解答

第１問		
解答欄	正解	配点
アイ	**-1**	**1**
ウ, エ	**2,3**	**2**
オ, カ	**1,2**	**2**
キ, ク, ケ	**2,2,1**	**3**
コ, サ, シ	**2,2,4**	**3**
ス	**3**	**2**
セ, ソ	**4,2**	**2**
タ	**2**	**2**
チ	**2**	**2**
ツ, テ	**2,1**	**2**
トナ, ニヌ	**11,18**	**2**
ネ	**0**	**1**
ノ	**9**	**1**
ハ	**2**	**1**
ヒフ	**1,2**	**2**
ヘホ	**3,4**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	**0**	**1**
イ	**0**	**1**
ウエ	**-3**	**1**
オ	**1**	**2**
カキ	**-2**	**1**
クケ	**-2**	**2**
コ	**2**	**1**
サ, シ	**a,2**	**2**
ス, セ	**3,3**	**2**
ソタ	**12**	**2**
チ, ツ, テ	**3,a,a**	**3**
ト, ナ	**3,1**	**2**
ニ	**2**	**1**
ヌ	**b**	**1**
ネ	**2**	**2**
ノハ, ヒ	**12,5**	**3**
フ, ヘホ	**3,25**	**3**

第３問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**2,2**	**2**
ウ, エ	**0,1**	**2**
オ, カ	**8,5**	**2**
キ	**4**	**2**
ク, ケ, コ	**8,6,5**	**2**
サ, シ	**4,3**	**1**
ス, セ	**2,5**	**2**
ソ, タ	**1,5**	**1**
チツ, テ	**-2,1**	**2**
ト, ナ	**2,5**	**2**
ニ	**2**	**2**

第４問		
解答欄	正解	配点
ア, イ	**1,3**	**1**
ウエ	**-a**	**1**
オ	**b**	**1**
カキ	**2,4**	**2**
ク	**2**	**2**
ケコ	**2,1**	**2**
サ	**1**	**1**
シス	**6,9**	**2**
セ	**2**	**1**
ソタ	**2,3**	**2**
チ	**5**	**1**
ツテトナニ	**4,2,12,9**	**4**

解説

第 1 問

[**1**]

(1) $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$ ですので $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 - 1^2 = \underline{-1}$ です。
また、$\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ ですので
$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \dfrac{3}{4} + 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \underline{2 + \sqrt{3}}$ です。

(2) 2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を変形することで $\cos^2\theta = \underline{\dfrac{\cos 2\theta + 1}{2}}$ がわかります。
また $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$ であり
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ですので

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2 \cdot (2\sin\theta\cos\theta) - \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \\ &= \underline{2\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 1} \end{aligned}$$

がわかります。

(3) 三角関数の合成から

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sqrt{2^2 + 2^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}}\sin 2\theta - \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}}\cos 2\theta\right) + 1 \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\theta\right) + 1 \\ &= 2\sqrt{2}\left(\sin 2\theta \cos\frac{\pi}{4} - \cos 2\theta \sin\frac{\pi}{4}\right) + 1 \\ &= \underline{2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1} \end{aligned}$$

とできます。$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{4} \leq 2\theta - \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{7\pi}{4}$ となりますので
$-1 \leq \sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$ となり、すなわち $1 - 2\sqrt{2} \leq f(\theta) \leq 1 + 2\sqrt{2}$ がわかります。
したがって $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ より $m = 1 + 2 = \underline{3}$ であることがわかります。
また $f(\theta) = 3$ のとき $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と変形できますので
$2\theta - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ となります。それぞれにおいて θ を求めることで
$\theta = \underline{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}}$ がわかります。

[**2**]

真数は正の値でなければなりませんので②より $x+2>0, y+3>0$ です。これより$\underline{2{:}x>-2, y>-3}$がわかります。
底の変換公式を適用すると

$$\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4} = \underline{\frac{\log_2(y+3)}{2}}$$

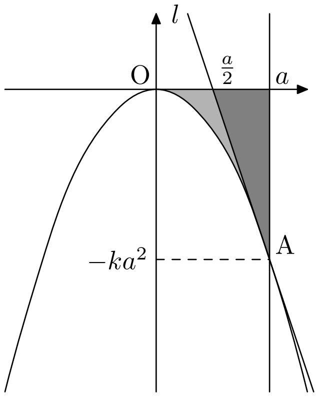
がわかります。これを②に代入すると $\log_2(x+2) - 2\cdot\frac{\log_2(y+3)}{2} = -1$ となり、整理すると
$\log_2(x+2)+1 = \log_2(y+3)$ となります。さらに左辺は
$\log_2\{2(x+2)\} = \log_2(2x+4)$ とできますので真数を比較して $y+3 = 2x+4$ です。したがって$\underline{y=2x+1}$がわかります。

これを使用すると③の式は $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0$ と x の式にできます。$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right\}^2\cdot\frac{1}{3}$ などから $t = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ とすることで $t^2\cdot\frac{1}{3} - 11\cdot t\cdot\frac{1}{3} + 6 = 0$ となり、分母をはらって整理すると$\underline{t^2-11t+18=0}$となります。
真数条件から $x>-2, 2x+1>-3$ ですので $x>-2$ がわかります。t のとりうる範囲は底が 1 より小さいことから $t<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$ がわかります。
また t は指数形式ですので $t>0$ となり、したがって t のとりうる範囲は$\underline{0<t<9}$であることがわかります。
⑤の式は $(t-2)(t-9)=0$ と因数分解できますので、$0<t<9$ の条件と合わせると方程式の解は$\underline{t=2}$となります。すなわち $2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ ですので逆数をとると $\frac{1}{2} = 3^x$ となり、ここから$\underline{x=\log_3\frac{1}{2}}$と求められ、
さらに $y = 2\cdot\log_3\frac{1}{2} + 1 = \log_3\left(\frac{1}{2^2}\cdot 3\right) = \underline{\log_3\frac{3}{4}}$ と求められます。

第２問

(1) $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるということは微分係数が 0 になる、すなわち $\underline{f'(-1)=0}$ であることがわかります。$f'(x)=3x^2+2px+q$ なので $f'(-1)=3-2p+q=0$ です。
また $f(-1)=2$ より $-1+p-q=2$ ですので連立して解くことで $\underline{p=0, q=-3}$ が得られます。
したがって $f(x)=x^3-3x$ ですので $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ となりますので、$f(x)$ は $\underline{x=1}$ で極小となり、その値は $f(1)=\underline{-2}$ です。

(2) $\dfrac{d}{dx}(-kx^2)=-2kx$ ですので l の傾きは $-2ka$ です。ということで l の式は $y=-2ka(x-a)-ka^2$ と表せますので、整理して $\underline{y=-2kax+ka^2}$ となります。
l と x 軸との交点においては $y=0$ となりますので $0=-2kax+ka^2$ が成り立ちます。$a>0, k>0$ なので $-2x+a=0$ が成り立つことから $x=\dfrac{a}{2}$ となり、すなわち交点の x 座標は $\underline{\dfrac{a}{2}}$ であるとわかります。



また D と x 軸と直線 $x=a$ で囲まれた部分 (図の薄い灰色と濃灰色部分) の面積は $k>0, a>0$ より D が x 軸の下側にくることから

$$\int_0^a \{0-(-kx^2)\}dx=\int_0^a kx^2dx=\left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a=\underline{\frac{k}{3}a^3}$$

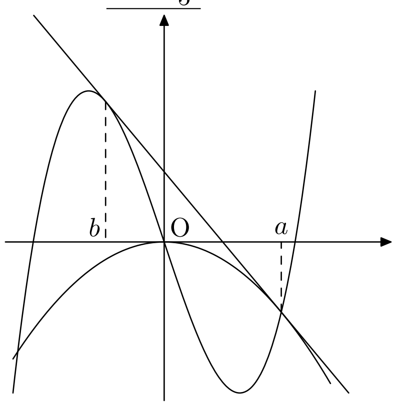
であるとわかります。S を求める図形はこの図形から 3 直線 x 軸、l、$x=a$ で囲まれる三角形 (濃灰色部分) を除いた部分 (薄い灰色部分) です。。この三角形の面積は x 軸を底辺と考えると $\dfrac{1}{2}\cdot\left(a-\dfrac{a}{2}\right)\cdot|-ka^2|=\dfrac{k}{4}a^3$ と求められますので、$S=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{k}{4}a^3=\underline{\dfrac{k}{12}}a^3$ であるとわかります。

(3) さらに A が C 上にくるとき $f(a)=-ka^2$ が成り立ちますので展開して $a^3-3a=-ka^2$ です。
$a>0$ ですので両辺を $-a^2$ で割ることができ、これにより $k=\underline{\dfrac{3}{a}-a}$ がわかります。

また l が C 上で x 座標が b の点で接するとき、方程式は
$y=f'(b)(x-b)+f(b)$ と表せますから $y=(3b^2-3)(x-b)+(b^3-3b)$
となり、これを整理すると$\underline{y=3(b^2-1)x-2b^3}$となります。この右辺を $g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= x^3-3x-\{3(b^2-1)x-2b^3\}=x^3-3b^2x+2b^3 \\
&= (x-b)(x^2+bx-2b^2)=\underline{(x-b)^3(x+2b)}
\end{aligned}$$

と因数分解できます。すなわち l と C との共有点は接点と $(-2b, f(-2b))$ です。A が接点に一致していると仮定すると $f(a)=-ka^2$ から $k=\dfrac{3}{a}-a$ であり、また $f'(a)=-2ka$ なので $3a^2-3=-2ka=2a^2-6$ となり、$a^2=-3$ となってしまうので不適であるとわかります。よって A が C 上にくるとすれば $a=-2b$ となるしかないとわかります。このときに 2 つの式は A を通るように変数を設定していますので、等しいかどうかを確かめるには傾きを比較すればよく、それより $3b^2-3=-2ka=2a^2-6$ がわかります。
$b=-\dfrac{a}{2}$ より $b^2=\dfrac{a^2}{4}$ ですのでこの式は $\dfrac{3}{4}a^2-3=2a^2-6$ となり、整理すると$\underline{a^2=\dfrac{12}{5}}$となります。



したがって

$$\begin{aligned}
S &= \frac{k}{12}a^3=\frac{a^3}{12}\cdot\left(\frac{3}{a}-a\right)=\frac{a^2}{12}(3-a^2) \\
&= \frac{1}{12}\cdot\frac{12}{5}\cdot\left(3-\frac{12}{5}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{25}=\underline{\frac{3}{25}}
\end{aligned}$$

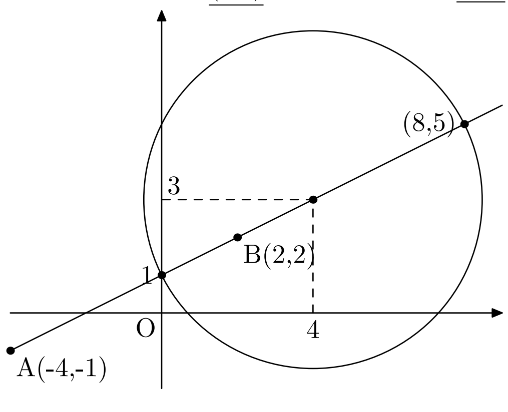
と求められます。

第３問

(1) y に対する x の変化率に注目して方程式を考えると、
$x=\dfrac{2-(-4)}{2-(-1)}(y-2)+2$ と立式できます。
これを整理すると$\underline{x-2y+2=0}$と求められます。

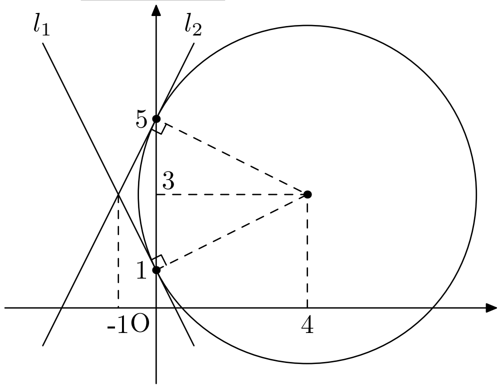
(2) 線分 AB を 2:1 に内分する点の座標は $\left(\dfrac{1\cdot(-4)+2\cdot2}{1+2},\dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot2}{1+2}\right)$
より$\underline{(0{,}1)}$であり、外分する点の座標は $\left(\dfrac{1\cdot(-4)-2\cdot2}{1-2},\dfrac{1\cdot(-1)-2\cdot2}{1-2}\right)$
より$\underline{(8{,}5)}$と求められます。

(3) A,B からの距離の比が 2:1 である点 P があるとき、$\mathrm{PA}=2\mathrm{PB}$ ですので $\mathrm{PA}^2=4\mathrm{PB}^2$ です。
$\mathrm{PA}^2=(x+4)^2+(y+1)^2, \mathrm{PB}^2=(x-2)^2+(y-2)^2$ ですので代入して
$\underline{(x+4)^2+(y+1)^2=4\{(x-2)^2+(y-2)^2\}}$が成り立つことがわかります。これを展開すると
$x^2+y^2+8x+2y+17=4x^2+4y^2-16x-16y+32$ となり、さらに整理することで
$\underline{x^2+y^2-8x-6y+5=0}$が得られます。
これを円の式の形式にしますと $(x-4)^2+(y-3)^2=20$ となりますので、軌跡は中心が$\underline{(4{,}3)}$、半径が $\sqrt{20}=\underline{2\sqrt{5}}$ の円だとわかります。



(4) C と y 軸との交点では x 座標が 0 ですので C の式に $x=0$ を代入して $y^2-6y+5=0$ が成り立ちます。
$(y-1)(y-5)=0$ とできますので $y=1,5$ すなわち交点は$\underline{(0{,}1),(0{,}5)}$です。
点 (0,1) と C の中心は直線 AB 上にくるのでこの 2 点を通る直線の式は $x-2y+2=0$ すなわち $y=\dfrac{1}{2}x+1$ であり、
点 (0,5) と C の中心を通る直線の式は $y=\dfrac{3-5}{4}x+5$
すなわち $y=-\dfrac{1}{2}x+5$ です。

C 上の任意の点 C における接線は C と中心を通る直線に垂直ですので傾きはその直線の逆数の-1 倍となります。ということで $(0,1)$ を通る l_1 の式は$\underline{y=-2x+1}$であり (0,5) を通る l_2 の式は$\underline{y=2x+5}$です。



この 2 直線 l_1, l_2 の交点では $y=-2x+1=2x+5$ が成立しますのでこれを解いて $x=-1, y=3$ です。
したがって y 軸,l_1, l_2 で囲まれた部分の面積は y 軸を底辺と考えると
$\frac{1}{2}\cdot|5-1|\cdot|-1|=\underline{2}$ となります。

第４問

因数定理とは「多項式 $P(x)$ が $P(\alpha)=0$ を満たすならば $P(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる」ということです。ということで $P(-1)=P(3)=0$ と仮定していますので$\underline{x+1, x-3}$で割り切れます。

(1) $P(x)$ が虚数解をもつ場合、α, β は $Q(x)=0$ の解です。ということで解と係数の関係より$\underline{\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=b}$です。また判別式は $D=\underline{a^2-4b}$ となり、虚数解をもつということはこの値は負、すなわち$\underline{2{:}D<0}$です。

(2) 虚数解をもたない場合、$Q(x)=0$ の解として考えられるものは-1 と 3 に限られます。
$Q(x)=0$ の解が $x=-1$ のみの場合、$Q(x)=(x+1)^2=\underline{x^2+2x+1}$ となり、$Q(x)$ は$\underline{1{:}x=-1 \text{ のとき } 0 \text{ となり、その他の実数 } x \text{ で正}}$となることがわかります。
$Q(x)=0$ の解が $x=3$ のみの場合、$Q(x)=(x-3)^2=\underline{x^2-6x+9}$ となり、$Q(x)$ は$\underline{2{:}x=3 \text{ のとき } 0 \text{ となり、その他の実数 } x \text{ で正}}$となることがわかります。
$Q(x)=0$ の解が $x=-1, 3$ である場合、
$Q(x)=(x+1)(x-3)=\underline{x^2-2x-3}$ となり、$Q(x)$ は
$\underline{5{:}-1<x<3 \text{ を満たす } x \text{ で負となり、その他の実数 } x \text{ で } 0 \text{ 以上}}$となることがわかります。

(3) $P(x)$ がすべての実数 x で 0 以上となる場合、$(x+1)(x-3)$ が $-1<x<3$ で負、それ以外の実数で正の値をとることから $Q(x)=(x+1)(x-3)$ となる必要があります。このとき $P(x)=\{(x+1)(x-3)\}^2$ となりすべての実数 x で 0 以上となりますので条件をみたします。展開すると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-2x-3)^2 \\ &= x^4-2\cdot 2x^3+\{(-2)^2-2\cdot 3\}x^2+2\cdot 3\cdot 2+3^2 \\ &= \underline{x^4-4x^3-2x^2+12x+9} \end{aligned}$$

となります。

所感

標準的な難易度で固まっているようです。
配点が細かく、部分点をとりやすい形式になっていたと思います。

第 1 問

[**1**]

三角関数を利用した問題です。
基本的な半角公式の導出や合成があり、とくに手ごわい問題はなかったと思えます。

[**2**]

指数対数関数を利用した問題です。
真数条件の選択肢は紛らわしいですが標準的な難度です。
底の変換公式を心得ていないと先が大変になりそうです。
その後に変数変換をしますが指数法則や変換後の範囲には気を付けましょう。

第 2 問

整式関数の微積分に関する問題です。
(1) は条件から $f(x)$ を求めます。誘導が丁寧ですので難しくはないです。記述式だと本当に極大極小になるかを検証する必要が出てきますが今回は無視して大丈夫でしょう。
(2) は放物線をからめた面積計算をします。単純な積分しか出題されてませんが図形に切り分けて計算する、という発想がなかったら難儀したところかもしれません。
(3) は 2 曲線と接線をからめた問題です。ひとつひとつ条件を確認していく必要があります。
途中で $a = -2b$ である、と論理を飛躍させている箇所があります (こうなることは証明できます) のでそこで迷いが生じるかもしれません。

第 3 問

図形と式に関する問題です。
公式を適用していけば C と y 軸の交点を出すところまでいけそうです。
実は C はアポロニウスの円と呼ばれており、(2) で求めた点を両端とする線分を直径とする、という性質が頭に入っていれば近道できたりする問題です。

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の式は
$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ で表せますが、この式が出なかった人は解答のような考えで進めれば時間もかからないと思います。

第４問

　複素数と整式に関する問題です。
(1) は性質をあてはめるだけですので問題ないと思います。
(2) は記述とかになると見逃してしまいそうな条件を考えています。$Q(x)=0$ の可能性をすべて考えて符号に合わせて解答を埋めることになります。
(3) は式の展開が少々面倒か。