

解答

第1問

問題	アイ,ウ,エ,オ	カ	キ	ク,ケ,コ,サ	シ	ス,セ	ソタ,チツ
解答	16,4,7,9	0	5	4,3,5,3	9	3,2	80,81

問題	テ	ト	ナ,ニ	ヌ,ネ	ノ,ハ
解答	1	3	3,2	7,2	5,4

第2問

問題	ア,イウ,エ	オ,カ	キク,ケコ,サ
解答	1,13,2	0,3	-1,13,2

問題	シ	ス,セ,ソ	タ,チツ,テ	ト,ナニ,ヌ	ネ,ノ
解答	3	-7,9	7,13,2	0,13,4	7,2

第3問

問題	ア,イ	ウ,エ	オ,カキ	ク,ケ
解答	5,6	4,5	2,15	2,3

問題	コ,サ	シ,ス,セ	ソ,タチ	ツ,テ	ト,ナ	ニ,ヌ
解答	3,4	-5,5	1,15	3,4	5,8	5,5

第4問

問題	ア	イ,ウ	エ	オ	カ	キ
解答	5	4,5	2	3	4	5

解説

第1問

[1]

分母が $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ という形式のものを有理化する場合、公式 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ が利用できます。

いま α の分母は $4 - \sqrt{7}$ ですが、これを $\sqrt{16} - \sqrt{7}$ と変形すると見えてくるでしょう。

$$\alpha = \frac{4(4 + \sqrt{7})}{(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})} = \frac{16 + 4\sqrt{7}}{16 - 7} = \frac{16 + 4\sqrt{7}}{9}$$

(1) まずは有理数と無理数による式の確認です。

$p + q\sqrt{7} = 0$ のとき、 $q \neq 0$ であるとすると $\sqrt{7} = -\frac{p}{q}$ となり

ある有理数とある無理数が等しいということになり矛盾が生じます。

したがって $p + q\sqrt{7} = 0$ で p, q が有理数であるならば $q = 0$ がわかります。

さらにこれを代入することで $p = 0$ もわかります。

逆に $p = q = 0$ ならば $p + q\sqrt{7} = 0$ となりますから

$$p + q\sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow p = q = 0$$

がいえます。

(2) $\alpha - \beta$ が有理数であるとき、 $\alpha - \beta = k$ とおいてみます。

(1)の形式を使いたいので、 $p + q\sqrt{7} = 0$ という形式を作ってみます。

$$\alpha - \beta = \left(\frac{16}{9} + \frac{4}{9} \cdot \sqrt{7}\right) - \left(\frac{9}{5} - \frac{r^2 - 3r}{5} \cdot \sqrt{7}\right) = \frac{11}{5} + \left(\frac{4}{9} + \frac{r^2 - 3r}{5}\right) \cdot \sqrt{7}$$

となりました。すなわち $k = \frac{11}{5} + \left(\frac{4}{9} + \frac{r^2 - 3r}{5}\right) \sqrt{7}$ より

$$\left(\frac{11}{5} - k\right) + \left(\frac{4}{9} + \frac{r^2 - 3r}{5}\right) \sqrt{7} = 0 \text{ となりましたので、}$$

(1)の結果を利用して $\frac{4}{9} + \frac{r^2 - 3r}{5} = 0$ がわかります。

分母をはらって整理すると $9r^2 - 27r + 20 = 0$ となります。

因数分解して $(3r - 4)(3r - 5) = 0$ となりますので、 $r = \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ がわかります。

(3) $\frac{\alpha}{\beta}$ が有理数のとき、この値を l とすることで

$$l = \frac{16 + 4\sqrt{7}}{9} \cdot \frac{5}{9 - (r^2 - 3r)\sqrt{7}} = \frac{5 \cdot (16 + 4\sqrt{7})}{9 \cdot \{9 - (r^2 - 3r)\sqrt{7}\}}$$

となりますので、変形すると

$$16 + 4\sqrt{7} = \frac{9l}{5} \cdot \{9 - (r^2 - 3r)\sqrt{7}\} \text{ となります。 (つまり、 } s = \frac{9l}{5} \text{)}$$

これを $p + q\sqrt{7} = 0$ の形式にすると $(16 - 9s) + \{4 + s(r^2 - 3r)\}\sqrt{7} = 0$ となるので

すなわち $16 - 9s = 4 + s(r^2 - 3r) = 0$ がわかります。

第1式の値が0となることから $s = \frac{16}{9}$ となりますから第2式に代入すると

$$4 + \frac{16}{9}(r^2 - 3r) = 0 \text{ となり、分母をはらうと } 4r^2 - 12r + 9 = 0 \text{ となります。}$$

因数分解して $(2r - 3)^2 = 0$ となりますから $r = \frac{3}{2}$ となります。

このとき、 $\frac{\alpha}{\beta} = l = \frac{5s}{9} = \frac{80}{81}$ がわかります。

[2]

- (1) 条件 p, q を絶対値記号を使わない形式で考えます。

$|x - 1| \leq a$ はすなわち $-a \leq x - 1 \leq a$ であり、同様に考えることで
 $p: 1 - a \leq x \leq 1 + a, q: -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ がわかります。

$a = 1$ のとき $p: 0 \leq x \leq 2$ ですのでこの範囲は $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ に含まれま
すが一致はしません。したがって p は q であるための 1:十分条件であるが必要条件でない
とわかります。

$a = 3$ のとき $p: 2 \leq x \leq 3$ ですので例えば $x = 3$ は p をみちますが
 q をみちさず、 $x = 1$ は q をみちますが p をみちません。したがっ
て p は q の 3:必要条件でも十分条件でもないとわかります。

- (2) 命題「 $p \Rightarrow q$ 」をみたすとき、 $x = 1 + a$ ならば q をみたすことが必要
になります。

このとき $1 + a \leq \frac{5}{2}$ が必要ですからすなわち $a \leq \frac{3}{2}$ が必要です。

逆に $a = \frac{3}{2}$ のとき $p: \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ ですから「 $p \Rightarrow q$ 」が成立します。

したがって「 $p \Rightarrow q$ 」が真となる a の最大値は $\frac{3}{2}$ です。

また命題「 $q \Rightarrow p$ 」をみたすには $x = -\frac{5}{2}$ ならば p をみたすことが必要
になります。

このとき $1 - a \leq -\frac{5}{2}$ より $a \geq \frac{7}{2}$ が必要です。

逆に $a = \frac{7}{2}$ のとき $p: -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ ですから「 $q \Rightarrow p$ 」が成立します。

したがって「 $q \Rightarrow p$ 」が真となる a の最小値は $\frac{7}{2}$ です。

- (3) r を x の条件に置き換えることを考えます。

r の条件式は左辺を平方完成させることで $(x - 1)^2 - 1 \leq a$ とできます。
移項して $(x - 1)^2 \leq a + 1$ となり $a > 0$ より $|x - 1| \leq \sqrt{a + 1}$ とでき
ます。

したがって $-\sqrt{a + 1} \leq x - 1 \leq \sqrt{a + 1}$ より

$r: 1 - \sqrt{a + 1} \leq x \leq 1 + \sqrt{a + 1}$ と書き換えることができます。

これより「 $r \Rightarrow q$ 」が真となる場合は (2) の「 $p \Rightarrow q$ 」となる場合を参
考にすることで $\sqrt{1 + a} \leq \frac{3}{2}$ とわかります。

2乗すると $1 + a \leq \frac{9}{4}$ ですので $a \leq \frac{5}{4}$ が必要とわかります。

逆に $a = \frac{5}{4}$ のとき $\sqrt{1 + a} = \frac{3}{2}$ より $r: \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ となり「 $r \Rightarrow q$ 」が
成立することがわかります。

したがって「 $r \Rightarrow q$ 」が真となる a の最大値は $\frac{5}{4}$ です。

第2問

2次不等式 $a^2 - 3 < a$ をみたすとき、 $a^2 - a - 3 < 0$ です。

2次方程式 $a^2 - a - 3 = 0$ の解は公式から

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ ですので}$$

$$a^2 - a - 3 < 0 \text{ となる } a \text{ の範囲は } \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < a < \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ となります。}$$

(1) $f(x)$ は $x = 0$ のときに最大値 $f(0) = 1$ をとります。

したがって $y = f(x)$ の最大値が1であるとき $a^2 - 3 \leq 0 \leq a$ であることがわかります。

$$a^2 - 3 \leq a \text{ より } \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2},$$

$$a^2 - 3 \leq 0 \text{ より } -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} \text{ であり、}$$

さらに $0 \leq a$ もみたす範囲が求める範囲です。

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 0, \sqrt{3} < \frac{\sqrt{12}}{2} < \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ ですから}$$

すべてをみたす範囲は $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ とわかります。

また、さらに最小値が $f(a)$ であるとき、 $f(a^2 - 3) \geq f(a)$ となること、 $f(-a) = f(a)$ であることを利用すると $-a \leq a^2 - 3$ をみたすことがわかります。

これはすなわち $a^2 + a - 3 \geq 0$ ですから a の2次不等式として解くと

$$a \leq \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \text{ または } \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \leq a \text{ となります。}$$

$$(2\sqrt{3} + 1)^2 = 13 + 4\sqrt{3} > 13 \text{ より } \sqrt{3} > \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \text{ ですので}$$

$$\text{合わせるると } \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \leq a \leq \sqrt{3} \text{ となります。}$$

(2) $a^2 - 3 \leq x \leq a$ において $y = f(x)$ の最大最小を考えると、

$$a^2 - 3 \leq 0 \leq a \text{ のとき最大は } f(0) \text{ となり、}$$

$$a \leq 0 \text{ のとき最大は } f(a) \text{ となり最小は } f(a^2 - 3) \text{ となります。}$$

$0 \leq a^2 - 3$ のときは最大は $f(a^2 - 3)$ となり最小は $f(a)$ となりますので、

最大値が $f(a^2 - 3)$ で最小値が $f(a)$ となるとき $0 \leq a^2 - 3$ となります。

これより $a \leq -\sqrt{3}$ または $\sqrt{3} \leq a$ ですので、 $a^2 - 3 < a$ となる範囲と合わせて

$$\sqrt{3} \leq a < \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ ①となります。}$$

$$L = f(a^2 - 3) - f(a) \text{ のとき、 } t = a^2 \text{ とおくと}$$

$$L = f(t - 3) - (-a^2 + 1) = \{-(t - 3)^2 + 1\} - (1 - t) = \underline{-t^2 + 7t - 9}$$

がわかります。 a が①の範囲にあるとき2乗することで

$$(\sqrt{3})^2 \leq t < \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 \text{ となります。}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{14+2\sqrt{13}}{4} = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \text{ ですので } t \text{ の範囲は}$$

$$3 \leq t < \frac{7+\sqrt{13}}{2} \text{ となります。}$$

$$L = -\left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \text{ であり、} 3 < \frac{7}{2} < \frac{7+\sqrt{13}}{2} \text{ であることを考える}$$

$$\text{と } L \leq \frac{13}{4} \text{ がわかり、}$$

$$t = 3 \text{ のとき } L = 3, t = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \text{ のとき } L = -\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} = 0 \text{ で}$$

すから L のとりうる範囲は

$$0 < L \leq \frac{13}{4} \text{ とわかります。}$$

$$\text{また } L = \frac{13}{4} \text{ となるような } t \text{ は } t = \frac{7}{2} \text{ であることもわかります。}$$

第3問

- (1) $\triangle ABC$ に対して正弦定理を適用すると、外接円の半径を R としたとき

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R \text{ より}$$

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle ACB} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{5}}{6} \text{ です。}$$

相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を利用すると

$$\cos \angle ACB = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \angle ACB} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \text{ が}$$

わかります。

$\cos \angle ACB = k, BC = x$ とおくと余弦定理

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$ を適用することで

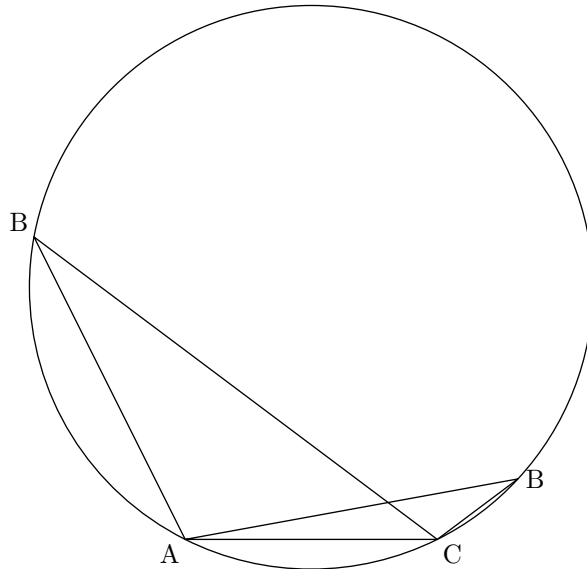
$$\frac{1}{5} = \frac{1}{9} + x^2 - \frac{2k}{3}x \text{ となり、整理すると } x^2 - \frac{2k}{3}x - \frac{4}{45} = 0 \text{ となります。}$$

これらより $x = \frac{k}{3} \pm \sqrt{\frac{4 + 5k^2}{45}}$ であり、 $k^2 = \frac{16}{25}$ より

$$x = \frac{k}{3} \pm \sqrt{\frac{36}{225}} = \frac{k}{3} \pm \frac{6}{15} \text{ とできます。}$$

$k = \pm \frac{4}{5}$ を代入すると x として考えられる値は $x = \frac{2}{15}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{15}$ となります。

辺の長さである以上 $x > 0$ ですので $BC = \frac{2}{15}, \frac{2}{3}$ がわかります。



(2) $BC = \frac{2}{3}$ のとき $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$ です。したがって相互関係 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

を利用すると

$$\tan \angle ACB = \frac{\sin \angle ACB}{\cos \angle ACB} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \text{ がわかります。}$$

また余弦定理を適用することで

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{4}{9} \right) \cdot \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 1} \\ &= -\frac{2}{15} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{-\sqrt{5}}{5} \text{ がわかります。} \end{aligned}$$

また三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$

と求められます。

三角形 ABC の外接円を考えると、円周角の定理から $\angle AOB = 2\angle ACB$ がわかります。

また、 $OA = OB = R$, $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ より

三角形 OAP と三角形 OBP が合同であることもわかりますので

$\angle AOP = \angle BOP$ と $\angle AOP + \angle BOP = \angle AOB$ より $\angle AOP = \angle ACB$ がわかります。

すなわち $\tan \angle AOP = \tan \angle ACB = \frac{3}{4}$ です。

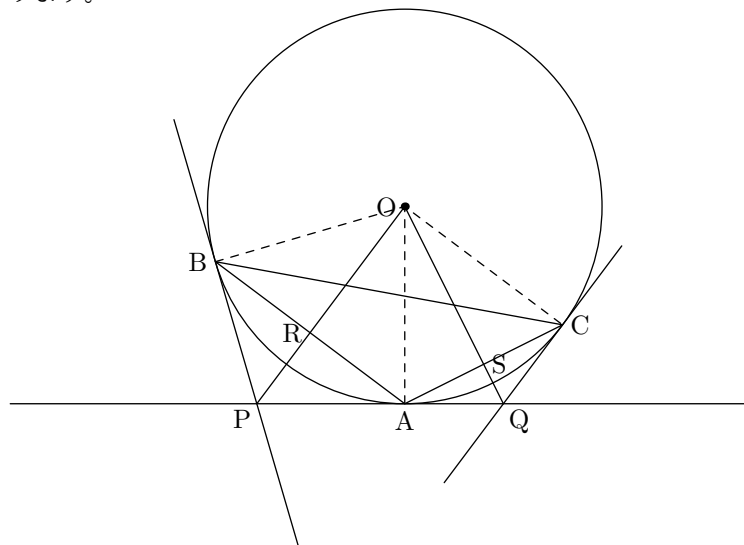
また $\tan \angle AOP = \frac{AP}{OA}$ ですので $AP = OA \cdot \tan \angle AOP = R \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{5}}{8}$

がわかります。

また、 $\angle AOP$ と同様に $\angle AOQ = \angle ABC$ がわかりますので、

$\angle ROS = \angle AOR + \angle AOS = \angle AOP + \angle AOQ = \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC$ がわかります。

したがって $\cos \angle ROS = \cos(180^\circ - \angle BAC) = -\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ となります。



第4問

- (1) X と Y の相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割ることで得られます。全期間における相関係数は
- $$r = \frac{0.0263}{0.105 \cdot 0.260} = \frac{0.0263}{0.0273} = \frac{263}{273} = 0.93 + \frac{0.11}{273} > 0.91 \text{ ですので}$$
- $5:0.91 < r$ が成立します。

- (2) 順番に検証します。

0:最大値は箱ひげ図におけるひげの右端で表されます。これを見ると A の最大は B の最大より大きいことがわかりますので、この選択肢は誤りといえます。

1:第1四分位数は箱ひげ図における箱の左端で表されます。これを見ると A の第1四分位数は B の第1四分位数より大きいことがわかりますので、この選択肢は誤りといえます。

2:四分位範囲は箱ひげ図における箱の幅で表されます。A における四分位範囲は3目盛より大きい程度ですので0.6~0.8の範囲にくると読み取れます。また B における四分位範囲はやはり3目盛より大きい程度であり、差は0.2より大きくなさそうです。この選択肢は誤りといえます。

3:範囲は箱ひげ図におけるひげの長さで表されます。A における範囲は B における範囲より大きいことがわかりますので、この選択肢は誤りといえます。

4:中央値は問題文に明記されています。中央値の絶対値の8倍は期間 A では0.4672、期間 B では0.2016ですので、どちらも四分位範囲はこれより大きいです。この選択肢は正しいといえます。

5:期間 A で度数が最大の階級は0~0.5の範囲です。第3四分位数は0.4前後ですので、この選択肢は正しいといえます。

6:期間 B で度数が最大の階級は0~0.5の範囲です。第1四分位数は負の値ですので、この選択肢は誤りといえます。

したがって、あてはまる選択肢は4,5といえます。

- (3) X のデータを x_1, \dots, x_n 、 Y のデータを y_1, \dots, y_n とします。

X の平均は $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ と表されるのでこれを $E(X)$ とすると X' の平均は

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) = \frac{1}{n} (a \sum_{i=1}^n x_i + bn) = aE(X) + b \text{ と表されます。}$$

これを利用すると、 X の分散を $V(X)$ として X' の分散は

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ax_i + b - (aE(X) + b)\}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{a(x_i - E(X))\}^2 = a^2V(X)$$

となりますので、 $V(X)$ の 2:a²倍 になることがわかります。

また、 X と Y の共分散を $V(X, Y)$ とおくと X' と Y' の共分散は

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ax_i + b - (aE(X) + b)\} \{cy_i + d - (cE(Y) + d)\}$$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ac(x_i - E(X))(y_i - E(Y))\} = acV(X, Y)$ となりますので、 $V(X, Y)$ の $3:ac$ 倍となることがわかります。

相関係数は共分散をそれぞれの標準偏差で割った値ですので X の標準偏差を $\sigma(X)$ などとおくと X' と Y' の相関係数は

$$\frac{V(X', Y')}{\sqrt{V(X')} \sqrt{V(Y')}} = \frac{acV(X, Y)}{\sqrt{a^2 V(X)} \sqrt{c^2 V(Y)}} = \frac{ac}{|ac|} \frac{V(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}$$

となりますので、 X と Y の相関係数の $4: \frac{ac}{|ac|}$ 倍となります。

(4) 散布図に現れる点の分布と相関係数 r との関係は、

- ・一方が大きい場合は他方も大きくなる傾向があると r は正の値であり傾向が強いほど 1 に近づく
- ・一方が大きい場合は他方は小さくなる傾向があると r は負の値であり傾向が強いほど -1 に近づく
- ・一方の値をどうやっても他方に目立った傾向変化が見られない場合 r は 0 に近づく

ということが成り立ちます。

散布図 1 は V が大きくなると W も大きくなる傾向がありますので r は 1 に近いといえます。

散布図 2 は V' を変えても W' の値はあまり変化がありませんので r は 0 に近いといえます。

散布図 3 は V'' が 1 より大きくなると W'' が小さい側にきますので r は負の値といえます。

これらより、正しいといえる組合せは $4: r_1 = 0.98, r_2 = -0.76, r_3 = 0.10$ となります。

所感

全体的に計算が多めのようなので。本試験より大変かもしれません (本試験より後のため対策をする分を盛り込んだためか)。

第 1 問

[1]

有理数と平方根を用いた数の性質をに関する問題です。

(2) や (3) の変形は慣れないと難しいですが、式の結果を 1 変数にしてこの解答のように平方根がある部分とない部分に分離する方法は押さえておきたいです。

[2]

条件に関する問題です。

ちょっと込み入っていますがそれぞれの条件を x 単体に関する不等式に直して数直線を持ち出すなりすれば (2) まではいけると思います。

(3) も絶対値の大小で表現できることがわかれば余裕をもって完答できるでしょう。

第 2 問

少し手の込んだ二次関数の問題です。

(1) でいきなり大変そうなものが出ますが $f(x)$ の最大値が 1 であることから頂点を含むことは容易にわかると思います。最小値も場合分けがいらなくなるように設定してありますので面倒な計算は省けます。ただし、 $f(a^2 - 3) = f(a)$ の場合も可能である、ということに注意しましょう。(センターは穴埋めなのでここでは関係ないが)

(2) は二次関数のグラフを考えると $a^2 - 3, a, 0$ の大小に注目すればしぼりこみやすいです。 L の式は t の二次式で表せ、 t^2 の係数が負であることから最大値は平方完成すれば求めやすいです。また a の条件を決める式は $a^2 - 3 < a$ を解くことで得られる範囲が使われています $\left(a < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)$ から、それに着目すれば L は 0 にいくらでも近づけられることが直感でわかると思います。

第3問

三角形と円を用いた幾何の問題です。

- (1) は $\angle ACB$ が2通り考えられる上に未知の長さの辺 BC が対辺でないため計算がどうしても多くなります。地道にやっていくしかないでしょう。
- (2) は面積を求めるところまでは順当に進められると思います。それ以降は図を描いていきながら円と直線との性質を追って解いていくことになるでしょう。

第4問

統計を用いた問題です。問題数は少ないですが計算や検証が多いため時間配分が重要になります。

- (1) はまじめに計算するしかなさそうです。直感では正答を選べそうにありません。
- (2) は選択肢が多いですが定義に従って検証していきましょう。
- (3) は式にあてはめて求めるのが確実そうです。直感でやると相関係数を1倍と選んでしまう可能性があります。
- (4) は正の相関と負の相関、相関の強さをみて選びましょう。