解答

第１問		
解答欄	正解	配点
アイ, ウ	**-2,3**	**2**
エ, オ, カ, キ	**2,3,2,6** または **2,6,2,3**	**2**
ク	**6**	**2**
ケ	**6**	**2**
コ, サ, シ	**6,2,3**	**2**
ス, セ, ソ, タ, チ, ツ	**6,3,2,3,6,2**	**3**
テ	**3**	**2**
ト	**5**	**2**
ナ	**2**	**2**
ニ	**4**	**2**
ヌ	**0**	**2**
ネ	**1**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	**-**	**3**
イ	**6**	**3**
ウ	**2**	**3**
エ	**3**	**3**
オ	**4**	**3**
カ, キ	**4,3**	**2**
ク	**2**	**2**
ケ, コ	**1,3**	**2**
サ	**0**	**2**
シ	**3**	**2**

第３問		
解答欄	正解	配点
アイ	**12**	**3**
ウ, エ	**2,3**	**3**
オ	**8**	**3**
カキ	**12**	**3**
ク, ケコ	**2,17**	**3**
サ, シ, ス	**9,2,2**	**3**
セ, ソ	**7,2**	**3**
タ, チ	**3,2**	**3**
ツテ, ト	**46,2**	**3**
ナニ, ヌネ	**23,27**	**3**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**1,2**	**2**
ウ	**3**	**3**
エ	**2**	**3**
オ	**0**	**3**
カ	**3**	**3**
キ	**0**	**2**
ク	**6**	**2**
ケ	**7**	**2**

解説

第 1 問

[1]

(1)

ア〜ウ　$f(0) = -\sqrt{3}a$ ですので $f(0) \leq 6$ のとき $-\sqrt{3}a \leq 6$ です。
不等号の向きに注意して $a \geq -\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ すなわち $\underline{a \geq -2\sqrt{3}}$ となります。

エ〜キ　また、$f(6) = 6 + 6\sqrt{2} - \sqrt{3}a$ ですので
$f(6) \geq 0$ のとき $6 + 6\sqrt{2} - \sqrt{3}a \geq 0$ です。
これより $a \leq \dfrac{6 + 6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ すなわち $\underline{a \leq 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}$ がわかります。

(2)　ク　数直線において実数 a に対応する点を A、実数 b に対応する点を B とすると線分 AB の中点に対応する実数は $\dfrac{a+b}{2}$ と表されます。
これを利用すると線分 PQ の中点に対応する実数は
$\dfrac{(-2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 2\sqrt{6})}{2} = \underline{\sqrt{6}}$ であるとわかります。

(3)

ケ〜シ　$f(0) \leq 6, f(6) \geq 0$ の両方が成り立つ範囲は
$-2\sqrt{3} \leq a \leq 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ とわかりました。この r は数直線上では線分 PQ の範囲にあるといえます。さて、線分 PQ の範囲にあるということは PQ の中点との距離が PQ の長さの半分以下である、と言い換えられます。
線分 PQ の長さは $(2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) - (-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ ですので a の範囲は
$\underline{|a - \sqrt{6}| \leq \sqrt{6} + 2\sqrt{3}}$ と書き換えられます。

(4)

ス〜ツ　方程式 $f(s) = 6 - s$ を整理すると $(2 + \sqrt{2})s - 6 - \sqrt{3}a = 0$ となります。ここから $s = \dfrac{6 - \sqrt{3}a}{2 + \sqrt{2}}$ とできます。
$\dfrac{1}{2 + \sqrt{2}} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2^2 - 2} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と計算できますので
$s = 6 \cdot \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) a = \underline{6 - 3\sqrt{2} + \left(\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) a}$
となります。

テ　$a = \sqrt{6}$ のときは $s = 6 - 3\sqrt{2} + \sqrt{18} - \dfrac{6}{2} = 6 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3 = \underline{3}$
となります。

[2]

(1) ト 命題「$p \Rightarrow q$」の逆は「$q \Rightarrow p$」となりますので
$\underline{5{:}(n > 2 \text{ かつ } n < c) \Rightarrow n^2 - 8n + 15 = 0}$となります。

ナ 命題「$p \Rightarrow q$」の対偶は「$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$」です。それぞれの否定をとることになりますので
$\underline{2{:}(n \leq 2 \text{ または } n \geq c) \Rightarrow n^2 - 8n + 15 \neq 0}$となります。

(2) ニ $c \geq 5$ であるとき、$\underline{n = 4}$を考えると $n > 2, n < c$ がいずれも成立することから q は成立しますが $n^2 - 8n + 15 = -1 \neq 0$ なので p が成立しません。したがってこれは「$q \Rightarrow p$」の反例であるといえます。

(3) ヌ 条件 p をわかりやすく直してみます。$n^2 - 8n + 15 = (n-3)(n-5)$ ですので $n^2 - 8n + 15 = 0$ の解は $n = 3, 5$ となります。
したがって条件 p は「$n = 3$ または $n = 5$」となります。
問題文の選択肢のうち、どれを選んでも $n = 3$ は条件 q をみたします。
選択肢 1,2,3 は $n = 5$ が条件 q をみたしますが選択肢 0 は $n = 5$ のとき条件 q をみたしません。
したがって$\underline{0{:}c = 4}$のときに p は q の十分条件でなくなることがわかります。

(4) ネ q の条件は $n > 2$ であり、さらに $n < c$ であることでした。$n > 2$ ということは集合 A に属すると言い換えられます。また、$\overline{B} = \{k | k < c\}$ となりますので q をみたす n は $A, \overline{B}$ の両方に属することがわかります。したがって q と同値な条件は$\underline{1{:}n \in A \cap \overline{B}}$とわかります。

第２問

[1]

(1)

ア, イ　$f(x)$ を平方完成すると $f(x) = (x-c)^2 + 6 - c - c^2$ となりますので $y = f(x)$ のグラフの頂点は$\underline{(c, -c^2 - c + 6)}$となります。

ウ　$f(1) = 7 - 3c, f(3) = 15 - 7c$ ですので $f(1) \leq f(3)$ のとき $7 - 3c \leq 15 - 7c$ より$\underline{c \leq 2}$がわかります。

(2)

エ, オ　$f(x)$ の x^2 の係数が正なので $f(x)$ の $1 \leq x \leq 3$ における最大値は $f(1)$ または $f(3)$ であることがわかります。(1) の結果より $c \leq 2$ のとき $M = f(3)$、$c > 2$ のとき $M = f(1)$ です。
$c \leq 2$ の範囲で考えると $-5 < 15 - 7c < 36$ より $-3 < c < \dfrac{20}{7}$ となり、$c \leq 2$ と合わせて $-3 < c \leq 2$ が得られます。
$c > 2$ の範囲で考えると $-5 < 7 - 3c < 36$ より $-\dfrac{29}{3} < c < 4$ となりますので合わせて $2 < c < 4$ となります。
したがって両方から$\underline{-3 < c < 4}$が得られます。

[**2**]

(1)

カ, キ　①は $b \neq 0$ であることから二次方程式であることが保証されます。これが異なる 2 つの実数解をもつ場合①の判別式が正の値になりますから条件は $(2a-b)^2 - b(b-4a+3) > 0$ となります。
左辺を計算することで $4a^2 - 3b > 0$ となりますので、求める条件は $\underline{b < \frac{4}{3}a}$ とわかります。

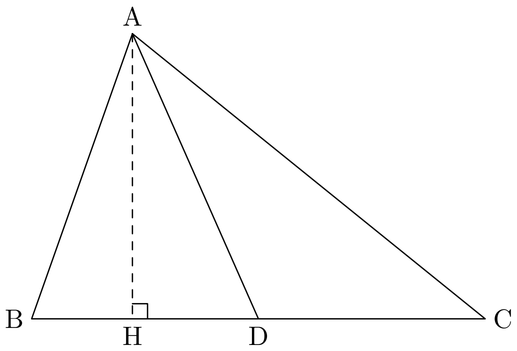
ク　このときの解は $\dfrac{-(2a-b) \pm \sqrt{(2a-b)^2 - b(b-4a+3)}}{b}$
より $\underline{\dfrac{b-2a \pm \sqrt{4a^2-3b}}{b}}$ となります。

(2) $b = a^2$ のとき $a^2 > 0$ より $a^2 < \dfrac{4}{3}a^2$ となりますから①は異なる 2 つの実数解をもつことがわかります。また $4a^2 - 3b = a^2$ となりますので解は $\dfrac{a^2-2a \pm |a|}{a^2}$ より $1-\dfrac{1}{a}, 1-\dfrac{3}{a}$ となります。

ケ, コ　$1-\dfrac{1}{a} < 0$ となる場合は $0 < a < 1$ の場合であり、$0 < 1-\dfrac{3}{a}$ となる場合は $a < 0$ または $3 < a$ です。したがって $1-\dfrac{1}{a} < 0 < 1-\dfrac{3}{a}$ となることはありません。
$1-\dfrac{3}{a} < 0 < 1-\dfrac{1}{a}$ となる場合は同様に分けて考えると $0 < a < 3$ かつ $(a < 0, 1 < a)$ ですので合わせて $1 < a < 3$ となります。
すなわち一方が正で他方が負となるような範囲は $\underline{1 < a < 3}$ です。

サ, シ　両方が正となる場合は $(a < 0, 1 < a)$ かつ $(a < 0, 3 < a)$ の場合ですので合わせると
$\underline{a < 0 \text{ または } 3 < a}$ の場合とわかります。

第３問



アイ　三角形 ABC の頂点 A から辺 BC に垂線をおろし、その足を H とします。

いま $\cos\angle\mathrm{ABC} > 0, \cos\angle\mathrm{ACB} > 0$ より H は線分 BC の内部にきます。

また

$\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}, \cos\angle\mathrm{CAB} = \dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AB}}$ が成り立ちますので

$\mathrm{AB}\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}+\mathrm{AC}\cdot\cos\angle\mathrm{ACB} = \mathrm{BH}+\mathrm{CH} = \mathrm{BC} = \underline{12}$ がわかります。

ウ, エ　正弦定理 $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$ を利用することを考えます。

相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ と $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ において $\sin\theta \geq 0$ であることから $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ で計算できます。

これより $\sin\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \sin\angle\mathrm{ACB} = \sqrt{1-\dfrac{49}{81}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

がわかり、これを利用すると

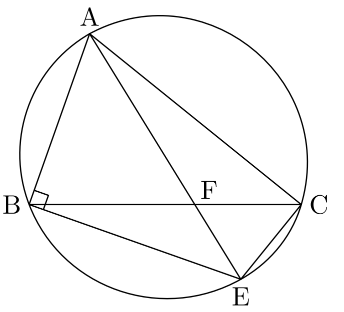
$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\sin\angle\mathrm{ACB}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}\cdot\dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\underline{3}}$ と求められます。

オ～キ　2 本の式から $\dfrac{1}{3}\cdot\mathrm{AB}+\dfrac{7}{9}\cdot\mathrm{AC} = 12, \mathrm{AB} = \dfrac{2}{3}\cdot\mathrm{AC}$ が導かれました。これを連立して解くことで$\underline{\mathrm{AB=8,AC=12}}$がわかります。

ク～コ　余弦定理を利用します。

$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\cos\angle\mathrm{ABD}$ でありこれまでの結果を代入すると $\mathrm{AD}^2 = 8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cdot\dfrac{1}{3} = 68$ がわかります。

$68 = 2^2\cdot 17$ ですので$\underline{\mathrm{AD}=2\sqrt{17}}$がわかります。



サ〜ス 三角形 ABC の外接円の半径を R とおいて正弦定理 $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = 2R$ を利用します。

$R = \dfrac{\mathrm{AB}}{2\cdot\sin\angle\mathrm{ACB}} = \dfrac{8}{2}\cdot\dfrac{9}{4\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{9\sqrt{2}}{2}}$ と計算できます。

セソ 直線 AB と BE は垂直に交わりますので三角形 ABE は B を直角とする三角形です。

また、E は三角形 ABC の外接円の周上にきますので線分 AE はこの円の直径となります。

また、円周角の定理と $\angle\mathrm{AEB} < 90^\circ$ であることから $\angle\mathrm{AEB} = \angle\mathrm{ACB}$ であることから $\mathrm{BE} = \mathrm{AE}\cdot\cos\angle\mathrm{AEB} = 2R\cdot\cos\angle\mathrm{ACB}$ が成り立ちます。

さらに計算して $\mathrm{BE} = 9\sqrt{2}\cdot\dfrac{7}{9} = \underline{7\sqrt{2}}$ がわかります。

タチ 四角形 ABEC が円に内接することから $\angle\mathrm{ACE} = 180^\circ - \angle\mathrm{ABE} = 90^\circ$ です。また円周角の定理から $\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{ABC}$ がわかるので

$\mathrm{CE} = \mathrm{AE}\cdot\cos\angle\mathrm{AEC} = 2R\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}$ が成り立ちます。

計算すると $\mathrm{CE} = 9\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{3} = \underline{3\sqrt{2}}$ がわかります。

ツ〜ト 四角形 ABEC は三角形 ABE と ACE に分けられます。こうすると両方とも直角三角形なので計算しやすいです。面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BE} + \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CE} = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 3\sqrt{2} = \underline{46\sqrt{2}}$ と求められます。

ナ〜ネ 四角形 ABEC を辺 BC と AE で分割して計算することを考えます。

三角形 AFB の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AF}\cdot\mathrm{BF}\cdot\sin\angle\mathrm{AFB}$ と表せます。

三角形 AFC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}\cdot\sin\angle\mathrm{AFC}$、

EFC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{EF}\cdot\mathrm{CF}\cdot\sin\angle\mathrm{EFC}$、

EFB の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{EF}\cdot\mathrm{BF}\cdot\sin\angle\mathrm{EFB}$ と表せます。

ここで $\angle\mathrm{EFB} = \angle\mathrm{AFC}, \angle\mathrm{AFB} = \angle\mathrm{EFC} = 180^\circ - \angle\mathrm{AFC}$ なので $\sin\angle\mathrm{EFB} = \sin\angle\mathrm{AFB} = \sin\angle\mathrm{EFC} = \sin\angle\mathrm{AFC}$ がわかります。

したがって四角形 ABEC の面積は

$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AF}\cdot \mathrm{BF}\cdot \sin\angle \mathrm{AFC}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AF}\cdot \mathrm{CF}\cdot \sin\angle \mathrm{AFC}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{EF}\cdot \mathrm{CF}\cdot \sin\angle \mathrm{AFC}+$
$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{EF}\cdot \mathrm{BF}\cdot \sin\angle \mathrm{AFC}$
$=\frac{\sin\angle \mathrm{AFC}}{2}(\mathrm{AF}\cdot \mathrm{BF}+\mathrm{AF}\cdot \mathrm{CF}+\mathrm{EF}\cdot \mathrm{CF}+\mathrm{EF}\cdot \mathrm{BF})$
$=\frac{\sin\angle \mathrm{AFC}}{2}(\mathrm{AF}+\mathrm{EF})(\mathrm{BF}+\mathrm{CF})=\frac{\sin\angle \mathrm{AFC}}{2}\cdot \mathrm{AE}\cdot \mathrm{BC}$
$=\frac{\sin\angle \mathrm{AFC}}{2}\cdot 9\sqrt{2}\cdot 12$ と表せます。
したがって $\sin\angle \mathrm{AFC}\cdot 54\sqrt{2}=46\sqrt{2}$ より $\underline{\sin\angle \mathrm{AFC}=\frac{23}{27}}$ がわかります。

第４問

(1)

ア, イ 単純に計算するだけです。$\dfrac{12.0}{9.9} = 1.21 + 0.01 \cdot \dfrac{2.1}{9.9}$ より
$1.21 < \dfrac{12.0}{9.9} < 1.22$ ですので小数第 2 位を四捨五入して<u>1.2</u>倍となります。

(2) ウ 全体で度数は 47 ですので中央値は 24 番目の値となります。
下位から調べていくと 36 未満が 1、40 未満が 1+7=8、44 未満が 1+7+16=24 となり、24 番目は 40 以上 44 未満の値となります。
したがって選択肢でその範囲にくるものは<u>3:43.4</u>となります。

(3) エ それぞれ検証します。

(Ⅰ) 1996 年から 2009 年まで、Y の中央値は増加傾向にあるといえます。また、たとえば 2007 年の Y は前年より小さくなっています。ということで**正しい**といえます。

(Ⅱ) Y の最大は 2011 年が最大で 1996 年が最小です。2011 年の最大値は 14 より大きく 1996 年の最大値は 12 より小さいので差は 2 より大きいです。ということで**誤り**といえます。

(Ⅲ) 1996 年は Y の中央値が 9 未満ですので 9 以下の都道府県は半分より多いです。また、2014 年の第 1 四分位は 9 より大きいですので 9 以下の都道府県は 4 分の 1 より少ないです。1996 年での値の $\dfrac{1}{2}$ は全体の $\dfrac{1}{4}$ より多いので 2014 年は 1996 年の値の $\dfrac{1}{2}$ 以下といえます。ということで**正しい**といえます。

したがって正しい組合せは<u>2:(Ⅰ) 正、(Ⅱ) 誤、(Ⅲ) 正</u>といえます。

(4) オ Y のヒストグラムとありますので横に区切って考えます。散布図の点を数えると $6 \leq Y < 7$ の範囲に 3 点、$7 \leq Y < 8$ の範囲に 8 点あり、最大は 13 以上 14 未満の範囲にあります。
これらを踏まえるとあてはまるヒストグラムは<u>0</u>番であるといえます。

(5) カ 相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで得られます。
標準偏差は分散の平方根ですのでその値は $\dfrac{1.75}{\sqrt{4.8} \cdot \sqrt{2.4}}$ を計算することになります。
$\dfrac{1.75}{\sqrt{4.8} \cdot \sqrt{2.4}} = \dfrac{1.75}{2.4 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1.75 \cdot \sqrt{2}}{4.8}$ であり、平方根の表から $\sqrt{2}$ を 1.414 と近似して計算すると相関係数は
$\dfrac{1.75 \cdot 1.414}{4.8} = \dfrac{2.4725}{4.8} = 0.515 + 0.001 \cdot \dfrac{0.5}{4.8}$ となりますので<u>3:0.52</u>が最も近いといえます。

キ, ク　(*) の関係式に値を代入すると $y-10.2=\frac{1.75}{4.8}(x-9.6)$ となります。これは $y=\frac{1.75}{4.8}x-\frac{1.75\cdot 9.6}{4.8}+10.2$ と書き換えられます。$\frac{1.75}{4.8}=0.36+0.01\cdot\frac{2.2}{4.8}$ であり $-\frac{1.75\cdot 9.6}{4.8}+10.2=6.7$ ですので (*) の関係式は $y=\underline{0:0.36}x+\underline{6:6.74}$ となります。

ケ　喫煙率 4%での調整済死亡率は $x=4$ のときの y の値ですので $y=0.36\cdot 4+6.74=\underline{7:8.18}$ と求められます。

所感

各大問に思考力を要するものが配置された、完成度の高い構成だと思います。

第 1 問

[1]

不等式に関する問題です。(1) は単純なので絶対に得点したいところ。
(2) の結果を (3) でどう活かすかで思考力が問われます。
(4) では分母の有理化をしますが公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を応用できるかどうかにかかっています。

[2]

集合と論理に関する問題です。
(1) は用語の意味を確認したり否定の作り方を押さえれば解けるでしょう。
(2),(3) は少しややこしい問われ方をしていますが落ち着いて反例を見つけ出しましょう。
(4) は式で表された条件を集合で言い換えることになります。集合を「特定の条件をみたす全体」ととらえていれば直感的に選べるはずです。

第 2 問

[1]

二次関数に関する問題です。比較的計算しやすい部類です。
(2) は (1) を利用した場合分けをしましょう。

[2]

二次方程式に関する問題です。
(2) ではここでは直接解を計算して解き進めていますが ($\sqrt{a^2}=|a|$ に注意)、解と係数の関係 (和が $\dfrac{2(a^2-2a)}{a^2}$、積が $\dfrac{a^2-4a+3}{a^2}$) を用いて係数の正負から解く方法も考えられます。分数になりますが分母が正の値なので解きやすいです。

第３問

　三角比を利用した問題です。
最初の関係式は図を軽く書き出して垂線 AH を思い浮かべたいところ。
ここでは AD を余弦定理で計算していますが中線定理
$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2)$ を利用する方法もあります。
外接円の半径を求めてから先が思考力を問われる範囲です。
三角形 ABE が直角三角形で AE が外接円の直径というところに気付かないと大変な計算をすることになります。
また、最後の三角比は三角形の面積計算を応用できることに気付かないと解けないでしょう。

第４問

　データの分析に関する問題です。
(1) は「調整済み死亡数」という慣れない用語で面食らいそうな文章になっていますが落ち着きましょう。
(2) は地道な計算が必要です。母数が 47 であることを問題文から気付けるようにしたい。
(3) は箱ひげ図の読み取りです。(III) は意味合いをしっかり押さえないと判断できない、思考力を問われる項目です。
(4) は問題文を正しく理解して地道に選択肢を選びましょう。
(5) は最小二乗法を利用した推定を題材としています。細かい計算が多いので余裕を持った時間を残しておきたい。