解答

第１問		
解答欄	正解	配点
アイ	**-1**	**1**
ウ, エ	**2,3**	**2**
オ, カ	**1,2**	**2**
キ, ク, ケ	**2,2,1**	**3**
コ, サ, シ	**2,2,4**	**3**
ス	**3**	**2**
セ, ソ	**4,2**	**2**
タ	**2**	**2**
チ	**2**	**2**
ツ, テ	**2,1**	**2**
トナ, ニヌ	**11,18**	**2**
ネ	**0**	**1**
ノ	**9**	**1**
ハ	**2**	**1**
ヒフ	**1,2**	**2**
ヘホ	**3,4**	**2**

第２問		
解答欄	正解	配点
ア	**0**	**1**
イ	**0**	**1**
ウエ	**-3**	**1**
オ	**1**	**2**
カキ	**-2**	**1**
クケ	**-2**	**2**
コ	**2**	**1**
サ, シ	**a,2**	**2**
ス, セ	**3,3**	**2**
ソタ	**12**	**2**
チ, ツ, テ	**3,a,a**	**3**
ト, ナ	**3,1**	**2**
ニ	**2**	**1**
ヌ	**b**	**1**
ネ	**2**	**2**
ノハ, ヒ	**12,5**	**3**
フ, ヘホ	**3,25**	**3**

第３問		
解答欄	正解	配点
アイ	**15**	**2**
ウ	**2**	**2**
エ, オ, カ	**4,1,1**	**2**
キ, ク, ケ, コ, サ	**4,1,3,4,3**	**3**
シス	**-5**	**1**
セ, ソ, タ	**4,3,3**	**3**
チ, ツ	**4,6**	**2**
テト, ナ, ニ	**-3,0,2**	**2**
ヌ, ネ, ノ, ハ, ヒ	**-,9,8,8,3**	**3**

第４問		
解答欄	正解	配点
アイ	**90**	**1**
ウ, エ	**5,2**	**1**
オカ	**-1**	**1**
キ	**2**	**1**
ク	**2**	**1**
ケコサ	**120**	**1**
シス	**60**	**1**
セ	**2**	**1**
ソ, タ	**2,2**	**1**
チ, ツ, テ	**3,3,2**	**2**
ト	**0**	**1**
ナ, ニ, ヌ	**1,3,5**	**2**
ネ, ノ	**5,5**	**2**
ハ, ヒ	**1,6**	**1**
フ	**3**	**1**
ヘ, ホ	**3,3**	**2**

第５問		
解答欄	正解	配点
アイ	**7,4**	**2**
ウ	**3**	**2**
エオ	**2,6**	**2**
カ. キ	**1.4**	**2**
クケ	**08**	**2**
コ. サ	**4.0**	**2**
シ. ス	**3.7**	**2**
セソ	**0.6**	**2**
タチ	**0.90**	**2**
ツ	**2**	**2**

解説

第 1 問

[**1**]

(1) $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$ ですので $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 - 1^2 = \underline{-1}$ です。
また、$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ですので
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \underline{2 + \sqrt{3}}$ です。

(2) 2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を変形することで $\cos^2\theta = \underline{\frac{\cos 2\theta + 1}{2}}$ がわかります。
また $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ であり
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ですので

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2 \cdot (2\sin\theta\cos\theta) - \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \\ &= \underline{2\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 1} \end{aligned}$$

がわかります。

(3) 三角関数の合成から

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sqrt{2^2 + 2^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}}\sin 2\theta - \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}}\cos 2\theta\right) + 1 \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\theta\right) + 1 \\ &= 2\sqrt{2}\left(\sin 2\theta \cos\frac{\pi}{4} - \cos 2\theta \sin\frac{\pi}{4}\right) + 1 \\ &= \underline{2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1} \end{aligned}$$

とできます。$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $-\frac{\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$ となりますので
$-1 \leq \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ となり、すなわち $1 - 2\sqrt{2} \leq f(\theta) \leq 1 + 2\sqrt{2}$ がわかります。
したがって $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ より $m = 1 + 2 = \underline{3}$ であることがわかります。
また $f(\theta) = 3$ のとき $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と変形できますので
$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ となります。それぞれにおいて θ を求めることで
$\theta = \underline{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}}$ がわかります。

[**2**]

真数は正の値でなければなりませんので②より $x+2>0, y+3>0$ です。これより$\underline{2{:}x>-2, y>-3}$がわかります。
底の変換公式を適用すると

$$\log_4(y+3)=\frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\underline{\frac{\log_2(y+3)}{2}}$$

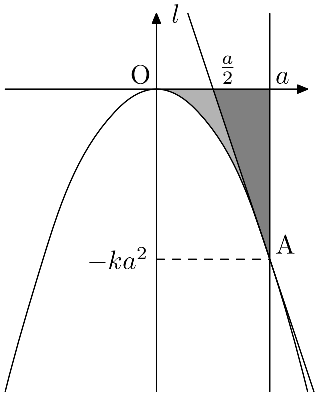
がわかります。これを②に代入すると $\log_2(x+2)-2\cdot\dfrac{\log_2(y+3)}{2}=-1$ となり、整理すると
$\log_2(x+2)+1=\log_2(y+3)$ となります。さらに左辺は
$\log_2\{2(x+2)\}=\log_2(2x+4)$ とできますので真数を比較して $y+3=2x+4$ です。したがって$\underline{y=2x+1}$がわかります。

これを使用すると③の式は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$ と x の式にできます。$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\right\}^2\cdot\dfrac{1}{3}$ などから $t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$ とすることで $t^2\cdot\dfrac{1}{3}-11\cdot t\cdot\dfrac{1}{3}+6=0$ となり、分母をはらって整理すると$\underline{t^2-11t+18=0}$となります。
真数条件から $x>-2, 2x+1>-3$ ですので $x>-2$ がわかります。t のとりうる範囲は底が 1 より小さいことから $t<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=9$ がわかります。
また t は指数形式ですので $t>0$ となり、したがって t のとりうる範囲は$\underline{0<t<9}$であることがわかります。
⑤の式は $(t-2)(t-9)=0$ と因数分解できますので、$0<t<9$ の条件と合わせると方程式の解は$\underline{t=2}$となります。すなわち $2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$ ですので逆数をとると $\dfrac{1}{2}=3^x$ となり、ここから$\underline{x=\log_3\dfrac{1}{2}}$と求められ、
さらに $y=2\cdot\log_3\dfrac{1}{2}+1=\log_3\left(\dfrac{1}{2^2}\cdot 3\right)=\underline{\log_3\dfrac{3}{4}}$ と求められます。

第２問

(1) $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるということは微分係数が 0 になる、すなわち$\underline{f'(-1)=0}$であることがわかります。$f'(x)=3x^2+2px+q$ なので $f'(-1)=3-2p+q=0$ です。
また $f(-1)=2$ より $-1+p-q=2$ ですので連立して解くことで$\underline{p=0, q=-3}$が得られます。
したがって $f(x)=x^3-3x$ ですので $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ となりますので、$f(x)$ は$\underline{x=1}$で極小となり、その値は $f(1)=\underline{-2}$ です。

(2) $\dfrac{d}{dx}(-kx^2)=-2kx$ ですので l の傾きは $-2ka$ です。ということで l の式は $y=-2ka(x-a)-ka^2$ と表せますので、整理して$\underline{y=-2kax+ka^2}$ となります。
l と x 軸との交点においては $y=0$ となりますので $0=-2kax+ka^2$ が成り立ちます。$a>0, k>0$ なので $-2x+a=0$ が成り立つことから $x=\dfrac{a}{2}$ となり、すなわち交点の x 座標は$\underline{\dfrac{a}{2}}$であるとわかります。



また D と x 軸と直線 $x=a$ で囲まれた部分 (図の薄い灰色と濃灰色部分) の面積は $k>0, a>0$ より D が x 軸の下側にくることから

$$\int_0^a \{0-(-kx^2)\}dx=\int_0^a kx^2dx=\left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a=\underline{\frac{k}{3}a^3}$$

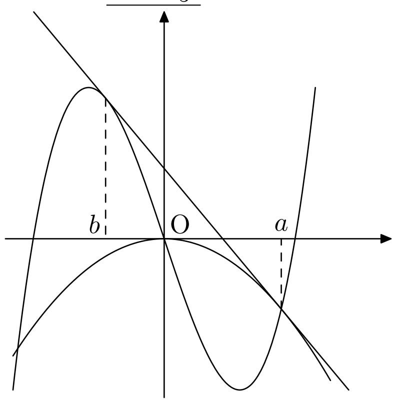
であるとわかります。S を求める図形はこの図形から 3 直線 x 軸、l、$x=a$ で囲まれる三角形 (濃灰色部分) を除いた部分 (薄い灰色部分) です。。この三角形の面積は x 軸を底辺と考えると $\dfrac{1}{2}\cdot\left(a-\dfrac{a}{2}\right)\cdot|-ka^2|=\dfrac{k}{4}a^3$ と求められますので、$S=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{k}{4}a^3=\underline{\dfrac{k}{12}a^3}$ であるとわかります。

(3) さらに A が C 上にくるとき $f(a)=-ka^2$ が成り立ちますので展開して $a^3-3a=-ka^2$ です。
$a>0$ ですので両辺を $-a^2$ で割ることができ、これにより $k=\underline{\dfrac{3}{a}-a}$ がわかります。

また l が C 上で x 座標が b の点で接するとき、方程式は
$y = f'(b)(x-b) + f(b)$ と表せますから $y = (3b^2-3)(x-b) + (b^3-3b)$ となり、これを整理すると$\underline{y = 3(b^2-1)x - 2b^3}$となります。この右辺を $g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - 3x - \{3(b^2-1)x - 2b^3\} = x^3 - 3b^2x + 2b^3 \\ &= (x-b)(x^2+bx-2b^2) = \underline{(x-b)^3(x+2b)} \end{aligned}$$

と因数分解できます。すなわち l と C との共有点は接点と $(-2b, f(-2b))$ です。A が接点に一致していると仮定すると $f(a) = -ka^2$ から $k = \dfrac{3}{a} - a$ であり、また $f'(a) = -2ka$ なので $3a^2 - 3 = -2ka = 2a^2 - 6$ となり、$a^2 = -3$ となってしまうので不適であるとわかります。よって A が C 上にくるとすれば $a = -2b$ となるしかないとわかります。このときに 2 つの式は A を通るように変数を設定していますので、等しいかどうかを確かめるには傾きを比較すればよく、それより $3b^2 - 3 = -2ka = 2a^2 - 6$ がわかります。
$b = -\dfrac{a}{2}$ より $b^2 = \dfrac{a^2}{4}$ ですのでこの式は $\dfrac{3}{4}a^2 - 3 = 2a^2 - 6$ となり、整理すると$\underline{a^2 = \dfrac{12}{5}}$となります。



したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{k}{12}a^3 = \frac{a^3}{12} \cdot \left(\frac{3}{a} - a\right) = \frac{a^2}{12}(3 - a^2) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{5} \cdot \left(3 - \frac{12}{5}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{25} = \underline{\frac{3}{25}} \end{aligned}$$

と求められます。

第３問

(1) 初項 3、公比 4 の等比数列は第 2 項が $3{\cdot}4 = 12$ ですので $S_2 = 3+12 = \underline{15}$ です。
また $\{T_n\}$ の階差数列は $\{S_n\}$ に等しいことから $T_{n+1} - T_n = S_n$ です。
これより $T_2 = T_1 + S_1 = -1 + 3 = \underline{2}$ がわかります。

(2) $\{S_n\}$ は等比数列の和の公式を利用して
$S_n = 3 \cdot \dfrac{4^n - 1}{4 - 1} = \underline{4^n - 1}$ がわかります。また、

$$\begin{aligned} T_n &= T_1 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^{n-1} (4^k - 1) \\ &= -1 + 4 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} - (n - 1) = \underline{\frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3}} \end{aligned}$$

とわかります。

(3) $b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$ としたとき、初項は $b_1 = \dfrac{a_1 + 2T_1}{1} = -3+2{\cdot}(-1) = \underline{-5}$ です。
$T_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}}{3} - n - \dfrac{7}{3}, T_n = \dfrac{4^n}{3} - n - \dfrac{4}{3}$ を利用すると
$4^n = \dfrac{3}{4}\left(T_{n+1} + n + \dfrac{7}{3}\right) = 3\left(T_n + n + \dfrac{4}{3}\right)$ と変形できます。この右側を利用すると $T_{n+1} + n + \dfrac{7}{3} = 4\left(T_n + n + \dfrac{4}{3}\right)$ より
$\underline{T_{n+1} = 4T_n + 3n + 3}$が成り立つことがわかります。
したがって漸化式 $na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割り
$\dfrac{2T_{n+1}}{n+1}$ を加算すると
$\dfrac{a_{n+1} + 2T_{n+1}}{n+1} = \dfrac{4a_n}{n} + \dfrac{8T_n}{n(n+1)} + \dfrac{2T_{n+1}}{n+1}$ となります。この右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{4a_n}{n} + \frac{8T_n}{n(n+1)} + \frac{8T_n + 6(n+1)}{n+1} = \frac{4a_n}{n} + \frac{8T_n}{n+1}\left(\frac{1}{n} + 1\right) + 6 \\ = & \frac{4a_n}{n} + \frac{8T_n}{n} + 6 = 4 \cdot \frac{a_n + 2T_n}{n} + 6 \end{aligned}$$

となりますので、b_n の式に直すと$\underline{b_{n+1} = 4b_n + 6}$が成り立つことがわかります。
この漸化式は $b_{n+1} + 2 = 4b_n + 8 = 4(b_n + 2)$ とできますので $\{b_n + 2\}$ は初項 $-5 + 2$、公比 4 の等比数列です。したがって $b_n + 2 = -3 \cdot 4^{n-1}$ より$\underline{b_n = -3 \cdot 4^{n-1} - 2}$とわかります。

$b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$ より $a_n = nb_n - 2T_n$ ですから

$$\begin{aligned} a_n &= n(-3 \cdot 4^{n-1} - 2) - 2\left(\frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3}\right) \\ &= -3n \cdot 4^{n-1} - 2n - \frac{2 \cdot 4}{3} \cdot 4^{n-1} + 2n + \frac{8}{3} \\ &= \frac{-9n-8}{3} \cdot 4^{n-1} + \frac{8}{3} = \underline{\frac{-(9n+8)4^{n-1}+8}{3}} \end{aligned}$$

と求められます。

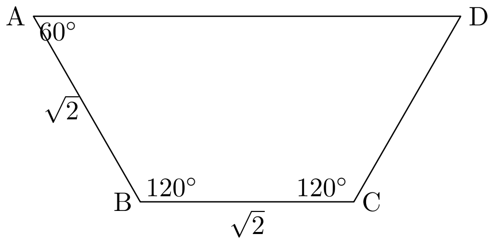
第４問

(1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ ということは $|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{AOC}=0$ ということです。
$|\vec{a}|\neq 0, |\vec{c}|\neq 0$ より $\cos\angle\mathrm{AOC}=0$ ですので$\underline{\angle\mathrm{AOC}=90^\circ}$です。
これより、三角形 AOC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|=\underline{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$ だとわかります。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}-\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{c}-\vec{b}$ ですので

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\
&= -3-1+3=\underline{-1}\\
|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 &= |\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\
&= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+3-2=2\\
|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 &= |\vec{c}-\vec{b}|^2=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\
&= |\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}=5+3-2\cdot 3=2
\end{aligned}$$

となりすなわち$\underline{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{2}, |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{2}}$です。これを利用すると
$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$ となりますので$\underline{\angle\mathrm{ABC}=120^\circ}$がわかります。
これと $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}$ であること、AD と BC が平行であることを利用すると $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-120^\circ=\underline{60^\circ}$ がわかります。



ここから AD の長さは $\mathrm{BC}-\mathrm{BA}\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}-\mathrm{CD}\cdot\cos\angle\mathrm{BCD}$
$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=2\sqrt{2}$ だとわかり、
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\underline{2\overrightarrow{\mathrm{BC}}}$ がわかります。これより

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\underline{\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}}$$

がわかり、四角形 ABCD の面積は AD,BC を上底下底としたときの高さが $\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ であることから $\dfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ とわかります。

(3) いま H は $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{c}$が成り立つようにとっていますので
$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{c}=\underline{0}$ です。$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c}$ ですからこの

式を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表現すると
$(s\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{a} = s|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{a} \cdot \vec{c} = s - 1 = 0,$
$(s\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 = 5t - 3 = 0$ と変形できます。したがって $\underline{s = 1, t = \frac{3}{5}}$ がわかります。これより

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2 &= \left|\vec{a} - \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right|^2 = \left(\vec{a} - \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right) \\
&= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \frac{9}{25}|\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{6}{5}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{6}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} \\
&= 1 + 3 + \frac{9}{25} \cdot 5 - 2 \cdot 1 + \frac{6}{5} \cdot 0 - \frac{6}{5} \cdot 3 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

がわかりますので $|\overrightarrow{\mathrm{BH}}| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}$ がわかります。この線分 BH は O,A,C を通る平面に垂直ですのですなわちこの長さが高さとなり、したがって
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{1}{6}}$ がわかります。

(4) 三角錐 BOAC の底面を三角形 ABC と考えると、四角錐 OABCD と三角錐 BOAC は高さが O から底面に下した垂線の長さになりますので、すなわち体積比は四角形 ABCD と三角形 ABC との面積比に等しくなります。
三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{BA} \cdot \mathrm{BC} \cdot \sin \angle\mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ですので、四角錐 OABCD の体積は $\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} V = \underline{3V}$ となります。この値はすなわち $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ です。ここから四角形 ABCD を底面としたときの四角錐 OABCD の高さを h とおくと $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{1}{2}$ が成り立ちますので $h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ がわかります。

第 5 問

(1) 確率変数 X に対し、分散 $V(X)$ は $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ で計算できます。$V(X) = \{\sigma(X)\}^2$ ですので
$E(X^2) = \{\sigma(X)\}^2 + \{E(X)\}^2 = 5^2 + (-7)^2 = \underline{74}$ とわかります。
また、$W = 1000X$ とすると $E(W) = 1000E(X), V(W) = 1000^2 V(X)$ ですので
$E(W) = 10^3 \cdot (-7) = \underline{-7 \times 10^3}, V(W) = (10^3)^2 \cdot 5^2 = \underline{5^2 \times 10^6}$ となります。

(2) $X \geq 0$ のとき X を標準化するように変形すると $X \geq 0 \Rightarrow X + 7 \geq 7 \Rightarrow \dfrac{X+7}{5} \geq \dfrac{7}{5} = \underline{1.4}$ となります。この左辺が標準化された変数 Z ですので $P(X \geq 0) = P(Z \geq 1.4)$ がいえます。
$P(Z \geq 1.4) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.4)$ なので正規分布表から
$P(Z \geq 1.4) = 0.5 - 0.4192 = 0.0808$ と計算できますので四捨五入して
$\underline{P(Z \geq 1.4) = 0.08}$がわかります。
ここで 50 人がこの食品を摂取したとき A の減少しない確率を 0.08 としてその人数を表す確率変数を M としたとき、M が $B(50, 0.08)$ に従いますから
$E(M) = 50 \cdot 0.08 = \underline{4.0}, V(M) = 50 \cdot 0.08 \cdot (1 - 0.08) = 3.68$ です。
したがって四捨五入して $\sigma(M) = \underline{\sqrt{3.7}}$ となります。

(3) 区間を推定する場合、母集団の標準偏差を σ、標本数を n としたとき標本平均は期待値 m、標準偏差 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の分布にしたがいますので
$\sigma(\overline{Y}) = \dfrac{6}{\sqrt{100}} = \underline{0.6}$ です。
正規分布表から $|Z| \leq 1.64$ となる確率を考えると $P(|Z| \leq 1.64) = 2P(0 \leq Z \leq 1.64) = 2 \cdot 0.4495 = 0.8990$ となりますので四捨五入してその確率は$\underline{0.90}$となります。
すなわち母平均 m に対して 90%の確率で $\dfrac{|\overline{Y} - m|}{0.6} \leq 1.64$ が成立します。これを m について解くと信頼区間が得られます。
$-1.64 \leq \dfrac{-10.2 - m}{0.6} \leq 1.64$ より $-11.184 \leq m \leq -9.216$ となりますので、最も適当な信頼区間は$\underline{2{:}-11.2 \leq m \leq -9.2}$とわかります。

所感

　選択問題に比較的難しいものが並びましたが標準的な難易度と思われます。
配点が細かく、部分点をとりやすい形式になっていたと思います。
第５問を選んでいなかったら点数を取りにくくなっていたでしょう。

第１問

[1]

　三角関数を利用した問題です。
基本的な半角公式の導出や合成があり、とくに手ごわい問題はなかったと思えます。

[2]

　指数対数関数を利用した問題です。
真数条件の選択肢は紛らわしいですが標準的な難度です。
底の変換公式を心得ていないと先が大変になりそうです。
その後に変数変換をしますが指数法則や変換後の範囲には気を付けましょう。

第２問

　整式関数の微積分に関する問題です。
(1) は条件から $f(x)$ を求めます。誘導が丁寧ですので難しくはないです。記述式だと本当に極大極小になるかを検証する必要が出てきますが今回は無視して大丈夫でしょう。
(2) は放物線をからめた面積計算をします。単純な積分しか出題されてませんが図形に切り分けて計算する、という発想がなかったら難儀したところかもしれません。
(3) は 2 曲線と接線をからめた問題です。ひとつひとつ条件を確認していく必要があります。
途中で $a = -2b$ である、と論理を飛躍させている箇所があります (こうなることは証明できます) のでそこで迷いが生じるかもしれません。

第３問

　数列の問題です。
(1)(2) は単純計算と公式ですので落としたくないところです。
(3) は思考力と高い計算力を要する難問となっています。T_n の漸化式を導け

れば以降は計算力だけの問題になりますが、ここで詰まってしまう人も多そうです。方法としては他に S_n の漸化式を導いておき、それを利用して T_n の漸化式を導く、ということも考えられます。

第４問

　空間ベクトルを利用した問題です。
(2) の途中からは図形的な感覚でつかむのが速そうです。(台形 ABCD は正六角形の半分であることが利用できる)
(3) は項数の多い計算を強いられますので苦労します。
(4) は見方を変える工夫が必要になります。

第５問

　確率分布に関する問題です。
連続的な確率変数に対する $E(X^2)$ を求めるなど慣れないものがありますが基本的なことを押さえていれば最後までいけたと思います。