1　解答一覧

第 1 問

問題	ア、イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
解答	1,4	1	3	1	1	5	5

記述 (あ):$\{1\} \subset A$

記述 (い):$x\tan 33^\circ \leq 18$ または $26 \leq x \leq \dfrac{18}{\tan 33^\circ}$

(不等号は $<$ でないこと、33° の三角比を使用していること)

第 2 問

問題	アイウ	エオ	カ	キ	ク	ケコサシス
解答	$2\sqrt{57}$	$8\sqrt{3}$	0	1,4	2,3	$\frac{30\pm 6\sqrt{5}}{5}$

問題	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
解答	8	6	1	3	2	4	3

記述 (う):時刻によらず $S_1 = S_2 = S_3$

(時刻によらないことに言及、「t において…」と記述している場合 t を説明していること)

第 3 問

問題	アイウ	エオカ	キク	ケ	コサシ	スセソ	タチツ	テ
解答	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{2}{3}$	4	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{51}$	1

第 4 問

問題	アイ	ウ	エ	オ	カ	キク	ケコサシ	ス
解答	1,5	7	1	1	4	4,4	-4,8,3	1,2

問題	セ	ソタ	チツテト
解答	7	13	4033

第 5 問

問題	アイ	ウ	エオ	カ	キ	クケ
解答	0,7	5	2,3	3	4	3,6

2　解法

第 1 問

[1]

(1) 「S は T の部分集合である」という式は「$S \subset T$」となります。
「1 という集合」は $\{1\}$ と表記することに気を付けましょう。
また、似た表記「$1 \in A$」は「1 という要素は集合 A に属する」という意味ですのでしっかり区別しましょう。

(2) 「p ならば q である」という命題の反例は、仮定 p をみたしさらに結論 q をみたさないものを持ち出すことになります。それぞれを検証しましょう。
0:0 は有理数ですので $y \in B$ が成り立ちません。(仮定をみたさない)
1:x, y は無理数で $x + y = 2$ となりますので $x \in B, y \in B, x + y \notin B$ が成り立ちます。
2:$x + y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ となりますので $x + y \in B$ が成り立ちます。(結論をみたす)
3:根号があるので x, y が無理数に見えますが $\sqrt{4} = 2$ ですので $x \notin B, y \notin B$ です。(仮定をみたさない)
4:$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ですので $x + y = 1$ となり $x \in B, y \in B, x + y \notin B$ が成り立ちます。
5:$x + y = 2\sqrt{2}$ となりますので $x + y \in B$ が成り立ちます。(結論をみたす)
ということで<u>1,4</u>が反例として有効であるとわかります。

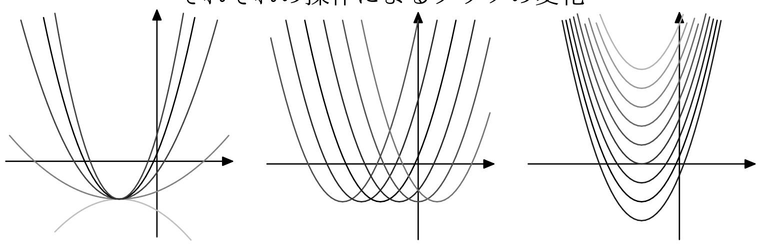
[2]

(1) グラフを確認しますと、x 軸と $y = f(x)$ のグラフは 2 箇所で交わっており、いずれも O の左側であることがわかります。これはすなわち<u>1:方程式 $f(x) = 0$ の解は異なる 2 つの負の解をもつ</u>ことを表します。

(2) まず $f(p) = q$ です。図 1 の状態では $q < 0$ ですので q を変化させないと $f(x) \leq 0$ となるような x が発生します。また $a > 0$ なので q を正の値にすると $f(x)$ は最小値が q となり $f(x) > 0$ がすべての実数で成り立ちます。ということで「$f(x) > 0$ の解がすべての実数であること」が起こりうる操作は<u>3:操作 Q のみ</u>とわかります。
また、図 1 の状態では $a > 0$ ですので $f(x)$ はいくらでも大きくできます。ということで a を変化させないと $f(x) > 0$ となる x が存在することになります。また $q < 0$ なので a を負の値にすると $f(x)$ は最大値が

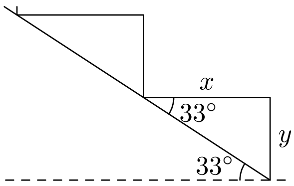
q となり $f(x) > 0$ となる x がなくなります。ということで「$f(x) > 0$ の解がないこと」が起こりうる操作は1:操作 A のみとわかります。

それぞれの操作によるグラフの変化



操作 A　　操作 P　　操作 Q

[3]

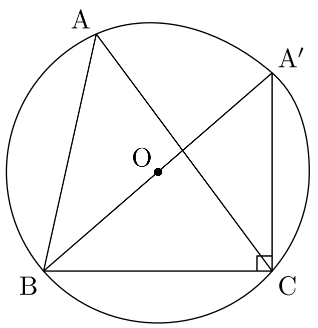


踏面を $x$cm, 蹴上げを $y$cm とすると傾斜が $33°$ のとき $x\tan 33° = y$ が成り立ちます。ということで蹴上げ y を 18cm 以下にする場合 $x \tan 33° \leq 18$ となります。
これでもセンターは正解扱いとしていますが、厳密な不等式にする場合はもうひと押しします。

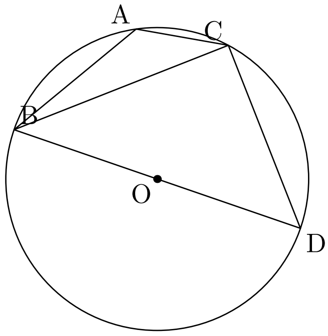
建築基準法から踏面は 26cm 以上ということですので $x \geq 26$ と合わせます。ということで厳密な不等式は $26 \leq x \leq \dfrac{18}{\tan 33°}$ となります。

[4]

(1) 鋭角の場合に円周角の定理を用いて $\mathrm{C} = 90°$ のときの証明にもっていこうと考えたようです。
$\mathrm{A'CB} = 90°$ となる場合は $\mathrm{A'B}$ が円 O の直径になる場合です。このとき線分 $\mathrm{A'B}$ は O を通りますので $\mathrm{A'}$ は
1:直線 BO と円 O の交点のうち B と異なる点となります。



$\angle \mathrm{A} < 90°$



$\angle \mathrm{A} < 90°$

(2) 今度は鈍角の場合を考えてみます。まず BD が円 O の直径になりますので三角形 BCD は C が直角である三角形となります。ということで $\sin\angle\mathrm{BDC} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}$ が成り立ちますので
$\underline{5 : \sin\angle\mathrm{BDC}} = \dfrac{a}{2R}$ がわかります。
また円に内接する四角形は対角の和が 180° となりますので $\angle\mathrm{BDC} + \angle\mathrm{BAC} = 180^\circ$ より
$\angle\mathrm{CAB} = \underline{5 : 180^\circ - \angle\mathrm{BDC}}$ となります。

第２問

[1]

(1) $\angle \mathrm{A}=60^\circ$ より $\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=1:2$ ですので $AC=\dfrac{20}{2}=10$ です。
ということでこの三角形では 10 秒後に移動が終了します。

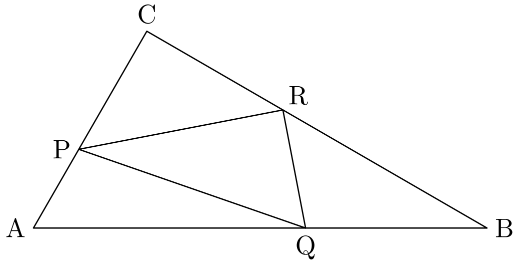
(i) Q の速さは毎秒で $\dfrac{20}{10}=2$ となることがわかります。
2 秒後は AP=2,BQ=4 となりますので AQ=16 となります。ということで余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{AP}^2+\mathrm{BQ}^2-2\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}\cdot\cos 60^\circ\\ &= 2^2+16^2-2\cdot 2\cdot 16\cdot\frac{1}{2}=4+256-32=228\end{aligned}$$

ということで $\mathrm{PQ}=\sqrt{228}=\underline{2\sqrt{57}}$ です。また

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}\cdot\sin 60^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{8\sqrt{3}}\end{aligned}$$

がわかります。

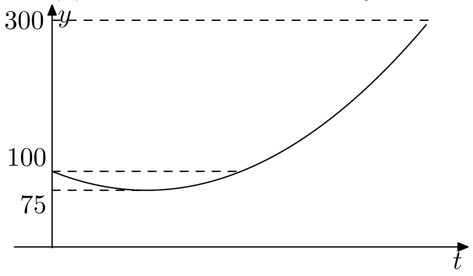


(ii) $\mathrm{BC}:\mathrm{AC}=\sqrt{3}:1$ ですので R の速さは毎秒 $\sqrt{3}$ です。
ということは出発してから t 秒後は $\mathrm{CP}=\mathrm{AC}-\mathrm{AP}=10-t,\mathrm{CR}=\sqrt{3}t$ となります。
したがって C が直角であることを利用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{PR} &= \sqrt{\mathrm{CP}^2+\mathrm{CR}^2}=\sqrt{(10-t)^2+3t^2}\\ &= \sqrt{4t^2-20t+100}=\sqrt{(2t-5)^2+75}\end{aligned}$$

と変形できます。すなわち PR は出発から $\dfrac{5}{2}$ 秒後に最小となりますので $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ より小さい値はとりえないことがわかり、また $\mathrm{PR}=5\sqrt{3}$ となる場合は 1 回だけであることもわかります。
また出発時の値は 10、到着時の値は $10\sqrt{3}$ ですので $y=\mathrm{PR}^2$ のグラフを考えることで
$5\sqrt{3}<\sqrt{y}\leq 10$ となる場合は 2 回、$10<\sqrt{y}\leq 10\sqrt{3}$ となる場合

は 1 回だけであるとわかります。



ということで提示されている値の中で考えると $4\sqrt{5}=\sqrt{80}$ から
とり得ない値：$\underline{0{:}5\sqrt{2}}$、1 回だけとり得る値：$\underline{1{:}5\sqrt{3}, 4{:}10\sqrt{3}}$、2
回だけとり得る値：$\underline{2{:}4\sqrt{5}, 3{:}10}$となります。

(iii) AP : PC $= s : 1-s$ となった場合を考えます。$a=\mathrm{BC}, b=\mathrm{CA}, c=\mathrm{AB}$ とすると 3 点は b 秒後に頂点に到達しますので
Q の速さは $\dfrac{c}{b}$、R の速さは $\dfrac{a}{b}$ となります。
$\mathrm{AP}:\mathrm{PC}=s:1-s$ のとき $\mathrm{AP}=sb$ ですので出発から sb 秒後の状態です。
ということは $\mathrm{BQ}=sb\cdot\dfrac{c}{b}=sc, \mathrm{AQ}=c-sc=(1-s)c$ となり、
$\mathrm{CR}=sb\cdot\dfrac{a}{b}=sa, \mathrm{BR}=a-sa=(1-s)a$ となります。
したがって三角形 ABC の面積を S_0 として S_1, S_2, S_3 を計算しますと

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_0\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AB}}=S_0\cdot\frac{sb}{b}\cdot\frac{(1-s)c}{c}=s(1-s)S_0\\
S_2 &= S_0\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BC}}=S_0\cdot\frac{sc}{c}\cdot\frac{(1-s)a}{a}=s(1-s)S_0\\
S_3 &= S_0\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CA}}=S_0\cdot\frac{sa}{a}\cdot\frac{(1-s)b}{b}=s(1-s)S_0
\end{aligned}$$

となりすべて $s(1-s)S_0$ と等しくなりますので
時刻によらず $S_1=S_2=S_3$がわかります。

(2) 三角形 ACB の面積は C が直角であることを利用して $\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30$ です。
また、(1)(iii) の考察から三角形 APQ,BQR,CRP の面積は常に等しくなりますからその値を S' としたとき、面積が 12 となる場合は $30-3S'=12$ の場合であり、すなわち $S'=6$ となる場合です。
AC:CB=12:5 であることから R は毎秒 $\dfrac{5}{12}$ の速さで進みます。ということで出発から t 秒後は
$\mathrm{PC}=\mathrm{CA}-\mathrm{AP}=12-t, \mathrm{CR}=\dfrac{5}{12}t$ となりますので、このときの三角形 CRP の面積は
$\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CR}=\dfrac{5t(12-t)}{24}$、ということでこれが 6 となる場合を求める

ということで $\dfrac{5t(12-t)}{24}=6$ を解くことになります。
整理すると $5t^2-60t+144=0$ となりますので公式をあてはめて
$t=\dfrac{30\pm\sqrt{30^2-5\cdot 144}}{5}=\underline{\dfrac{30\pm 6\sqrt{5}}{5}}$ がわかります。$6\sqrt{5}<30$ なのでどちらも成立します。

[2]

(1) x の平均は $\dfrac{1+2}{2}=1.5$、分散は $\dfrac{(1-1.5)^2+(2-1.5)^2}{2}=0.25$ となりますので、x の平均値は<u>8:1.50</u>、標準偏差は $\sqrt{0.25}=\underline{6:0.50}$ がわかります。
y は使用している値が全体で等しいですので平均値は 1.5、標準偏差は 0.5 となります。
共分散は $\dfrac{(1-1.5)\cdot(2-1.5)+(2-1.5)\cdot(1-1.5)}{2}=-0.25$ となります。
相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで得られますのでその値は $\dfrac{-0.25}{0.5\cdot 0.5}=\underline{1:-1}$ となります。

(2) 3 行目の y を 2 にすると計算ができなくなってしまいました。この原因を考察します。
x の平均と標準偏差は変わりませんが、y の平均は $\dfrac{2+2}{2}=2$ となり分散は $\dfrac{(2-2)^2+(2-2)^2}{2}=0$ となってしまいました。ということは標準偏差も 0 となってしまいますので共分散を割って値を求めることができません。ということで理由は<u>3:変量 y の標準偏差の値が 0 であるから</u>といえます。

(3) 相関係数として取りうる値を考えることにしたようです。ひとつひとつ検証します
0:相関係数が 0 になる場合は x 変量 2 個が異なり y 変量 2 個が異なる必要があります。すると x,y の平均は変量の中間にくるので x の平均 $\bar{x}$ などを使って得られる変量 $x-\bar{x}$ は一方が正で他方が負になります。すなわち $(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})$ と $(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})$ の符号をくらべますと $x_1-\bar{x}$ と $x_2-\bar{x}$ の符号が異なることなどから同符号となることがわかり、とくに共分散が 0 になりえないことを示しています。
1:変量 x を k 倍した新しい変量 x' を考えると、平均は k 倍、標準偏差は $|k|$ 倍、共分散は k 倍になります。これを利用すると $(x,y)=(1,1),(2,2),(3,3)$ のとき相関係数が 1.00 ということから
x 変量を-1 倍して $(x,y)=(-1,1),(-2,2),(-3,3)$ とすると相関係数は-1.00 となります。
2:$(x,y)=(1,1),(1,1),(2,2),(2,2)$ を考えると、x,y の平均は 1.5、標準

偏差は 0.5 となります。

共分散は $\dfrac{(1-1.5)\cdot(1-1.5)\cdot 2+(2-1.5)\cdot(2-1.5)\cdot 2}{4} = 0.25$ ですので相関係数は 1.00 となります。

3:x の平均は $\dfrac{99}{50}$、分散は $\dfrac{49}{50^2}$ より標準偏差は $\dfrac{7}{50}$ です。

y の平均は $\dfrac{1}{50}$ であり分散は $\dfrac{49}{50^2}$, 標準偏差は $\dfrac{7}{50}$ となります。

したがって共分散が $\dfrac{-49}{50^2}$ と計算できますので、相関係数は-1.00 となります。

4:x, y の平均は 1.5、分散は 0.25 より標準偏差は 0.5 です。

共分散は 0.25 となりますので相関係数は 1.00 となります。

したがって誤った記述は

2:値の組の個数が 4 の場合は相関係数が 1.00 になることはない。です。

(4) 相関係数の値は散布図の点が4:直線にそって分布する度合となります。相関係数がとりうる値の絶対値は 1 であり、このような場合は一直線に分布することがいえます。ということは値の組が 2 個の場合は散布図では ２点以下になりますから3:平面上の異なる 2 点は必ずある直線上にあることになり、つまり相関係数の絶対値は 1 になる、ということがいえます。

第３問

(1) 1 番目の人が箱 A を選んで当たりくじを引く確率は $P(A)=\dfrac{1}{2}, P_A(W)=\dfrac{10}{100}$ であるので $P(A\cap W)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{10}{100}=\underline{\dfrac{1}{20}}$

また 1 番目の人が箱 B を選んで当たりくじを引く確率は $P(B\cap W)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{100}=\dfrac{1}{40}$ でありこれらは互いに排反なので

当たりくじを引く確率は $\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{40}=\underline{\dfrac{3}{40}}$ となります。

ということで当たりくじを引いていた場合に箱 A から引いていた確率は $\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{40}}=\underline{\dfrac{2}{3}}$ であることがわかります。

また $P_W(B)=1-P_W(A)=\dfrac{1}{3}$ ですので、2 番目の人が 1 番目の人と同じ箱を選んだ場合、1 番目の人が A を選んでいたら当たりくじは 99 本のうちの 9 本、B を選んでいたら 99 本のうちの 4 本となりますので

$P_W(A)\cdot\dfrac{9}{99}+P_W(B)\cdot\underline{\dfrac{4}{99}}=\dfrac{2\cdot 9+1\cdot 4}{3\cdot 99}=\dfrac{22}{3\cdot 99}=\underline{\dfrac{2}{27}}$ がわかります。

それに対し 2 番目の人が 1 番目の人と異なる箱を選んだ場合、当たりを引く確率は

$P_W(A)\cdot\dfrac{1}{20}+P_W(B)\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{2\cdot 1+1\cdot 1\cdot 2}{3\cdot 20}=\dfrac{4}{3\cdot 20}=\underline{\dfrac{1}{15}}$ となります。

(2) 今度は B に 7 本ある場合の確率です。当たりくじを引く確率は

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{10}{100}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{100}=\dfrac{17}{200}$ ですのでこの場合の $P_W(A)$ は $\dfrac{\frac{10}{200}}{\frac{17}{200}}=\dfrac{10}{17}$ です。

同様に $P_W(B)=\dfrac{7}{10}$ がわかりますので同じ箱から選んだ場合当たりを引く確率は

$\dfrac{10}{17}\cdot\dfrac{9}{99}+\dfrac{7}{17}\cdot\dfrac{6}{99}=\dfrac{10\cdot 3+7\cdot 2}{17\cdot 33}=\dfrac{44}{17\cdot 33}=\underline{\dfrac{4}{51}}$ となります。

(3) (1) の会話で 5 本ならば同じ箱、(2) の会話で 7 本ならば異なる箱であれば当たりを引く確率が高くなることがわかります。さらに B にあるあたりが少ないほど当たりを引いた場合において A を選んでいた確率が上がることから 4 本ならば同じ箱を引くのが高いと考えられます。

ということで残りの 6 本の場合を計算しましょう。

$P(A\cap W)=\dfrac{1}{20}, P(B\cap W)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{100}=\dfrac{3}{100}$ より

$P(W)=\dfrac{2}{25}, P_W(A)=\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{2}{25}}=\dfrac{5}{8}, P_W(B)=\dfrac{3}{8}$ がわかります。

したがって同じ箱から引いた場合に当たりを引く確率を p, 異なる箱から引いた場合に当たりを引く確率を q とすると

$p=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{9}{99}+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{99}=\dfrac{60}{8\cdot 99}, q=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{6}{100}+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{10}{100}=\dfrac{60}{8\cdot 100}$

となり、分子が同じで分母が異なる値になりました。これより $p>q$ すなわち同じ箱から当たりを引く確率が大きいと分かりましたので、正し

い組合せは
1:4 本〜6 本なら同じ箱、7 本なら異なる箱であるとわかります。

第４問

天秤を利用した整数方程式の問題です。

(1) まずは釣り合った状態で皿に乗せられているものの重さを計算しましょう。

		皿 A	皿 B
最初	A に物体 X、B に 3g 分銅 3 個	X	3g 3 個
次	A に 8g 分銅 1 個	X,8g1 個	3g3 個
最後	B に 3g 分銅 2 個	X,8g1 個	3g5 個

最終的にこの状態になりますので、質量を比較すると$\underline{M + 8 \times 1 = 3 \times 5}$が成り立つことがわかります。これを解くと$\underline{M = 7}$がわかります。
変形して $3 \times 5 + 8 \times (-1) = M$ となることから $x = 5, y = -1$ は $3x + 8y = M$ の解といえます。

(2) $M = 1$ で皿 B に 3g の分銅が 3 個のっている場合、B にのっているものの質量は 9g とわかります。
したがって分銅 8g を a 個のせて釣り合っている場合、A にのっているものの質量から $1 + 8a = 9$ が成り立ちますので $a = 1$ すなわち8g の分銅を 1 個のせれば釣り合うことになります。
すなわち $1 + 8 = 3 \cdot 3$ が成り立ちますので、M が自然数ならばこの式を M 倍することで
$M + 8 \cdot M = 3 \cdot (3M)$ が成り立ちます。これはつまり M が自然数ならば A に 8g 分銅を1:M 個、B に 3g 分銅を4:3M 個のせることで釣り合うことがわかります。

(3) 互除法を利用するのもいいですが p が小さい値から検証するのが早そうです。
$p = 1$ から q の値を考えると $(p, q) = \left(1, \dfrac{23}{8}\right), \left(2, \dfrac{13}{4}\right), \left(3, \dfrac{29}{8}\right), (4, 4), \cdots$
となりますので
条件をみたす自然数の組で p が最小のものは$\underline{p = 4, q = 4}$であるとわかります。
すなわち $3x + 8y = 20, 3 \cdot (-4) + 8 \cdot 4 = 20$ の差をとると
$3(x + 4) + 8(y - 4) = 0$ となりますので整数 n を用いて
$x + 4 = 8n, y - 4 = -3n$ が成立します。
したがって$\underline{x = -4 + 8n, y = 4 - 3n}$がすべての整数解とわかります。

(4) 2 種類の分銅がある整数の重さ dg の整数倍である場合、物体 X がのせられている皿にのる質量はある整数 l を用いて $(M + ld)$g と表されます。また物体 X のない皿にのる質量はある整数 m を用いて (md)g と表されます。
ということは d が M の約数でない場合一方は d の倍数で他方は d の倍

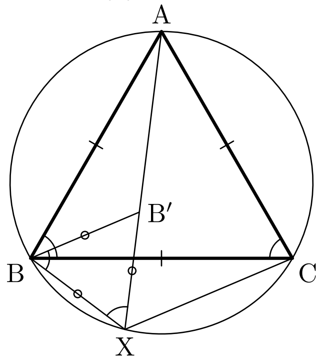
数になりませんので釣り合うことがありません。
ここから考えると皿が釣り合わない組合せは1:3g と 21g,2:8g と 14gであるとわかります。(1:3g の整数倍、2:2g の整数倍)
なお、0:3g と 14g の場合は A に X と 14g の分銅 1 個、B に 3g の分銅 7 個をのせると両方 21g で釣り合い、3:8g と 21g の場合は A に X と 8g の分銅 7 個、B に 21g の分銅 3 個をのせると両方 63g で釣り合います。

(5) 分銅を皿 B にしかのせられない場合、8g の分銅をのせる個数によって以下の重さは量ることができます。
8g の分銅をのせない：3g,6g,9g,12g,15g,18g,21g,24g,$\cdots$
8g の分銅を 1 個：8g,11g,14g,17g,20g,23g,26g,29g,32g,$\cdots$
8g の分銅を 2 個：16g,19g,22g,25g,28g,31g,34g,37g,40g,$\cdots$
これらより、8g の分銅 3 個以上は上記のどれかの場合に入りますので必要はありません。
どれにも入らないものは 1g,2g,4g,5g,7g,10g,13g となりますので、量れない質量は7 通りであり、最大は13gとわかります。
これより大きい値は問題文の考察でわかります。
さて、同様に $3x+2018y$ で表せる整数を考えましょう。$2018 = 3\cdot 672+2$ ですので「3 の倍数」「3 で割ると 2 余る 2018 以上の整数」「3 で割ると 1 余る 4036 以上の整数」は表せます。
ということは表せない最大の値は 4036-3=4033であるとわかります。

第５問

平面幾何を関する問題です。

(1) B′ と線分 BB′ をとり、わかっている角度や等しい辺を色々記入していくとこの図のようになります。

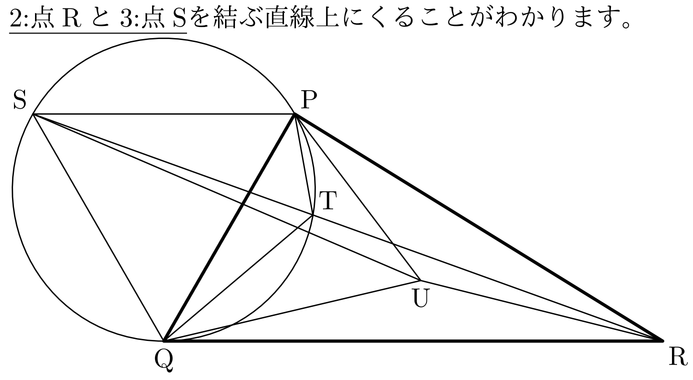


これをみると BB′=BX,BA=BC,$\angle$B′BA = $\angle$XBC(= 60° − $\angle$B′BC) がいえますので、0:△ABB′ と 7:△CBXの合同から問題 1 を証明することができます。

(2) 今度は問題 1 と先生が述べた定理から問題 2 を解こうということになりました。まずは会話を埋めていきましょう。

(i) 問題 1 では正三角形 PSQ の外接円において弧 PQ 上に点 T をとると PT+QT=ST が成り立つ、ということを示したのでした。すなわち PT と QT の長さの和は5:STの長さに等しいことがわかります。

(ii) 前の問題から PT+QT+RT=ST+RT がわかりました。ST+RT は線分 SR の長さを超えません。また ST+RT が最小になる場合は T が線分 SR 上にくる場合となります。ということで Y は 2:点 R と 3:点 Sを結ぶ直線上にくることがわかります。

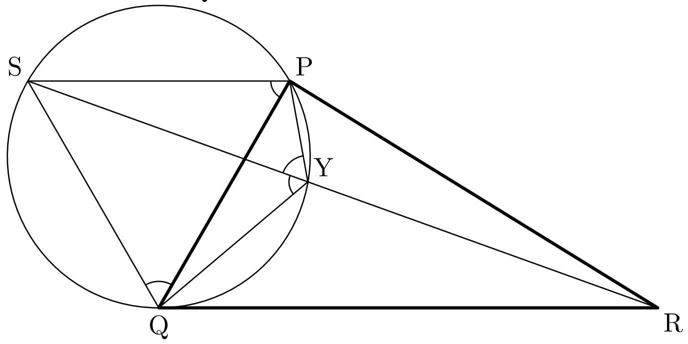


(iii) 先生が提示した定理から点 U を任意にとると
PU+QU+RU ≥ SU+RU ≥ SR がわかります。点 Y においては

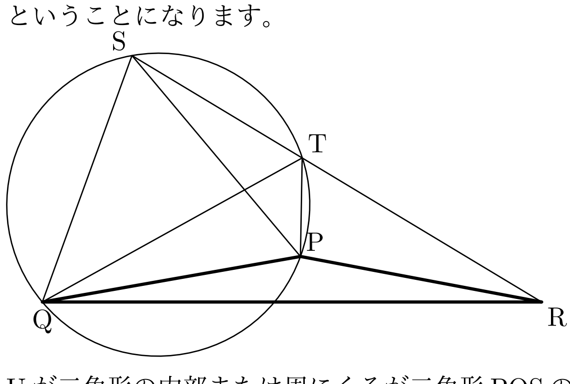
この式の両方で等号が成立しますので、すなわち PY+QY=SY です。ということで問題 1 と定理から Y は<u>3:弧 PQ</u>上にくることがわかります。

(iv) ただし、定理では X が三角形の外にあると外接円の周上にきても AX<BX+CX となることから上記の Y が最短にならなくなります。すなわち三角形 PQS の外接円と直線 RS との交点が三角形 PQS の内部にこないと上の Y は最短でない、という結論になります。こうなる場合は $\angle\mathrm{QPS}$ と $\angle\mathrm{QPR}$ の和が 180° を超える場合となります。
$\angle\mathrm{QPS}=60^\circ$ よりこの場合は $\angle\mathrm{QPR}+60^\circ>180^\circ$ となり、すなわち<u>4:$\angle\mathrm{QPR}>120^\circ$</u>の場合となります。

(v) $\angle\mathrm{QPR}\leq 120^\circ$ のときは直線 RS と弧 PQ との交点は三角形 PQR の内部にきます。このとき $\angle\mathrm{PYQ}+\angle\mathrm{PSQ}=180^\circ$ より $\angle\mathrm{PYQ}=120^\circ$ であり、また円周角の定理から $\angle\mathrm{PYS}=\angle\mathrm{QYS}=60^\circ$ ですので $\angle\mathrm{PYR}=\angle\mathrm{QYR}=120^\circ$ となります。



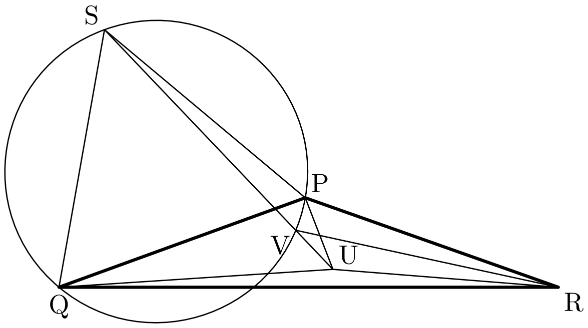
したがって $\angle\mathrm{QPR}\leq 120^\circ$ の場合は Y は
<u>3:$\angle\mathrm{PYR}=\angle\mathrm{QYP}=\angle\mathrm{RYQ}$ となる点</u>とわかります。
また、$\angle\mathrm{QPR}>120^\circ$ のときは外接円と直線 RS との交点は三角形 PQR の外部にきてしまいます。この点よりは三角形 PQR の周にくる点でもっとも短くできる点が存在するのでこれは Y ではない、ということになります。



U が三角形の内部または周にくるが三角形 PQS の外接円上にこな

い場合、線分 RU,SU のうちどちらかが三角形 PQS の外接円の交わりますのでその交点を V とすると

PU+QU+RU>RU+SU>RV+SV=PV+QV+RV となりさらに小さくできますので Y は外接円上にくることがわかります。



さらに RU+SU ＜ RP+SP ですので条件をみたす Y は点 P であることがわかります。この点 P は選択肢でいうと

6:三角形 PQR のうち最も長い辺を除く二つの辺の交点となります。

所感

難易度は前回とあまり変わっていないように見えます。分量が多く、解ききるのは大変でしょう。

第 1 問

小問 4 種とかなりの分量となりました。

[1]

集合と論理に関する問題です。
(1) は集合と要素の違いや記号の意味を理解していないと間違えやすい穴場です。しっかり押さえておきましょう。
(2) は反例を正しく選ぶ問題です。3 番 $(x = \sqrt{4}, y = -\sqrt{4})$ は結論が成立しており、また一見して仮定が成立していないように見えるので間違って選びやすいです。確認は怠らないようにしましょう。

[2]

二次関数のグラフを利用した問題です。
(1) はグラフと方程式の関係をみるものですがやりやすいと思います。
(2) は 3 種類の操作で検証しなければなりませんので手ごわいです。操作 P ではグラフは横移動しかしませんので除外はしやすいです。式とグラフ両方から攻める必要がありそうです。

[3]

日常で考える三角比の問題です。正しく図を考えれば簡単に正答できそうです。
厳密な解答にするには x のとりうる値は建築基準法を満たす (26cm 以上) という条件を加えるとよいでしょう。
なお当初は正解表に私が解いた式である $x \tan 33° \leq 18$ がなかったためこれを誤答としていましたが、解答結果の確認表ではこれも正答扱いとなっておりました。
不等号に $<$ や $>$ を使うと誤答になるのは不等式の両辺が等しくなる場合を除外してしまう条件になるためです。(x は 26cm 以上なので $x = 26$ は条件に含まれるなど)
国語の読解力が左右される難問といえるでしょう。

[4]

冒頭の定理は「正弦定理」として覚えている人も多い、基本的な定理です。この問題はこれを導いてみる、というものです。
(1)、(2) ともに円に内接する三角形や四角形の基本的な性質を押さえておけば取れる、易しめの問題だと思います。

第２問

総合的な思考力がためされる小問が集まりました。

[1]

三角比と二次関数の融合問題です。
(1) は正三角形の半分である直角三角形を考えています。動点の条件から P,Q,R の速さの比は 3 辺の比に等しいことに気づきたいです。(ii) は二次関数の問題です。t と PR^2 の関係をグラフで表せればうまく解けたと思います。(iii) はやりづらいですが面積比と辺の比の関係に着目すれば直感的に $S_1 = S_2 = S_3$ がわかると思います。
(2) は少々面倒ですが、(1)(iii) の性質がどんな三角形でも成り立つことに気付き、直角三角形 CRP の面積がある値になる条件を求める、という考えにたどりつけば早く解けるでしょう。

[2]

データの分析に関する問題です。計算や考察が多く大変です。
(1) は単純計算でそれほど時間もかからないと思います。
(2) はひとつひとつ値を求めれば理由を突き止められるでしょう。
(3) は結論を出しにくい難問です。直前の会話をみてもなかなか使えそうな値を持ち出すことはむずかしいでしょう。「相関係数はデータ数に関係なく ±1 をとりうる」ことに気付けるかが問題となりそうです。
(4) は散布図において相関係数がどのような意味合いを持っているか、という理解が試されます。相関係数の絶対値が 1 であることとすべてのデータが散布図において一直線上に並ぶことは同等、ということに気付かないとどうしようもなさそうです。

第３問

場合の数と確率に関する問題です。計算は多いですが色々と工夫できそうです。

(1) は単純に計算していくだけですが、ここで $P_W(A)$ は当たりくじの総数のうち A に入ったものの割合であることに気付くと以降の計算が楽になります。(1 番目の人は合計 200 本のくじから等しい確率で 1 本を選ぶことになることから得られます。)
(3) では 4 通りを考えることになりますが、うち 2 通りはこれまで試しており、直前の会話から 4 本の場合は計算しなくてよさそう、という考えにたどりつけるかが問題となります。6 本の場合はかなりの僅差となりますので丁寧に計算しましょう。

第 4 問

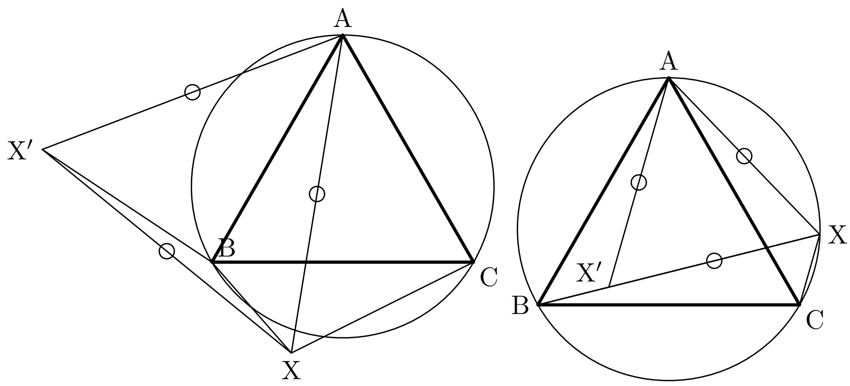
　天秤を用いた、整数の性質に関する問題です。
(1)(2) は順を追っていけば解けると思います。
(3) は互除法で考えるより q を小さい値から考えていってつり合う場合を考えるのが早いと思います。
(4) は最大公約数に注目すると正しいものを選べると思います。
(5) はまずはがんばって数え上げる必要がありますが、後半をよく読むと最後の空欄も簡単に入れられるでしょう。

第 5 問

　平面幾何を利用した問題です。前回の調査では必答問題のところに授業のくだりがありましたが今回はここのようです。
(1) は B$'$ などを図に書いていけばいけると思います。結論を得ること、推論で得られることの両方から攻めていきましょう。
(2) の会話は丁寧に読み進めればいけそうです。ただし、最後の (v) は推測が難しく、なかなか結論にたどり着けないでしょう。

(おまけ)
この問題で先生が提示した定理は、以下のようにして証明できます。

三角形 AXC を、点 A を中心として辺 AC が辺 AB と重なるように回転させる。



このときの X の移動先を X′ とおくと、$\angle \mathrm{XAX'} = 60^\circ$ となるので、三角形 AXX′ は正三角形となる。
X が外接円の周上にこない場合、半直線 AX が線分 BC と交わる場合は $\angle \mathrm{ABX} + \angle \mathrm{ACX} \neq 180^\circ$, 半直線 AX が線分 BC と交わらない場合は $\angle \mathrm{ABX} \neq \angle \mathrm{ACX}$ であるので 3 点 B,X,X′ は三角形の頂点をなすことから $\mathrm{XX'} < \mathrm{BX} + \mathrm{BX'}$ となる。
X が外接円の周上にあるが点 A を含む弧 BC 上にくる場合、$\angle \mathrm{ABX} = \angle \mathrm{ACX}$ なので 3 点 B,X,X′ はこの順に一直線上に並ぶことから $\mathrm{XX'} < \mathrm{BX} + \mathrm{BX'}$ となる。
いずれの場合も $\mathrm{AX} = \mathrm{XX'}, \mathrm{CX} = \mathrm{BX'}$ を利用すると $\mathrm{AX} < \mathrm{BX} + \mathrm{CX}$ が導かれる。