ となりますので l が 3 個の共有点をもつ場合は $|r|<\dfrac{6p-2}{3}\sqrt{\dfrac{3p-1}{3p}}$ であるとわかります。

C に接した状態の l



(4)

ネ, ノ　曲線 $y=x^2-1$ と $x=u, x=t(t>u, u\geq 1)$ で囲まれた図形の面積は $\int_u^t(x^2-1)dx$ と表されます。積分計算すると $\dfrac{1}{3}t^3-t-\left(\dfrac{1}{3}u^3-u\right)$ となります。これがつねに $f(t)=pt^3-3pt$ と等しいとき、係数比較により $p=\dfrac{1}{3}$ がわかります。

ハ　さらに定数項を比較することで $\dfrac{1}{3}u^3-u=0$ がわかります。$\dfrac{1}{3}u^3-u=\dfrac{1}{3}u(u^2-3)$ なので $\dfrac{1}{3}u^3-u=0$ をみたすものは $u=0,\pm\sqrt{3}$ であり、いま $u\geq 1$ で考えていますので $u=\sqrt{3}$ であるとわかります。

第３問

[1]

ア, イ　15=45-30 として加法定理を用いると
$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \underline{4 : \cos 45^\circ} \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \underline{0 : \sin 30^\circ}$ がわかります。

ウ〜オ　$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ですので
$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ となります。

カ〜ク　加法定理により $\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$ となります。
値を代入して $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ とわかります。

ケ, コ　$\cos 15^\circ, \sin 15^\circ$ が求められましたので $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ で計算できます。
すなわち $\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ です。
$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ですので
$\tan 15^\circ = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = \underline{2-\sqrt{3}}$ がわかります。

[2]

サ, シ　$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ であるとき $0 \leq \sin\theta \leq 1$ ですので$\underline{0 \leq x \leq 1}$がわかります。

ス〜ソ　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - x$ ですので
$y = 3x^2 + (1-x)^2 = \underline{4x^2 - 2x + 1}$ となります。

タ〜ナ　$y = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}$ とできます。また $x = 0$ のとき $y = 1$、$x = 1$ のとき $y = 3$ ですので
$\underline{x = 1}$のとき最大値$\underline{3}$、$\underline{x = \frac{1}{4}}$のとき最小値$\underline{\frac{3}{4}}$をとることがわかります。

ニ〜ノ　最大値は $x = 1$ のときとりますのでこのとき $\sin\theta = 1$ より$\underline{\theta = 90^\circ}$のときです。
また最小値は $x = \frac{1}{4}$ のとき、すなわち $\sin\theta = \frac{1}{2}$ のときですので$\underline{\theta = 30^\circ}$のときです。

第4問

(1) ア $P(x)$ を k の式として考えると $P(x)=(x^3+x+2)+(x^2+2x+1)k$ とできます。

$x^2+2x+1=(x+1)^2$ であり、$x^3+x+2=0$ は実際に $x=-1$ を解としてもちますので k の値に関係なく$\underline{P(-1)=0}$が成り立つことがわかります。

イ, ウ $x^3+x+2=(x+1)(x^2-x+2)$ ですので
$P(x)=(x+1)\underline{\{x^2+(k-1)x+k+2\}}$ とできます。

エ〜カ 実数解は $x=-1$ とわかっていますので残りは異なる虚数解ということになり、すなわち $Q(x)=0$ は異なる2つの虚数解をもつことになります。この条件は判別式の値が負ということですのですなわち $(k-1)^2-4(k+2)<0$ です。
判別式を計算すると $k^2-6x-7=(k+1)(k-7)$ となりますので求める範囲は$\underline{-1<k<7}$となります。

キ, ク 解と係数の関係により $\alpha+\beta=1-k, \alpha\beta=k+2$ ですので
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(1-k)^2-2(k+2)=\underline{k^2-4k-3}$ です。

ケ〜サ 平方完成すると $\alpha^2+\beta^2=(k-2)^2-7$ となりますのでこの値は$\underline{k=2}$のときに最小値$\underline{-7}$をとることがわかります。

シ〜ソ $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=4$ ですので $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\underline{16}$,
$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(-7)^2-2\cdot16=\underline{17}$ となります。

(2)

タ〜ツ $k=2$ のとき $Q(x)=x^2+x+4$ となりますので $P(x)=0$ の虚数解は $\dfrac{-1\pm\sqrt{4\cdot4-1^2}i}{2}=\underline{\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}}$ となります。

テ〜ナ 二項定理により
$X^4=\sum_{k=0}^{4} {}_4\mathrm{C}_k\alpha^k(\beta i)^{4-k}=\alpha^4+4\alpha^3\beta i-6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3 i+\beta^4$
であり、同様に考えて $Y^4=\alpha^4-4\alpha^3\beta i-6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3 i+\beta^4$ です。
したがって $X^4+Y^4=\underline{2(\alpha^4+\beta^4)-12\alpha^2\beta^2}$ となります。

ニ〜ノ (1) で $\alpha^2\beta^2=16, \alpha^4+\beta^4=17$ を代入すると
$X^4+Y^4=2\cdot17-12\cdot16=\underline{-158}$ がわかります。

所感

第１問

[1]

円と直線の問題です。基本的ですが気づけば速く解ける問題がいくつかあります。
(2) で直線の方程式を求めるときに接点の座標を計算する、という方法もありますが幾何的性質に気付くとこの解答のようにできます。
また、(3) で AB=2 のときの値はもちろん直前の式から $2 = 2\sqrt{\dfrac{6a-8a^2}{a^2+1}}$ を解く、という方法もあります。

[2]

指数と対数の問題です。
(1)(2) は地道にやれば大丈夫でしょう。
(3) は人によっては慣れない計算だと思います。問題文を手掛かりにうまい展開を考えましょう。

第２問

多項式の微積分に関する問題です。
(1) は基本的ですので落としたくないです。
(2) は場合分けに関係する値と結果の値の両方が問われますので解き方によってはマーク順が前後してしまう面倒な設問です。
(3) はやり方は出しやすいと思いますが分数式になりますので計算間違いに気を付けましょう。
(4) は積分の問題で解きやすいですが (3) までではまると到達しづらいか。

第３問

三角関数に関する問題です。

[1]

こちらは加法定理の確認ができていればすべて解けると思います。$\tan 15^\circ$ はこの解答では相互関係から計算していますが加法定理を用いて
$\dfrac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$ を計算しても構いません。

[**2**]

　こちらは三角関数の問題です。いきなり 4 乗がでてきて面食らいますが問題文にそって 2 乗で考えましょう。
複雑な計算はいらないので解きやすいはずです。

第 4 問

　複素数と多項式展開に関する問題です。
(1) は基本的な問題です。最後も落ち着いて「α^2 と β^2 の基本対称式である」ととらえましょう。
(2) は計算するだけですが項数や桁数が多いので残り時間が気になりそうです。