解答

第１問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**3,1**	**2**
ウ, エ	**4,1**	**2**
オカ, キ	**-2,3**	**2**
ク, ケ	**2,1**	**2**
コ, サ, シ	**7,3,7**	**3**
ス	**6**	**2**
セソ, タ	**-7,3**	**2**
チ	**0**	**2**
ツ	**2**	**2**
テ	**0**	**2**
ト	**2**	**2**
ナ	**3**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	**2**	**2**
イ, ウ	**4,1**	**2**
エ, オ, カ	**2,2,1**	**3**
キ, ク, ケ	**4,2,3**	**3**
コ	**2**	**3**
サ	**4**	**3**
シ, ス, セ	**7,4,3**	**3**
ソ, タ	**5,1**	**2**
チ, ツ	**3,2**	**2**
テト, ナ	**-1,4**	**2**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**1,3**	**3**
ウ, エ, オ	**3,2,2**	**3**
カキ	**90**	**1**
ク	**2**	**3**
ケコ, サ	**10,2**	**3**
シ	**1**	**3**
スセ, ソ	**10,2**	**3**
タ	**7**	**3**
チツ	**90**	**1**
テト	**90**	**3**
ナ, ニ	**5,4**	**4**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア	**3**	**3**
イ	**4**	**3**
ウ	**4**	**3**
エ, オ	**4,7**(順不同)	$\mathbf{2\times2}$
カ	**0**	**1**
キ	**0**	**1**
ク	**1**	**1**
ケ	**2**	**2**
コ	**3**	**2**

解説

第 1 問

[1]

まずは因数分解です。
$9a^2-6a+1=3^2\cdot a^2-2\cdot 3a+1$ に着目することで
$9a^2-6a+1=\underline{(3a-1)^2}$ と変形できます。
$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ を考えるとき、先の変形から
$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|$ となりますが、根号に 2 乗の形式がありますので符号に注意してさらに変形しましょう。すると
$A=|3a-1|+|a+2|$ とできます。あとは絶対値記号の中にある値の正負で分類することになります。
$3a-1$ は a と $\frac{1}{3}$ との大小で、$a+2$ は a と -2 との大小で正負が決定するので、これらで分けることになります。
まずは $a>\frac{1}{3}$ のときですが、このとき $3a-1>0, a+2>0$ ですので
$A=(3a-1)+(a+2)=\underline{4a+1}$ です。
次は $-2\leq a\leq\frac{1}{3}$ のときですが、このとき $3a-1\leq 0, a+2\geq 0$ ですので
$A=(1-3a)+(a+2)=\underline{-2a+3}$ となります。
のこりは $a<-2$ のときであり、このとき $3a-1<0, a+2<0$ ですので
$A=(1-3a)+(-2-a)=-4a-1$ となります。

(1) $a=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ の場合、$2\sqrt{2}=\sqrt{8}<3$ より $a>\frac{1}{3}$ ですので
$A=4a+1=\frac{4}{2\sqrt{2}}+1=\underline{\sqrt{2}+1}$ がわかります。

(2) $-2\leq a\leq\frac{1}{3}$ のとき、$A=-2a+3$ ですので a が大きくなるほど a が小さくなります。ということで A のとりうる値は
$-2\cdot\frac{1}{3}+3\leq A\leq -2\cdot(-2)+3$ を計算して $\underline{\frac{7}{3}\leq A\leq 7}$ がわかります。

(3) $A=2a+13$ のとき、a の範囲で場合分けしましょう。
$a>\frac{1}{3}$ である場合、$4a+1=2a+13$ となりますので $a=6$ が導かれ、これは条件に合うことがわかります。
$a<-2$ である場合、$-4a-1=2a+13$ となりますので $a=\frac{-7}{3}$ が導かれ、これは条件に合うことがわかります。
残りは $-2\leq a\leq\frac{1}{3}$ の場合ですが、$2a+13$ のとりうる値は $9\leq 2a+13\leq\frac{41}{3}$ ですから (2) より A のとりうる値と重ならず、すなわちこの範囲では解はないということがわかります。
ということで $A=2a+13$ となる値は $\underline{a=6,\frac{-7}{3}}$ となります。

[**2**]

(1) まずは条件 p「m, n はともに奇数である」の否定を考えます。m が奇数であるならば n が奇数だとともに奇数になってしまうので、条件 $\bar{p}$ をみたすとしたら m は0:偶数であるということになります。
また、m が偶数である場合、「m, n はともに奇数」という条件はすでに成立しないことが確定しましたので、この場合は n は2:偶数でも奇数でもよいということになります。

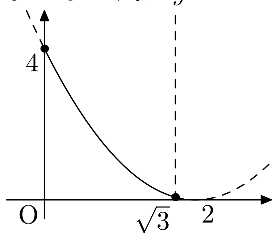
(2) まず、p と q の関係を考えます。p は m, n が奇数である、ということですので $3mn$ は奇数どうしの乗法となっていますので奇数になります。($p \Rightarrow q$ が真)
また p が成り立たない場合、m, n のうちに偶数が入っていることになります。すると mn が偶数になりますので $3mn$ も偶数です。ということで $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ が真だとわかりましたので対偶の $q \Rightarrow p$ も真です。
ということで p は q であるための0:必要十分条件である、といえます。
次に p と r の関係を考えます。p が成り立つ場合、n が奇数ですので $5n$ も奇数となり、したがって $m + 5n$ は偶数となり r をみたします。($p \Rightarrow r$ が真)
ですがたとえば $m = n = 2$ とすると $m + 5n = 12$ と偶数になりますので、$r \Rightarrow p$ は偽とわかります。
ということで p は r であるための2:十分条件であるが、必要条件ではない、といえます。
最後は $\bar{p}$ と r の関係を考えます。まずたとえば $m = 1, n = 2$ とすると $\bar{p}$ は成り立ちますが $m + 5n = 11$ なので r は成り立ちません。ということで $\bar{p} \Rightarrow r$ は偽とわかります。
また $p \Rightarrow r$ が真であったことから、p を成立させる条件 (たとえば $m = n = 1$) を考えると r は成立するが $\bar{p}$ が成立しない (すなわち p が成立する) ものを反例として作れますので、$r \Rightarrow \bar{p}$ も偽とわかります。
ということで $\bar{p}$ は r であるための3:必要条件でも十分条件でもないといえます。

第２問

(1) G をつくるグラフの式を平方完成すると
$y=\left(x+\dfrac{2a-b}{2}\right)^2+a^2+1-\left(\dfrac{2a-b}{2}\right)^2$ と変形できます。これを整理することで
$y=\left\{x-\left(\dfrac{b}{2}-a\right)\right\}^2-\dfrac{b^2}{4}+ab+1$ となります。これより G の頂点は $\underline{\left(\dfrac{b}{2}-a,-\dfrac{b^2}{4}+ab+1\right)}$ とわかります。

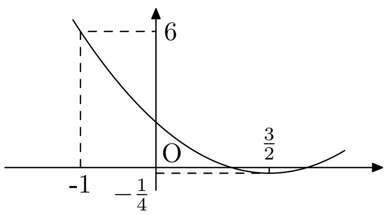
(2) G が x 軸と共有点をもつとき、G は下に凸であることから頂点の y 座標が 0 以下になることが必要十分です。その関係式は
$-\dfrac{b^2}{4}+ab+1\le 0$ となります。整理すると $b^2-4ab-4\ge 0$ より $(b-2a)^2\ge 4+4a^2=2^2(a^2+1)$ とできます。
したがって考えられる範囲は $b\le 2a-2\sqrt{a^2+1}, b\ge 2a+2\sqrt{a^2+1}$ となりますが $a>0$ から $2a-2\sqrt{a^2+1}=2(\sqrt{a^2}-2\sqrt{a^2+1})<0$ がいえますので $b>0$ より $b\le 2a-2\sqrt{a^2+1}$ となることはありません。
また $a>0$ なので $2a+2\sqrt{a^2+1}>0$ はつねに成立します。これより $\underline{b\ge 2a+2\sqrt{a^2+1}}$ であることがわかります。

(3) G が x 軸に接するときは、頂点の y 座標が 0 になる場合ですから
$-\dfrac{b^2}{4}+ab+1=0$ がわかります。この方程式は (2) を参考に解くことで $b=2a+2\sqrt{a^2+1}$ となります。これに $a=\sqrt{3}$ を代入すると $b=2\sqrt{3}+2\sqrt{3+1}=\underline{4+2\sqrt{3}}$ が得られます。
またこのとき接点は頂点ですので x 座標は $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\underline{2}$ となり、また G の式は $y=x^2-4x+4$ となります。



したがって $\sqrt{3}<2$ より $0\le x\le\sqrt{3}$ では x が大きいほど y が小さくなりますので y の最大値は $x=0$ のときの値である $\underline{4}$ であり、最小値は $x=\sqrt{3}$ のときの値である $\underline{7-4\sqrt{3}}$ となります。

(4) G が点 (-1,6) を通るとき G の式から $6=(-1)^2+(2a-b)\cdot(-1)+a^2+1$ が成り立ちます。これを b の式として整理すると $b=-a^2+2a+4$ となります。さらに平方完成して考えると
$b=-(a-1)^2+5$ とできますので、b がとりうる最大値は $\underline{5}$ で、そのとき $\underline{a=1}$ とわかります。

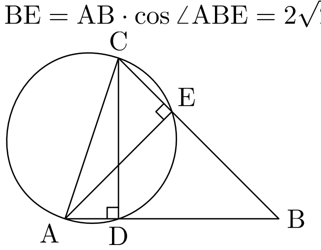


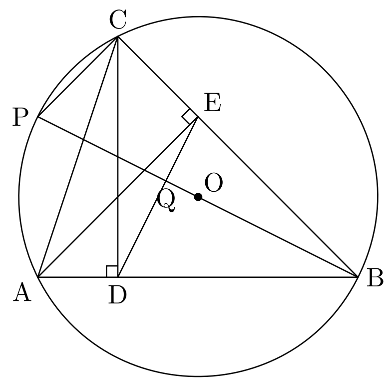
このグラフの頂点の座標はこの値で計算することで $\left(\frac{5}{2}-1, -\frac{5^2}{4}+1\cdot 5+1\right)$ より $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ と出ますので、すなわち $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $\frac{3}{2}$、y 軸方向に $\frac{-1}{4}$ だけ平行移動して得られるものとわかります。

第３問

まずは三角形に余弦定理を適用します。
$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos\angle\mathrm{ABC}$ に判明している値を代入していくと
$5 = 8 + \mathrm{BC}^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos 45^\circ$ となります。$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を利用して整理すると
$\mathrm{BC}^2 - 4 \cdot \mathrm{BC} + 3 = (\mathrm{BC} - 1)(\mathrm{BC} - 3) = 0$ となります。
これより$\underline{\mathrm{BC=1,3}}$となることがわかります。今回は BC=3 の三角形を考えるようです。

(1) C から辺 AB に下した垂線と辺 AB との交点を D とすると三角形 BCD は $\angle\mathrm{B} = 45^\circ, \angle\mathrm{D} = 90^\circ$ の直角三角形になります。ということで
$\mathrm{BD} = \mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{DBC} = 3 \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$ がわかります。
また三角形 ADC の外接円と辺 BC との交点で C 以外の点を E とすると、CD は AB におろした垂線ということで $\angle\mathrm{ADC} = 90^\circ$ ですので円周角の定理から $\angle\mathrm{AEC} = 90^\circ$ です。
ということで $\angle\mathrm{AEB} = 180^\circ - \angle\mathrm{AEC} = \underline{90^\circ}$ となります。したがって
$\mathrm{BE} = \mathrm{AB} \cdot \cos\angle\mathrm{ABE} = 2\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \underline{2}$ がわかります。





(2) 正弦定理から $2\mathrm{BO} = \dfrac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$ がわかりますので $\mathrm{BO} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \underline{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$ です。

三角形 BDE と三角形 BCA において $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BA}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり、$\angle\mathrm{ABC}$ が共通であることから三角形 BDE と BCA は相似であることがわかります。ということで $\angle\mathrm{BCA} = \angle\underline{1:\mathrm{BDE}}$ であり、$\mathrm{DE} = \mathrm{CA}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$ がわかります。また BP は辺 AC と交わることから $\angle\mathrm{ACP} = \angle\underline{7:\mathrm{ABP}}$ であり、BP は円の直径ですので $\angle\mathrm{BCP} = \underline{90^\circ}$ です。

したがって $\angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{ACP} = \angle\mathrm{BCP}$ から $\angle\mathrm{BDE} + \angle\mathrm{ABP} = 90^\circ$ であり、Q が BP 上と ED 上にあることから三角形 BDQ において $\angle\mathrm{BDQ} + \angle\mathrm{ABQ} = 90^\circ$ となることから残りの 1 頂点 Q において $\angle\mathrm{BQD} = 180^\circ - 90^\circ = \underline{90^\circ}$ となることがわかります。すなわち、三角形 BOD と BOE は BO を底辺とみると DQ と EQ が高さになります。ここからこれらの面積の和は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BO}\cdot\mathrm{DQ} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BO}\cdot\mathrm{EQ} &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BO}\cdot(\mathrm{DQ}+\mathrm{EQ}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BO}\cdot\mathrm{DE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2} = \underline{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

と求められます。

第４問

(1) まずはソメイヨシノのヒストグラムと箱ひげ図を見比べます。
2013 年は箱ひげ図から最小値が 75 日未満、最大値が 135 日以上であることがわかります。この範囲に度数があるものは 3 番 1 つだけです。したがって 2013 年は3番のヒストグラムが該当します。
2017 年は最大値が 120 日以上 125 日未満であることがわかります。これを参考にヒストグラムを検証すると 120 日以上があるものは 1,3,4 の 3 つが該当します。1,3 は最大値が 125 以上になっていますので、2017 年は4番のヒストグラムが該当します。

(2) 今度は折れ線グラフを箱ひげ図に重ねました。それぞれ検証しましょう。

0 範囲は最小値から最大値までの大きさをさします。どの年をみても最小値は 80 前後、最大値は 110 以上ですので少なくとも 30 日はあります。ということで正しくないです。

1 2013 年は南九州地区でいちばん早い開花日が 75 日以下、北海道地区でいちばん遅い開花日が 135 日以上ありますのでこの年は 60 日を超えて離れています。ということで正しくないです。

2 第一四分位数は箱の下端として表現されます。2016 年と 2017 年はこれより上に南九州地区の点線が何本かきています。ということで正しくないです。

3 中央値は箱の中ほどにある線で表現されます。2017 年はこれより上に南九州地区の点線が何本かきています。ということで正しくないです。

4 第三四分位数は箱の上端として表現されます。どの年も北海道地区の開花日はこれより上に来ています。ということでこれは正しいです。

(3) 次は散布図で調べます。またそれぞれ検証しましょう。

0 箱ひげ図ではモンシロチョウの初見日とツバメの初見日の最小値が同じような位置にきていることがわかります。ということで正しいといえます。

1 箱ひげ図をみるとモンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より右にきていることがわかります。ということでこれは正しいです。

2 箱ひげ図をみるとモンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より右にきていることがわかります。ということでこれは正しいです。

3 モンシロチョウの初見日の四分位範囲は 20 日ほど、ツバメの初見日の四分位範囲は 9 日ほどです。3 倍より小さいので、正しいといえます。

4 モンシロチョウの初見日は第一四分位が 85 日未満、第三四分位が 100 日を超えていますので範囲で 15 日を超えています。ということでこれは正しくないです。

5 ツバメの初見日は第一四分位が 85 日を超えており、第三四分位が 100 日未満です。ということで範囲は 15 日未満であり、正しいといえます。

6 モンシロチョウの初見日とツバメの初見日が一致する点は散布図で実線を通る点です。重なっているのを無視しても 4 点みられますので、少なくとも 4 地点ある、という記述は正しいといえます。

7 モンシロチョウの初見日とツバメの初見日が 15 日を超えて離れている場合、散布図で 2 本の破線の外側にくることになります。そのような点がみられますのでこれは正しくないです。

(4) X の偏差の平均値は

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{x} x_k - \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = \underline{0:0}$$

と計算できます。X' は X の偏差を $\frac{1}{s}$ 倍したものですので平均も $\frac{1}{s}$ 倍され、したがって0:0となります。そして分散は x_i の係数の 2 乗倍されますので $s^2 \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^2 = 1$ となり、標準偏差は $\sqrt{1} = \underline{1:1}$ となります。
これらの変換をした場合、変換は偏差を正の倍率で変えていることから反転はせず、また標準偏差が 1 であることから偏差が 1 より大きいものがみられるような散布図ができますので、目盛りと特徴的な点を考えて2の散布図に変換されることがわかります。

(5) 相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで得られます。ということで計算すると
$\frac{87.9}{12.4 \cdot 9.78} = \frac{29.3}{12.4 \cdot 3.26} = \frac{293}{404.24} = 0.724 + \frac{0.33024}{404.24} > 0.7245$ なので
3:0.725が近いといえます。

所感

わりと標準的な分量だったと思います。

第 1 問

[1]

二次関数と最大最小に関する問題です。
$\sqrt{(3a-1)^2} = 3a-1$ とやってしまうと大変なことになるので注意しましょう。
それを乗り越えたら誘導に従えばいけるでしょう。

[2]

整数を用いた条件に関する問題です。
m, n それぞれを偶数奇数に分類して分けることで p, q, r がきれいに言い換えられますので、その一覧を作ると楽だと思います。そうしなくても苦労はしないでしょう。

第 2 問

二次関数のグラフに関する問題です。少々込み入った変数設定がされています。
共有点を考えたり、多重に二次不等式を考えたり、と圧倒されそうですが一つ一つ考えれば解けるものばかりだと思います。

第 3 問

三角比を利用した問題です。
三角比の定理、外接円の性質、直角を活用した問題です。最後の面積は線分 DE が 2 つの三角形の高さを合わせたもの、と気づけるかが決め手となります。

第 4 問

データの分析に関する問題です。
問題数は少な目ですが検証する内容は相変わらず多いのでどれを探せばよいかを素早く見つけられるようにしたいです。
(4) は目盛りと点の分布の両方に気付かないとはまります。
(5) は解答に必要な計算の桁数が多く、選択肢も細かいのでまさに「苛め」といえるでしょう。