解答

第 1 問

問題	ア, イ	ウ, エ	オ, カ	キク, ケ, コ	サ, シ	スセ	ソ	タ
解答	2,2	4,4	5,4	-1,1,2	2,3	10	3	6

問題	チ	ツテ, ト	ナ, ニ	ヌネ, ノ	ハ	ヒ, フ, ヘ
解答	1	2a,a	1,4	-5,4	3	-,1,1

第 2 問

問題	ア, イ, ウ	エ, オ, カ	キ, ク	ケ, コ	サ	シ, ス, セ, ソ, タ
解答	a,3,2	6,3,2	4,2	6,3	2	7,6,6,9,3

問題	チ, ツテト, ナ	ニヌネ	ノ, ハ	ヒフ, ヘホ
解答	3,-24,0	-28	2,6	-1,26

第 3 問

問題	ア, イ	ウ, エ, オ	カ, キ	ク, ケコ
解答	3,2	a,2,2	2,3	1,-1

問題	サ	シ	スセ, ソ	タ, チ, ツ	テ, ト	ナニ, ヌ, ネノ, ハ	ヒ, フ, ヘ, ホ
解答	5	6	10,5	a,2,4	2,5	-1,5,-3,5	3,5,1,5

第 4 問

問題	ア, イ, ウ, エ	オ	カ	キク	ケ, コ	サ	シス
解答	3,2,3,2	0	1	-1	3,2	1	-1

問題	セ	ソ	タ, チ, ツ, テ	ト, ナ	ニヌネノ	ハヒフ
解答	8	1	1,4,6,4	3,6	1045	226

解説

第 1 問

[1]

線分の長さの 2 乗は各座標の差の 2 乗の総和で表されます。これより

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= (1-\cos 2\theta)^2+(0-\sin 2\theta)^2\\ &= (1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)+\sin^2 2\theta = \underline{2-2\cos 2\theta}\end{aligned}$$

とできます。さらに倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を利用すると

$$\mathrm{AP}^2 = 2-2(2\cos^2\theta-1) = \underline{4-4\cos^2\theta}$$

となります。また同様にして

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (\cos 2\theta-2\cos 3\theta)^2+(\sin 2\theta-2\sin 3\theta)^2\\ &= \cos^2 2\theta-4\cos 2\theta\cos 3\theta+4\cos^2 3\theta\\ &\quad +\sin^2 2\theta-4\sin 2\theta\sin 3\theta+4\sin^2 3\theta\\ &= 1+4-4\cos(3\theta-2\theta) = \underline{5-4\cos\theta}\end{aligned}$$

がわかります。
$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲では θ が大きくなるほど $\cos\theta$ は小さくなりますから
$\dfrac{\pi}{3} \leq \theta < \pi$ のとき $\cos\pi < \cos\theta \leq \cos\dfrac{\pi}{3}$ すなわち$\underline{-1 < \cos\theta \leq \dfrac{1}{2}}$がわかります。
$\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2 = 9-4\cos\theta-4\cos^2\theta = 10-(1+2\cos\theta)^2$ であり、
$-1 < 1+2\cos\theta \leq 2$ ですので $\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2$ は $1+2\cos\theta = 0$ のときに最大、
$1+2\cos\theta = 2$ のときに最小となります。
したがって$\underline{\theta = \dfrac{2}{3}\pi \text{ のとき最大値 } 10}$、$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{3} \text{ のとき最小値 } 6}$をとります。

[**2**]

(1) $X=2^x$ のとき、指数関数の計算から$\underline{1{:}X>0}$がわかります。
$4^{x+a}=(2^2)^{x+a}=2^{2x+2a}$ となりますので、①の式は
$\underline{2^{2a}X^2-2^aX+a=0}$と変形できます。この判別式は

$$D \quad = \quad 2^{2a}-4\cdot 2^{2a}\cdot a=2^{2a}\underline{(1-4a)}$$

となります。

(2) $a=\dfrac{1}{4}$ のとき $D=0$ ですから②の式は重解をもち、
その値は $X=\dfrac{2^a}{2\cdot 2^{2a}}=2^{-a-1}$ となります。
実際に $X>0$ の範囲に解が 1 つだけありますので x の解がだた 1 つあることがわかります。その値は $x=-\dfrac{1}{4}-1=\underline{\dfrac{-5}{4}}$ とわかります。

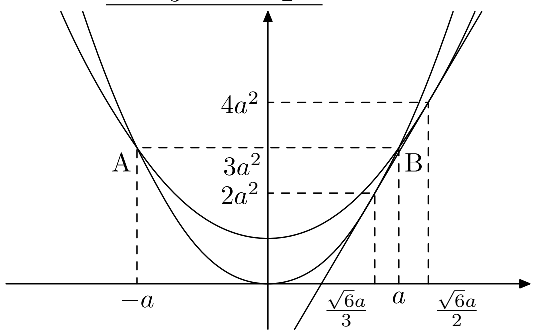
(3) $a\neq\dfrac{1}{4}$ のときに②が $X>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつためには、まず $D>0$ が必要です。すなわち $a<\dfrac{1}{4}$ がわかります。
このときの②をみたす X の値は実数の範囲で 2 個であり、条件をみたすためには $X=0$ において②の左辺が 0 以下になることが必要です。
すなわち $a\leq 0$ が必要です。
このとき $X=\dfrac{2^a\pm\sqrt{2^{2a}(1-4a)}}{2}$ であり、$a\leq 0$ であれば
$2^a-\sqrt{2^{2a}(1-4a)}\leq 2^a-2^a\sqrt{1}=0$ となりますので $X>0$ をみたす解がただ 1 つとなります。
したがって求める条件は$\underline{3{:}a\leq 0}$とわかります。
$a\leq 0$ のとき、②の解で正のものは $X=\dfrac{2^a(1+\sqrt{1-4a})}{2\cdot 2^{2a}}$ と表せますので、

$$\begin{aligned} x \quad &= \quad \log_2\left\{\frac{2^a(1+\sqrt{1-4a})}{2\cdot 2^{2a}}\right\} \\ &= \quad \log_2 2^{-a-1}+\log_2(1+\sqrt{1-4a})=\underline{-a-1+\log_2(1+\sqrt{1-4a})} \end{aligned}$$

がわかります。

第２問

(1) C_1 と C_2 の共有点の x 座標について $3x^2 = 2x^2 + a^2$ が成り立ちます。
整理すると $x^2 = a^2$ ですので $x = \pm a$ です。
したがって $a > 0$ より A の x 座標は $-a$、B の x 座標は a とわかります。
これを用いて y 座標を計算することで B の座標は$\underline{(a, 3a^2)}$とわかります。
$g(x) = 3x^2$ とおきますと $g'(x) = 6x$ となりますので l の方程式は
$y = 6s(x - s) + 3s^2$ すなわち $y = \underline{6sx - 3s^2}$ となります。
$h(x) = 2x^2 + a^2$ とおきますと $h'(x) = 4x$ となりますので l の方程式を C_2 に着目することで
$y = 4t(x - t) + 2t^2 + a^2$ すなわち $y = \underline{4tx - 2t^2 + a^2}$ となります。
これらが同一の直線を表すとき x の係数と定数項が等しいことがわかります。
x の係数から $6s = 4t$ となりますから $s = \dfrac{2}{3}t$ がわかります。
これを定数項の関係式 $-3s^2 = -2t^2 + a^2$ に代入しますと
$-\dfrac{4}{3}t^2 = -2t^2 + a^2$ より $t^2 = \dfrac{3}{2}a^2$ がわかります。
いま l は放物線で第１象限において接していますから $s > 0, t > 0$ です。
これより$\underline{s = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a, t = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a}$がわかります。



C_1 の $s \leq x \leq a$ の部分、C_2 の $a \leq x \leq t$ の部分、x 軸、$x = s$、$x = t$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_s^a (3x^2)dx + \int_a^t (2x^2 + a^2)dx = \left[x^3\right]_s^a + \left[\frac{2}{3}x^3 + a^2x\right]_a^t \\
&= (a^3 - s^3) + \left\{\left(\frac{2}{3}t^3 + a^2t\right) + \frac{5}{3}a^3\right\} \\
&= -\frac{2}{3}a^3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 a^3 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4}a^2 + a^2\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a \\
&= -\frac{2}{3}a^3 - \frac{2\sqrt{6}}{9}a^3 + \sqrt{6}a^3 = \underline{\frac{7\sqrt{6} - 6}{9}a^3}
\end{aligned}
$$

となります。

(2) まず $y = f(x)$ は原点を通りますので $f(0) = 0$ です。

すなわち $f(0) = r$ より $r = 0$ がわかります。

次に点 A の座標は $(-a, 3a^2)$ ですので $y = f(x)$ が点 A,B を通ることから $f(-a) = f(a) = 3a^2$ すなわち

$-a^3 + pa^2 - qa = a^3 + pa^2 + qa = 3a^2$ がわかります。これを利用すると

$f(-a) + f(a) = 2pa^2 = 6a^2$ となります。$a > 0$ ですので $2a^2$ で割って $p = 3$ がわかります。

さらに $f'(x) = 3x^2 + 2px + q = 3x^2 + 6x + q$ であり $f(x)$ は $x = -4$ で極値をとることから $f'(-4) = 0$ がわかります。

$f'(-4) = 48 - 24 + q = 0$ より $q = -24$ となり、結局$\underline{p = 3, q = -24, r = 0}$ がわかります。

これより $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$ となりますから、$f(x)$ は $x = -4, 2$ で極値をとり、増減を考えると極小値は $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 = \underline{-28}$ とわかります。

また $f(a) = 3a^2$ の左辺を展開すると $a^3 + 3a^2 - 24a = 3a^2$ ですから整理すると

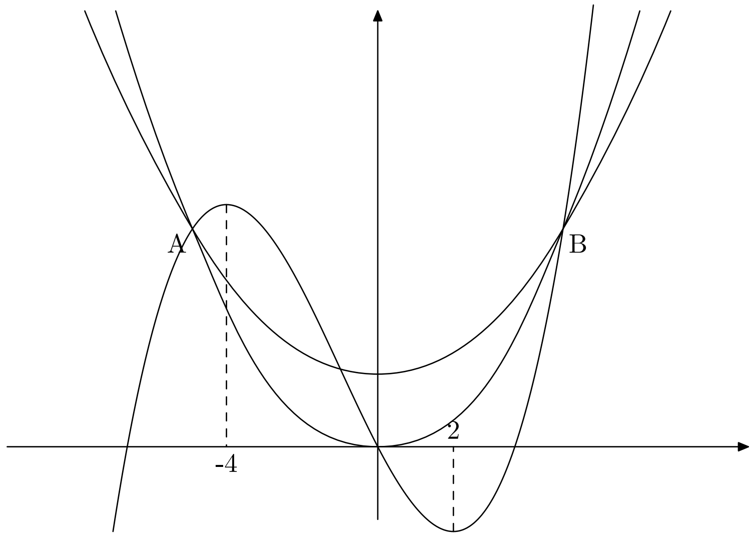
$a^3 - 24a = 0$ すなわち $a(a^2 - 24) = 0$ となります。$a > 0$ ですのでこの式をみたすのは $\underline{a = 2\sqrt{6}}$ とわかります。

すなわち $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$ と C_2 の式 $h(x) = 2x^2 + 24$ より曲線 $y = f(x)$ と C_2 の共有点の x 座標において $x^3 + 3x^2 - 24x = 2x^2 + 24$ が成り立ちます。

整理すると $x^3 + x^2 - 24x + 24 = 0$ となり因数分解して

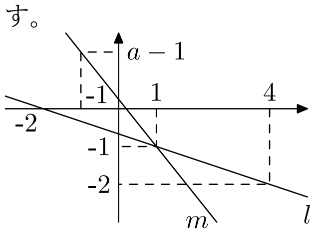
$(x+1)(x+2\sqrt{6})(x-2\sqrt{6}) = 0$ となります。

$a = 2\sqrt{6}$ ですので $x = \pm 2\sqrt{6}$ は A,B の x 座標となります。ということで残りは $x = -1$ であり、座標は $(-1, f(-1))$ より$\underline{\text{(-1,26)}}$となります。



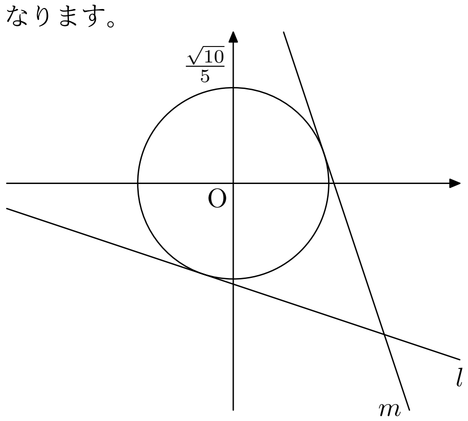
第３問

(1) l の方程式を $x+ay+b=0$ という形式で表す場合、x の式にして傾きに着目すると早いと思います。
$x=\dfrac{4-(-2)}{-2-0}y-2=-3y-2$ となりますので、l の式は$\underline{x+3y+2=0}$ となります。
m は通る点と傾きが示されていますので式は $y=-\dfrac{a}{2}(x+1)+(a-1)$ と表されます。
$y=-\dfrac{a}{2}x+\left(\dfrac{a}{2}-1\right)$ ですので分母を払って整理すると$\underline{ax+2y+2-a=0}$ となります。
l と m が一致するとき m の式を変形して $x+\dfrac{2}{a}y+\dfrac{2}{a}-1=0$ としますと y の係数から $\dfrac{2}{a}=3$ となる必要があります。このとき $a=\dfrac{2}{3}$ となり、m の式は $x+3y+2=0$ となり、確かに l に一致します。したがってこのとき$\underline{a=\dfrac{2}{3}}$となります。
そうでないとき、交点は l の式を $ax+3ay+2a=0$ 変形することで m との式との差をとることで計算できます。
これを利用すると $(3a-2)y+(3a-2)=0$ となりますので、$y=-1$ となり、さらに $x=1$ がわかりますので、l と m の交点は$\underline{\text{(1,-1)}}$となります。



(2) まず D の条件の１つに $x+3y+2\geq 0$ があります。これは $x=0, y=0$ で条件をみたします。
ということは原点 O が D から境界線を除いた領域に含まれる必要十分条件は
$ax+2y+2-a<0$ が $x=0, y=0$ で成立する場合、すなわち $2-a<0$ となる場合ですから、
言い換えて$\underline{5{:}2<a}$となります。
D に含まれる円を考えるために、D を定める直線それぞれでとりうる半径を考えます。
直線 l において考えますと、
原点と直線 l との距離は $\dfrac{|0+3\cdot 0+2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ です。(これより半径が大きいと l と２点で交わる)
また、原点と直線 m との距離は $\dfrac{|a\cdot 0+2\cdot 0+2-a|}{\sqrt{a^2+2^2}}=\dfrac{a-2}{\sqrt{a^2+2^2}}$ と

なります。これらのうち大きくない側が C になります。
そこで $\dfrac{\sqrt{10}}{5} \leq \dfrac{a-2}{\sqrt{a^2+2^2}}$ となる条件をみます。
2 乗して分母をはらって整理すると $3a^2-20a+12 \geq 0$ となります。
$3a^2-20a+12=(3a-2)(a-6)$ ですので、$a>2$ と合わせて
$a \leq 6$ のときに $\dfrac{\sqrt{10}}{5} \leq \dfrac{a-2}{\sqrt{a^2+2^2}}$ が成立することがわかります。すなわち C は
$\underline{a \geq 6}$のとき$\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}$,$a<6$ のとき、$\underline{\dfrac{a-2}{\sqrt{a^2+4}}}$となります。
特に $a=6$ のとき C の半径が $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ですから方程式は $x^2+y^2=\underline{\dfrac{2}{5}}$ となります。



円 $x^2+y^2=r^2$ に接点 (x_0, y_0) で接する直線の方程式が $x_0x+y_0y=r^2$ で表せることを利用しますと、
l は $x+3y+2=0$ より $-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{3}{5}y=\dfrac{2}{5}$ となることから C と l の共有点は$\underline{\left(\dfrac{-1}{5}, \dfrac{-3}{5}\right)}$となり、
m は $a=6$ から $6x+2y-4=0$ より $\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}y=\dfrac{2}{5}$ となることから C と m の共有点は$\underline{\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{5}\right)}$となります。

第４問

[1]

$z = x + yi$ として $z^3 = i$ となる z を考えます。展開公式を利用しますと

$$\begin{aligned}(x+yi)^3 &= x^3 + 3x^2 \cdot yi + 3x \cdot (yi)^2 + (yi)^3 \\ &= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3 i = \underline{x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i}\end{aligned}$$

がわかります。これを利用して実部と虚部を比較することで連立方程式
$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = \underline{0} \\ 3x^2y - y^3 = \underline{1} \end{cases}$ をたてることができます。
$x = 0$ のとき実部の式は成立し、虚部の式は $-y^3 = 1$ となりますので条件をみたす y は$\underline{y = -1}$です。また $x \neq 0$ のとき実部の式を x で割ることで $x^2 - 3y^2 = 0$ がわかりますので虚部の x^2 に代入して
$3(3y^2)y - y^3 = 1$ より $y^3 = \dfrac{1}{8}$ となります。これと $x = \pm\sqrt{3}y$ より$\underline{x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{1}{2}}$
がわかります。
これで $z^3 = i$ となる複素数が 3 つ求められました。そしてこの 3 つは方程式 $z^3 - i = 0$ の解といえます。
ということは解と係数の関係により 3 つの複素数の積は $-i$ と分かります。したがって 2 乗の積は $(-i)^2 = \underline{-1}$ とわかります。

[2]

(1) 相加相乗平均の関係を利用すると、$x > 0$ の範囲で $x + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$ が成り立つことがわかります。すなわち、A の最小値は $2^2 = \underline{8}$ であり、これは $x = \dfrac{1}{x}$ となる値すなわち $x = \underline{1}$ のときに成立するとわかります。

(2) $P = (1 + A)^4$ とできますから二項定理を利用すると

$$\begin{aligned}P &= {}_4\mathrm{C}_0 + {}_4\mathrm{C}_1 A + {}_4\mathrm{C}_2 A^2 + {}_4\mathrm{C}_3 A^3 + {}_4\mathrm{C}_4 A^4 \\ &= \underline{1 + 4A + 6A^2 + 4A^3 + A^4}\end{aligned}$$

となることがわかります。
さらに A を展開して考えたとき、定数項 k は A, A^3 では出てきませんが A^2, A^4 ではそれぞれ
${}_6\mathrm{C}_3 \cdot x^3 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^3, {}_{12}\mathrm{C}_6 \cdot x^6 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^6$ という形式で出ます。ということで
$k = 1 + 6 \cdot \underline{{}_6\mathrm{C}_3} + \underline{{}_{12}\mathrm{C}_6} = 1 + 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$
$= 1 + 6 \cdot 20 + 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = \underline{1045}$ となります。
また x^6 の係数は A^2, A^4 でそれぞれ ${}_6\mathrm{C}_6 x^6, {}_{12}\mathrm{C}_9 x^9 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^3$ という形式

で出ます。ということで
$s_6 = 6 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 + {}_{12}\mathrm{C}_9 = 6 + {}_{12}\mathrm{C}_3 = 6 + \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \underline{226}$ となります。

所感

第 1 問

[1]

同心円上にくる 3 点を使った三角関数の問題です。
道筋が示されていますので基本的なやりかたを抑えていれば解けると思います。

[2]

指数対数関数の問題です。
本試験では対数関数の値域が出題されましたがこちらは (1) で指数関数の値域が出ています。
基本的な計算をしていれば (1) は解けると思います。
(2) からは少し面倒な計算が必要です。二次関数で扱ったであろう特定範囲での解の個数の条件を考えることになります。

第 2 問

多項式の微積分を利用した問題です。
(1) は放物線と共通接線を使用しています。細かく方針が示されていますので接点を出すところまでは解きやすいと思いますが面積計算は少々面倒です。
(2) は通る点に関する等式と「極値をとる x では微分係数が 0 になる」という性質を利用することで最後まで解き進められると思います。

第 3 問

座標平面における円と直線を利用した問題です。
(1) で l の式を導く場合、解答の方法を利用することで直接的に計算できますが、思いつかないなら通る点から式を連立する、という方法も考えられます。
(2) で D に原点が含まれる条件を出す場合は図を考えるより D を定める不等式を直接利用するのがよいでしょう。また、円と直線が交わらない条件を式で表せるかどうかがこの問題の成否を分けそうです。
円の接点は解答のように公式を利用して導くこともできますが難しい場合は最短距離となる点を計算する手法も考えられます。

第 4 問

[1]

　複素数を利用した問題です。
展開公式を押さえておいて符号を丁寧に検証すれば解をすべて求めるところまではいけそうです。
最後の計算は解を直接使用してもよいですが解と係数の関係を利用すれば検算が楽です。

[2]

　式の展開を利用した問題です。
(1) は方針も示されていますので平易だと思います。
(2) は計算量が多いです。A と A^3 は x の奇数次の項しか出現しない (ので k と s_6 の計算では無視していい) ことに気づきたいです。