1　解答一覧

第 1 問

問題	アイ	ウエ	オ	カ	キク	ケコ, サ, シ, ス, セ	ソ	タ
解答	1,0	0,4	2	2	1,3	-2,3,2,6,2	2	7

問題	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
解答	1	5	2	1	2	2,3,4,5

第 2 問

問題	ア	イ	ウ, エ	オカキ	クケコサ	シスセ	ソ
解答	0	2	1,3	575	9,4,7,2	500	4

問題	タチ	ツテ	ト	ナ	ニ	ヌ
解答	3,3	18	1	0	1,4,5	3

第 3 問

問題	アイウ	エ	オカキ	クケ	コサ	シスセソ	タ	チ	ツ
解答	200	5	025	24	20	0013	4	4	4

第 4 問

問題	ア	イウエ	オ	カキ	クケコ	サ	シ	スセソ	タチツ
解答	4	2,3,4	6	3,8	2,3,4	3	0	-4,1	3,4,1

問題	テトナニヌ
解答	2,3,2,4,8

第 5 問

問題	アイ	ウエ	オカ	キクケコ	サシ	スセソ	タ	チツ	テ
解答	1,2	1,2	2,3	2,3,2,3	1,2	-1,3	1	90	1

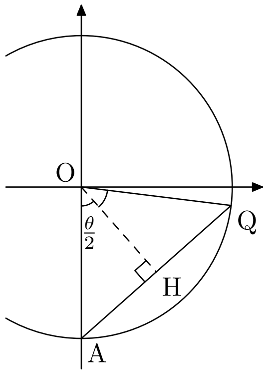
2　解法

第 1 問

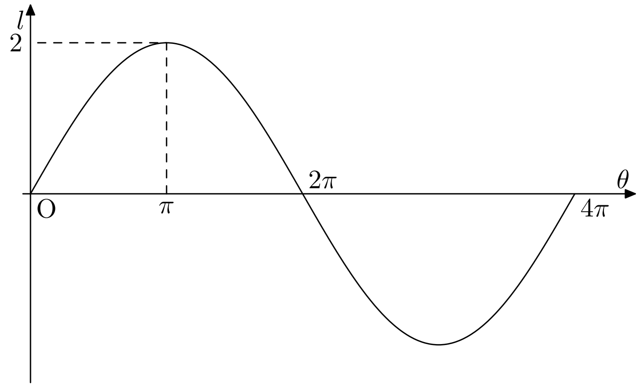
[1]

(1) 線分 OP は x 軸とのなす角が θ であることから
$\underline{\mathrm{P}(1:\cos\theta,0:\sin\theta)}$と表せます。
また、$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ であることから $\mathrm{Q}(q_1,q_2)$ とおくと
$-q_2=\cos\theta, q_1=\sin\theta$ が成り立つことから
$\underline{\mathrm{Q}(0:\sin\theta,4:-\cos\theta)}$と表せます。

(2) O から線分 AQ におろした垂線の足を H とおくと
$l=2\mathrm{AH}=2\cdot\mathrm{OA}\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ がわかります。



このグラフは $0\leq\theta\leq 4\pi$ で考えるとこの図のようになりますので
$0<\theta<\pi$ では$\underline{2}$の形が最も適当といえます。



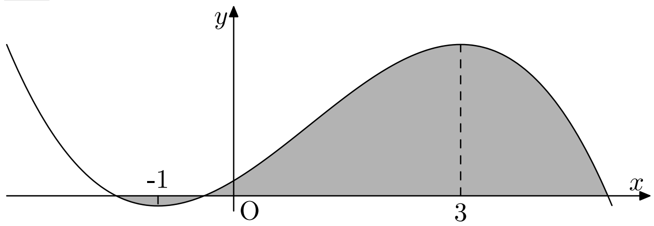
[2]

(1) x^3 の項,x^2 の項,x の項, 定数項は微分するとそれぞれ x^2 の項、x の項、定数項、0 となります。

ということで 3 次関数の導関数は2 次関数となります。
また $f(x)$ は $x=-1,3$ で極値をとることから $f'(-1)=f(3)=0$ となりますので因数定理により
$f'(x)$ は$\underline{(x+1)(x-3)}$で割り切れることがわかります。

(2) (1) と $x=-1$ で極小をとることからある負の実数 a を用いて
$f'(x)=a(x+1)(x-3)$ と表せます。
$(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$ と表せることから
$f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax^2-3ax+2$ とできます。
$f(-1)=-\frac{4}{3}$ ですので $-\frac{a}{3}-a+3a+2=-\frac{4}{3}$ です。
これを解くことで $a=-2$ がわかります。これは $a<0$ をみたしますので条件に合致し、よって
$\underline{f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x+2}$と求められます。

(3) グラフはこの図のようになりますので実数解は 3 個であり、負の解は2 個とわかります。



また $S=\int_a^b(-f(x))dx, T=\int_b^c f(x)dx$ がわかりますので

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx\\ &= -\int_a^b(-f(x))dx+\int_b^c f(x)dx=\underline{7:-S+T}\end{aligned}$$

がわかります。

[3]

(1) $\log_a b$ とは $a^x=b$ をみたす実数 x のことです。
ということで $10^{\log_{10}2}=2$ ですので $10^x=2$ となる x は
$\log_{10}2=\underline{1:0.3010}$ となります。
すなわち $10^{0.3010}=2$ ですのでこの式の $\frac{1}{0.3010}$ 乗を計算すると
$\left(10^{0.3010}\right)^{\frac{1}{0.3010}}=2^{\frac{1}{0.3010}}$ より $2^{\frac{1}{0.3010}}=10$ がわかります。
すなわち $2^x=10$ となる x は$\underline{5:\frac{1}{0.3010}}$となります。

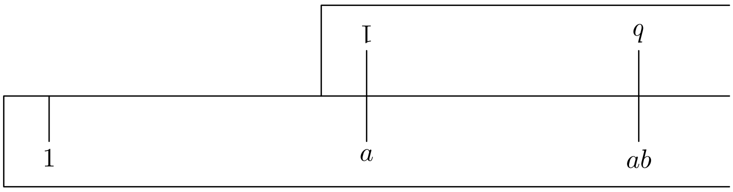
(2) (i) 対数ものさしにおいて 3 の目盛りは 1 の目盛りから右に $\log_{10}3$、4 の目盛りは 1 の目盛りから右に $\log_{10}4$ だけ離れたところに書か

れます。
ということで 3 の目盛りと 4 の目盛りの間隔は
$\log_{10} 4 - \log_{10} 3 = \log_{10} \frac{4}{3} < \log_{10} 2$ ですので
2:1 の目盛りと 2 の目盛りの間隔より小さいことがわかります。

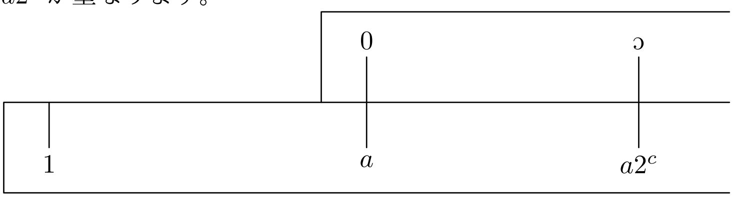
(ii) 対数ものさし B において 1 の目盛りと b の目盛りの間隔は $\log_{10} b$ だけありますので、a の目盛りは 1 の目盛りから右に $\log_{10} 2 + \log_{10} b$ だけ離れた位置にきます。
$\log_{10} 2 + \log_{10} b = \log_{10} 2b$ ですので真数を比較して1:$a = 2b$がわかります。

(iii) 対数ものさし C では c の目盛りは 0 の目盛りから左に $c \log_{10} 2$ だけ離れた位置にきます。
$c \log_{10} 2 = \log_{10} 2^c$ ですので真数を比較して2:$d = 2^c$がわかります。

(iv) 対数ものさし A の目盛り a と対数ものさし B の目盛り 1 を合わせると対数ものさし B の目盛り b と対数ものさし A の目盛り ab が重なります。



逆に考えると対数ものさし A の目盛り a と対数ものさし B の目盛り ab が重なっている場合対数ものさし B の目盛り 1 と対数ものさし A の目盛り a が重なっている、ともいえます。
また、対数ものさし A の目盛り a と対数ものさし C の目盛り 0 を合わせると対数ものさし C の目盛り c と対数ものさし A の目盛り $a2^c$ が重なります。



ということで、この方法では加減法 (選択肢の 0,1) ができません。
他の操作は以下のようにして実行することができます。
2:A の目盛り 13 と B の目盛り 1 を合わせ、B の目盛り 4 の位置にくる A の目盛り (52) を読み取る
3:A の目盛り 63 と B の目盛り 9 を合わせ、B の目盛り 1 の位置にくる A の目盛り (7) を読み取る
4:A の目盛り 1 と C の目盛り 0 を合わせ、C の目盛り 4 の位置にくる A の目盛り (16) を読み取る

5:A の目盛り 1 と C の目盛り 0 を合わせ、A の目盛り 64 の位置にくる C の目盛り (6) を読み取る
ということで実行できるものは2,3,4,5となります。

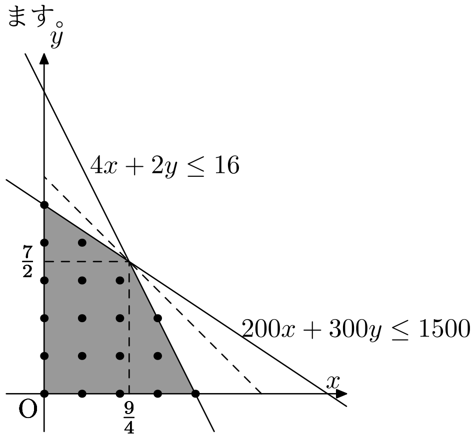
第２問

[1]

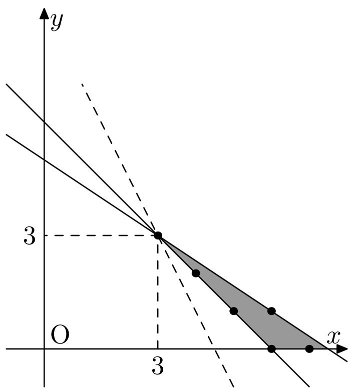
(1) (i) 摂取したエネルギーは $200x+300y$(kcal) であり脂肪は $4x+2y$(g) ですので
エネルギーの条件から$\underline{0{:}200x+300y \leq 1500}$
脂質の条件から$\underline{2{:}4x+2y \leq 16}$がわかります。

(ii) それぞれを検証しましょう。
$0{:}200x+300y=1500, 4x+2y=10$ ですので条件①②をともに満たします。
$1{:}200x+300y=1000, 4x+2y=20$ ですので条件①を満たし条件②を満たしません。
$2{:}200x+300y=1100, 4x+2y=18$ ですので条件①を満たし条件②を満たしません。
$3{:}200x+300y=1200, 4x+2y=16$ ですので条件①②をともに満たします。
したがって正しいものは$\underline{1,3}$とわかります。

(iii) 2 つの条件から食べられる量を表す領域はこの図の着色部となります。



このとき $100x+100y$ が最大となる場合は
$200x+300y=1500, 4x+2y=16$ を満たす点となります。
この関係式から$\underline{x=\dfrac{9}{4}, y=\dfrac{7}{2}}$がわかり食べられる量は最大で
$100 \cdot \dfrac{9}{4}+100 \cdot \dfrac{7}{2}=\underline{575\text{g}}$ とわかります。
また、小分けにできない場合に食べられる量の組はこの図で点が打たれている部分となります。
これらの点のうち $100x+100y$ が最大になる点は $x+y=5$ となる場合、すなわち $100 \cdot 5=\underline{500\text{g}}$ となる場合で、考えられる (x,y) の組は $(3,2),(2,3),(1,4),(0,5)$ の$\underline{4\text{ 組}}$となります。

(2) 

花子さんが設定した条件 $(100x+100y \geqq 600, 200x+300y \leqq 1500)$ をみたす領域はこの図の着色部であり、小分けにできない場合ではこの図の点が打たれている部分となります。
この図から脂質 $(4x+2y)$ が最小になる場合は $x=3, y=3$ すなわちA を 3 袋、B を 3 袋食べる場合であり、脂質は $4\cdot 3+2\cdot 3=\underline{18}$g 摂取することになります。

[2]

(1) A の座標を (p,q)、P の座標を (t,t^2) とすると M の座標は $\left(\dfrac{p+t}{2}, \dfrac{t^2+q}{2}\right)$ となります。

(i) A の座標が $(0,-2)$ のとき M の座標は $\left(\dfrac{t}{2}, \dfrac{t^2}{2}-1\right)$ となります。
$x=\dfrac{t}{2}, y=\dfrac{t^2}{2}-1$ とおくと $t=2x$ なので $\underline{1{:}y=2x^2-1}$ がわかります。

(ii) A の座標が $(p,-2)$ のとき M の座標は $\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{p}{2}, \dfrac{t^2}{2}-1\right)$ となります。
(i) と比較すると x 座標が $\dfrac{p}{2}$ だけ加算されていることがわかります。
したがって M の軌跡は (i) の軌跡を x 軸方向に $\underline{0{:}\dfrac{1}{2}p}$ だけ平行移動させたものとわかります。

(iii) M の軌跡と $y=x^2$ のグラフが共有点をもつとき、M がこのグラフ上にくるような t が存在することになります。
M が $y=x^2$ のグラフにくる場合 $\dfrac{t^2+q}{2}=\left(\dfrac{p+t}{2}\right)^2$ が成り立ちます。
これを整理すると $t^2-2pt+(2q-p^2)=0$ がわかります。
さらに平方完成して $(t-p)^2=2(p^2-q)$ となります。この状態で

検証しましょう。

$q=0$ のとき $(t-p)^2=2p^2$ ですので $p=0$ ならば $t=0$、$p\neq 0$ ならば $t=(1\pm\sqrt{2})p$ のときに M が $y=x^2$ のグラフ上にくることがわかります。

ということで選択肢 0 は誤り ($p=0$ のとき 1 個である)、選択肢 1 は正しい、選択肢 2 は誤り (0 個の場合はない) とわかります。

他の選択肢については、

3:$q<p^2$ のとき $p^2-q>0$ より $t=p\pm\sqrt{2(p^2-q)}$ のとき M が $y=x^2$ のグラフ上にくることから、共有点はつねに 2 個となります。したがって誤りです。

4:$q=p^2$ のとき $p^2-q=0$ ですので $t=p$ のときのみ M が $y=x^2$ のグラフ上にきます。したがって共有点はつねに 1 個なので正しいです。

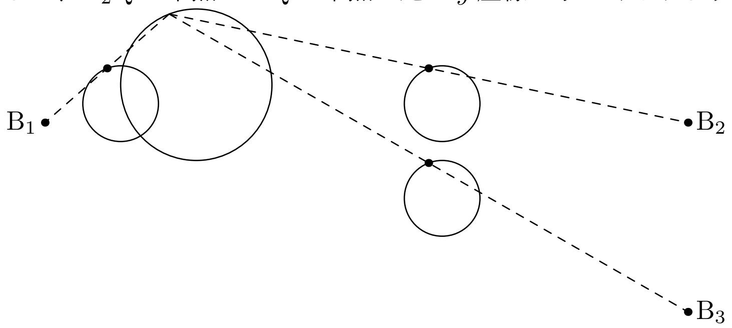
5:$q>p^2$ のとき $p^2-q<0$ です。t が実数のとき $(t-p)^2\geq 0$ より $(t-p)^2=2(p^2-q)$ をみたす t は存在しません。したがって共有点はつねに 0 個なので正しいです。

したがって、正しいものは$\underline{1,4,5}$とわかります。

(2) 線分 OQ の中点の軌跡を考えましょう。点 Q が固定されているとき、中点を求める式を考えると

A_1Q の中点は OQ の中点より左側にきます。

また、A_2Q の中点は OQ の中点と比べ y 座標が小さくなります。



他も同様に考えることで、線分 OQ の中点が描く軌跡は中央の円であるとわかります。

Q の座標を (x,y) とおくと線分 OQ の中点の座標は $\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2}\right)$ となりますので軌跡から $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=4$ が成り立ちます。

この式を 4 倍することで C の方程式は$\underline{3{:}x^2+y^2=16}$であるとわかります。

第３問

(1) 読書をしない人数の比率は二項分布 $B(400, 0.5)$ に従うことから、期待値は $400 \cdot 0.5 = \underline{200}$ 人といえます。
また標準偏差は $\sqrt{400 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 10$ となります。
読書をしない人数を変数 X で表すと、標本のうちで読書をしない比率は $\dfrac{X}{400}$ と表されます。この $\dfrac{X}{400}$ を新しい変量 Y で表すと Y の平均と標準偏差は $\dfrac{1}{400}$ 倍となります。ということで
Y の平均は $\dfrac{200}{400} = \underline{0.5}$、標準偏差は $\dfrac{10}{400} = \underline{0.025}$ となります。

(2) (i) 今度は読む人数の分布を考えます。ある分布から変量 X をとると変量の平均は分布の平均に等しく、変量の分散は分布の分散の $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ 倍に等しくなりますのですなわち平均 24 分、標準偏差は $\dfrac{\sigma}{\sqrt{400}} = \underline{\dfrac{\sigma}{20}}$ の分布に従います。

(ii) $\sigma = 20$ のとき標本平均の分散は $\dfrac{40}{20} = 2$ となりますから標本平均の分散を σ' とおくと $30 = 24 + 3\sigma'$ が成り立ちます。
ということで正規分布とした場合平均が 30 分以上となる確率は 0.5 から分布表で $z_0 = 3.00$ のときの面積を引いた値、すなわち 0.5-0.4987=0.0013となります。
また、およそ 0.1587 となる値を正規分布表から考えると、表に 0.1587 はありませんが 0.5-0.1587=0.3413 は $z_0 = 1.00$ のときの値としてみつかります。
ということは母集団の平均から標準偏差以上 (もしくは以下) 離れるような確率を探すということになります。
すると「標本平均が母集団の平均から標準偏差以上離れる」ということが4:標本 400 人の読書時間の平均が 26 分以上と表現されるとわかります。
他の選択肢については、
0,1:無作為抽出する、ということは母集団の分布が関係しますが、現在正規分布と仮定していませんので不適切です。
2,3:現在母平均は 24 分と仮定していますので、選択肢 2 が成立する確率は 0、選択肢 3 が成立する確率は 1 といえます。

(3) (i) 信頼度 95%の信頼区間を作るには面積が $\dfrac{0.95}{2} = 0.4750$ となる z_0 の値を探します。すると $z_0 = 1.96$ がみつかります。
信頼区間で用いる標準偏差は $\dfrac{\sigma}{20}$ ですので信頼区間は
$\underline{5 : \overline{X} - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{20}} \leq m \leq \overline{X} + 1.96 \times \dfrac{\sigma}{20}$ となります。

(ii) 母平均 m に対して標本を抽出したときの信頼度 b の信頼区間が

$A \leq m \leq B$ である、ということは、「標本から得られた値 A, B において母平均が $A \leq m \leq B$ をみたす可能性が b である」といえます。これをこの問題の調査でいえば

<u>4:大きさ 400 の標本を 100 回無作為抽出すれば、</u>

<u>そのうち 95 回程度は信頼区間が m を含んでいる</u>といえます。

第４問

(1) (i) 対話から $a_{n+1}=3a_n-8$ を $a_{n+1}-k=3(a_n-k)$ に変形する、ということですから、前後の式が同じになるように k の値を設定することになります。

$a_{n+1}-k=3(a_n-k)$ を展開して整理すると $a_{n+1}=3a_n-2k$ です。

すなわち定数項を比較して $8=2k$ ですので $\underline{k=4}$ がわかります。

(ii) ということで $a_{n+1}-4=3(a_n-4)$ がわかり、$\{a_n-4\}$ は公比 3 の等比数列だとわかりました。

$a_1-4=2$ ですので $a_n-4=2\cdot 3^{n-1}$ です。

すなわち $\underline{a_n-2\cdot 3^{n-1}+4}$ とわかります。

(2) (i) 花子さんが $b_2=10$ と求めてくれていますので、$p_1=10-4=\underline{6}$ と計算できます。(ちなみに b_3, b_4 も正しく求めています)

(ii) 階差数列を求めたいですので、2 式目を作って差分をとるとよいでしょう。

漸化式の n を $n+1$ に置き換えることで $b_{n+2}=3b_{n+1}-8(n+1)+6$ が得られます。

これから $b_{n+1}=3b_n-8n+6$ を引くことで

$b_{n+2}-b_{n+1}=3(b_{n+1}-b_n)-8$ すなわち $\underline{p_{n+1}=3p_n-8}$ が得られました。

(iii) ということで $\{p_n\}$ の漸化式は問題 A の漸化式と完全に一致しました。ということで p_n の一般項は a_n の一般項と等しく、

$\underline{p_n=2\cdot 3^{n-1}+4}$ とわかります。

(3) (i) 今度は問題 B を問題 A と同様に解いてみよう、ということになったようです。b_{n+1} は b_n に n の 1 次式を加算していますので、n の 1 次式をうまく設定するとできそうです。ということで左辺に $(n+1)$ の式、右辺に n の式を入れて

$\underline{3{:}b_{n+1}+s(n+1)+t=3\,(0:b_n+sn+t)}$ を考えることができます。

(ii) 展開して整理すること $b_{n+1}=3b_n+2sn+(2t-s)$ とできます。

n の係数と定数項を比較することで $2s=-8, 2t-s=6$ がわかりますので $\underline{s=-4, t=1}$ と求められます。

(4) (2) の方法で計算すると

$$\begin{aligned} b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}p_k=4+\sum_{k=1}^{n-1}(2\cdot 3^{k-1}+4) \\ &= 4+2\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}+4(n-1) \end{aligned}$$

とできます。また、(3) の方法で計算すると
$b_1 - 4\cdot 1 + 1 = 1$ より $b_n - 4n + 1 = 3^{n-1}$ がわかります。
どちらの方法でも$\underline{b_n = 3^{n-1} + 4n - 1}$と求められます。

(5) (2)(3) の方法を応用することを考えます。
(2) の方法では階差数列を考えましたのでまずは $q_n = c_{n+1} - c_n$ を考えます。
$c_2 = 30$ より $q_1 = 14$ であり、$c_{n+2} = 3c_{n+1} - 4(n+1)^2 - 4(n+1) - 10$ を考えると
$q_{n+1} = 3q_n - 4(2n+1) - 4$ すなわち $q_{n+1} = 3q_n - 8n - 8$ がわかります。
さらに $r_n = q_{n+1} - q_n$ を考えます。
q_n の漸化式から $q_2 = 26$ ですので $r_1 = 12$ であり、
$q_{n+2} = 3q_{n+1} - 8(n+1) - 8$ を考えることで $r_{n+1} = 3r_n - 8$ がわかります。
ということで $r_{n+1} - 4 = 3(r_n - 4)$ となり $r_n = (12-4)\cdot 3^{n-1} + 4 = 8\cdot 3^{n-1} + 4$ がわかりました。これより

$$\begin{aligned} q_n &= q_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1} + 4) \\ &= 14 + 8\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1} + 4(n-1) = 4\cdot 3^{n-1} + 4n + 6 \end{aligned}$$

がわかり、これより

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4\cdot 3^{k-1} + 4k + 6) = 16 + 4\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1} + 2n(n-1) + 6(n-1)$$

と計算できます。また、(3) の方法を応用すると
$c_{n+1} + x(n+1)^2 + y(n+1) + z = 3(c_n + xn^2 + yn + z)$ と変形することが考えられます。整理すると
$c_{n+1} = 3c_n + 2xn^2 + (2y - 2x)n + (2z - y - x)$ となります。
それぞれの係数を比較すると $2x = -4, 2y - 2x = -4, 2z - y - x = -10$ より $x = -2, y = -4, z = -8$ がわかります。
したがって $c_n - 2n^2 - 4n - 8 = (c_1 - 2 - 4 - 8)\cdot 3^{n-1} = 2\cdot 3^{n-1}$ がわかります。
いずれの方法でも、$\underline{c_n = 2\cdot 3^{n-1} + 2n^2 + 4n + 8}$と求められます。

第５問

(1) (i) 中点を表すベクトルの式から $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\underline{\frac{1}{2}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right), \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)$ がわかります。

また、三角形 OAB,OAC,OAD,OBC,OBD がすべて正三角形ですので

$\vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{a}\cdot\vec{c}, \vec{a}\cdot\vec{d}, \vec{b}\cdot\vec{c}, \vec{b}\cdot\vec{d}$ はいずれも長さ 1 の 2 本でそれらのなす角が 60° であるものの内積です。

ということでその値は $1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\underline{\frac{1}{2}}$ となります。

(ii) $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ を利用して $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\vec{a}\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)-\vec{c}\right\}\\ &= \vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}=0\end{aligned}$$

となります。また $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(k\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\vec{a}\cdot\left\{\frac{k}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{c}\right\}\\ &= \frac{k}{2}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{k}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{3}{4}k-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と計算できます。両者が等しくなることから $\frac{3}{4}k-\frac{1}{2}=0$ となりますので $\underline{k=\frac{2}{3}}$ がわかります。

(iii) 方針 1 を利用する場合、$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ に等しい 2 種類の式を利用します。

(ii) より $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ が得られましたので

$\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ がわかります。これを変形することで

$\underline{\vec{d}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}}$ が得られます。

方針 2 を利用する場合、三角形 OCD を考えます。$\angle\mathrm{DON}=\frac{\theta}{2}$ ですから

$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|=\cos\frac{\theta}{2}$ です。倍角の公式 $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$ を利用することで

$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2=\cos^2\frac{\theta}{2}=\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}$ がわかります。

(iv) 方針 1 を利用するしたい場合

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\left|\vec{c}\right|^2=-\frac{1}{3}$$

と計算することで求められます。

また、方針 2 を利用したい場合

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}} &= \left\{\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}) = \frac{1}{2} \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

を計算して $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)^2 = \frac{1}{4}$、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$
を比較することで求められます。
いずれの場合でも、$\underline{\cos\theta = -\frac{1}{3}}$と求められます。

(2) (i) 三角形 OAC,OAD,OBC,OBD はこちらでも正三角形ですので
$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{d} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{d} = \frac{1}{2}$ はこちらでも成り立ちます。ということで AB の中点を M,CD の中点を N とすると $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}$ はここでも成り立ちます。
また (1) の方針 2 における $\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2$ はここでも使うことができ、
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha, \left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\beta$ が成り立ちます。
方針 2 で考えていた等式 $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2$ にこれらを代入すると
$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\beta\right)$ が成り立ちますので、選択肢でみたす関係式は
$\underline{1{:}(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta) = 1}$となります。

(ii) $\alpha = \beta$ のとき関係式にこれを代入することで $(1+\cos\alpha)^2 = 1$ がわかります。
$1+\cos\alpha$ がとりうる値は 0 以上 2 以下ですから $1+\cos\alpha = 1$ となり、これより $\cos\alpha = 0$ がわかり$\underline{\alpha = 90°}$がわかります。
このとき $\vec{d} = s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおき内積で関係式を作ることを考えます。
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{d} = \cos\alpha = 0$ となりますので $\vec{d}\cdot\vec{a}, \vec{d}\cdot\vec{b}, \vec{d}\cdot\vec{c}$ を考えることで
$\frac{1}{2} = s+\frac{1}{2}u, \frac{1}{2} = t+\frac{1}{2}u, 0 = \frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t+u$ がわかります。
これらより $s = 1, t = 1, u = -1$ となりすなわち $\vec{d} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ がわかります。
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数の和が 1 になりましたので D は<u>1:平面 ABC 上</u>にあることがわかります。

所感

今回も問題量が多く圧倒される内容でした。

第 1 問

小問 3 種が集まりました。

[**1**]

三角関数をもとにした問題です。
(1) の P の座標はほとんど定義ですので絶対に落としたくないところです。
(2) は見やすい関数に変形して導いていきましょう。

[**2**]

整式の微積分に関する問題です。
(1)(2) は与えられた条件から関係式や性質を導いていけば解けるでしょう。
(3) はグラフを思い浮かべてれば難しくはないと思います。

[**3**]

指数対数を用いた問題です。
40 代以上なら使ったこともあるかもしれない対数定規がもとになっています。
知らないとかなり苦戦する問題といえそうです。

第 2 問

時間がかかる小問 2 種が用意されました。

[**1**]

線形計画法をもとにした問題です。
(1) は (i) をもとに条件をみたす領域を考えれば難しくないです。
(2) も条件を見ながら領域を作っていけばいけるでしょう。

[**2**]

図形と式をもとにした問題です。
(1) は M の軌跡を考えることになりますが (iii) は考える状況が多く手ごわいです。
(2) はこの共通テストが実施されるであろう年に行われる東京オリンピックにかけた問題のようです。いろいろ考えるより直感で解くのがよさそうです。

第３問

統計に関する問題です。
(1) は二項分布を応用した計算です。割合で出す計算は戸惑いそうです。
(2) は標本平均に関する問題です。(ii) の選択は読解力を要するので手間がかかります。
(3) は推定に関する問題です。正しく理解していないと答えられない問題がそろっています。

第４問

数列に関する問題です。対話形式で進んでいきます。
(1)(2) は解き方も出ているのでやりやすいでしょう。
(3) はちょっとした発想が必要ですが慣れればいけるでしょう。
(5) が本題です。ここまでの対話からやりかたを見出して解いていきましょう。

第５問

空間ベクトルを利用した問題です。
(1) では正三角形 6 枚で構成された立体で考えていきます。(i) は中点や正三角形を利用して内積や等式を導きましょう。(ii) はうまくベクトルの等式を変形できるかがものをいいます。(iii) の 2 つの方針は図形や三角関数を思い浮かべながら解くことになります。方針が 2 つ示されているので両方試せば検算も可能です。
(2) は (1) で考えた立体から面を 2 枚除いたものを考えています。(1) で得られた性質のうちこちらでも成り立つものを判断して解き進めましょう。
なお、(1)(2) で記述されている「O、線分 AB の中点、線分 CD の中点が同一直線上にある」という事実は以下のように導くことができます。

- 三角形 OAB,CAB,DAB はいずれも底辺を AB とする二等辺三角形なので、OM,CM,DM はいずれも辺 AB に垂直
- したがって O,C,D は辺 AB の中点で垂直に交わる平面上にくる

- また、三角形 OCM,ODM は MC=MD=MO であり OC=OD なので合同な三角形であり、これより $\angle MOC = \angle MOD$ がわかる

- 三角形 OCD は OC=OD の二等辺三角形なので $\angle NOC = \angle NOD$ がわかる

- $\angle NOC = \angle MOC, \angle NOD = \angle MOD$ と O,N,M が同一平面上にくることからこの 3 点が同一直線上にくることがわかる