解答

第 1 問

問題	ア, イ	ウ, エ	オ, カ	キク, ケ, コ	サ, シ	スセ	ソ	タ
解答	2,2	4,4	5,4	-1,1,2	2,3	10	3	6

問題	チ	ツテ, ト	ナ, ニ	ヌネ, ノ	ハ	ヒ, フ, ヘ
解答	1	2a,a	1,4	-5,4	3	-,1,1

第 2 問

問題	ア, イ, ウ	エ, オ, カ	キ, ク	ケ, コ	サ	シ, ス, セ, ソ, タ
解答	a,3,2	6,3,2	4,2	6,3	2	7,6,6,9,3

問題	チ, ツテト, ナ	ニヌネ	ノ, ハ	ヒフ, ヘホ
解答	3,-24,0	-28	2,6	-1,26

第 3 問

問題	ア	イ	ウ	エ, オ	カ, キ	ク	ケ, コ, サ, シ
解答	2	2	2	1,2	2,3	3	1,2,3,2

問題	スセ, ソ, タ	チ, ツ	テ, ト, ナ, ニ
解答	27,8,9	2,1	1,4,3,1

第 4 問

問題	ア	イ	ウエ	オ, カ	キ	ク	ケ	コ	サシ	ス
解答	6	2	90	1,1	6	3	2	2	-1	3

問題	セ, ソタ, チツ	テ	ト, ナ, ニヌ, ネ, ノハ
解答	2,-5,-3	2	8,5,-3,5,-1

第 5 問

問題	ア. イ, ウエ	オ. カキ	クケ. コ
解答	0.5,31	1.75	50.7

問題	サシス. セ	ソ. タ	チ	ツテ	トナ, ニヌ	ネ
解答	531.8	1.2	3	07	06,14	5

解説

第 1 問

[**1**]

線分の長さの 2 乗は各座標の差の 2 乗の総和で表されます。これより

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= (1-\cos 2\theta)^2+(0-\sin 2\theta)^2\\ &= (1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)+\sin^2 2\theta = \underline{2-2\cos 2\theta}\end{aligned}$$

とできます。さらに倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を利用すると

$$\mathrm{AP}^2 = 2-2(2\cos^2\theta-1) = \underline{4-4\cos^2\theta}$$

となります。また同様にして

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (\cos 2\theta-2\cos 3\theta)^2+(\sin 2\theta-2\sin 3\theta)^2\\ &= \cos^2 2\theta-4\cos 2\theta\cos 3\theta+4\cos^2 3\theta\\ &\quad +\sin^2 2\theta-4\sin 2\theta\sin 3\theta+4\sin^2 3\theta\\ &= 1+4-4\cos(3\theta-2\theta) = \underline{5-4\cos\theta}\end{aligned}$$

がわかります。
$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲では θ が大きくなるほど $\cos\theta$ は小さくなりますから
$\dfrac{\pi}{3} \leq \theta < \pi$ のとき $\cos\pi < \cos\theta \leq \cos\dfrac{\pi}{3}$ すなわち $\underline{-1 < \cos\theta \leq \dfrac{1}{2}}$ がわかります。
$\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2 = 9-4\cos\theta-4\cos^2\theta = 10-(1+2\cos\theta)^2$ であり、
$-1 < 1+2\cos\theta \leq 2$ ですので $\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2$ は $1+2\cos\theta=0$ のときに最大、
$1+2\cos\theta = 2$ のときに最小となります。
したがって $\underline{\theta = \dfrac{2}{3}\pi \text{ のとき最大値 } 10}$、$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{3} \text{ のとき最小値 } 6}$ をとります。

[**2**]

(1) $X = 2^x$ のとき、指数関数の計算から$\underline{1{:}X > 0}$がわかります。
$4^{x+a} = (2^2)^{x+a} = 2^{2x+2a}$ となりますので、①の式は
$\underline{2^{2a}X^2 - 2^aX + a = 0}$と変形できます。この判別式は

$$D = 2^{2a} - 4 \cdot 2^{2a} \cdot a = 2^{2a}\underline{(1-4a)}$$

となります。

(2) $a = \dfrac{1}{4}$ のとき $D = 0$ ですから②の式は重解をもち、
その値は $X = \dfrac{2^a}{2 \cdot 2^{2a}} = 2^{-a-1}$ となります。
実際に $X > 0$ の範囲に解が 1 つだけありますので x の解がだた 1 つあることがわかります。その値は $x = -\dfrac{1}{4} - 1 = \underline{\dfrac{-5}{4}}$ とわかります。

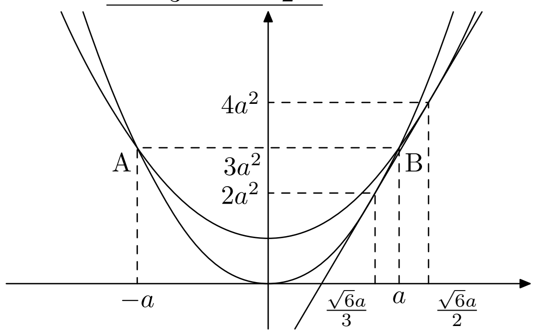
(3) $a \neq \dfrac{1}{4}$ のときに②が $X > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつためには、まず $D > 0$ が必要です。すなわち $a < \dfrac{1}{4}$ がわかります。
このときの②をみたす X の値は実数の範囲で 2 個であり、条件をみたすためには $X = 0$ において②の左辺が 0 以下になることが必要です。
すなわち $a \leq 0$ が必要です。
このとき $X = \dfrac{2^a \pm \sqrt{2^{2a}(1-4a)}}{2}$ であり、$a \leq 0$ であれば
$2^a - \sqrt{2^{2a}(1-4a)} \leq 2^a - 2^a\sqrt{1} = 0$ となりますので $X > 0$ をみたす解がただ 1 つとなります。
したがって求める条件は$\underline{3{:}a \leq 0}$とわかります。
$a \leq 0$ のとき、②の解で正のものは $X = \dfrac{2^a(1+\sqrt{1-4a})}{2 \cdot 2^{2a}}$ と表せますので、

$$\begin{aligned} x &= \log_2 \left\{ \frac{2^a(1+\sqrt{1-4a})}{2 \cdot 2^{2a}} \right\} \\ &= \log_2 2^{-a-1} + \log_2(1+\sqrt{1-4a}) = \underline{-a-1+\log_2(1+\sqrt{1-4a})} \end{aligned}$$

がわかります。

第２問

(1) C_1 と C_2 の共有点の x 座標について $3x^2 = 2x^2 + a^2$ が成り立ちます。
整理すると $x^2 = a^2$ ですので $x = \pm a$ です。
したがって $a > 0$ より A の x 座標は $-a$、B の x 座標は a とわかります。
これを用いて y 座標を計算することで B の座標は$\underline{(a, 3a^2)}$とわかります。
$g(x) = 3x^2$ とおきますと $g'(x) = 6x$ となりますので l の方程式は
$y = 6s(x-s) + 3s^2$ すなわち $y = \underline{6sx - 3s^2}$ となります。
$h(x) = 2x^2 + a^2$ とおきますと $h'(x) = 4x$ となりますので l の方程式を C_2 に着目することで
$y = 4t(x-t) + 2t^2 + a^2$ すなわち $y = \underline{4tx - 2t^2 + a^2}$ となります。
これらが同一の直線を表すとき x の係数と定数項が等しいことがわかります。
x の係数から $6s = 4t$ となりますから $s = \dfrac{2}{3}t$ がわかります。
これを定数項の関係式 $-3s^2 = -2t^2 + a^2$ に代入しますと
$-\dfrac{4}{3}t^2 = -2t^2 + a^2$ より $t^2 = \dfrac{3}{2}a^2$ がわかります。
いま l は放物線で第１象限において接していますから $s > 0, t > 0$ です。
これより$\underline{s = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a, t = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a}$がわかります。

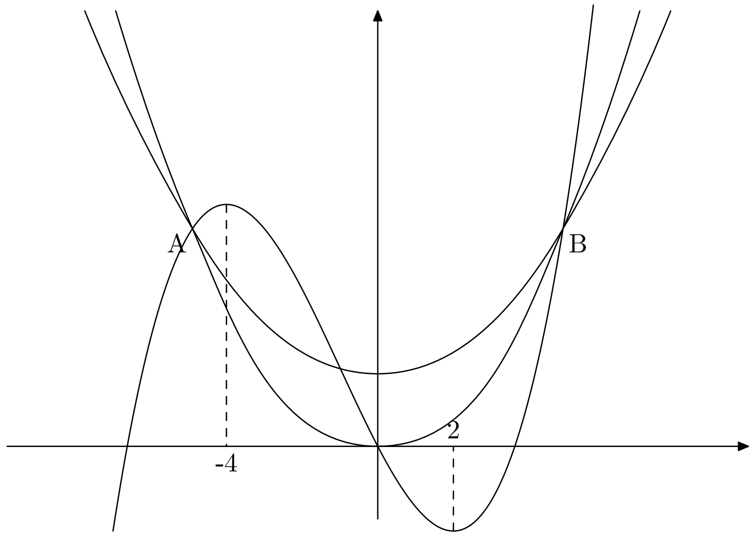


C_1 の $s \leq x \leq a$ の部分、C_2 の $a \leq x \leq t$ の部分、x 軸、$x = s$、$x = t$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_s^a (3x^2)dx + \int_a^t (2x^2 + a^2)dx = \left[x^3\right]_s^a + \left[\frac{2}{3}x^3 + a^2x\right]_a^t \\
&= (a^3 - s^3) + \left\{\left(\frac{2}{3}t^3 + a^2t\right) + \frac{5}{3}a^3\right\} \\
&= -\frac{2}{3}a^3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 a^3 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4}a^2 + a^2\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a \\
&= -\frac{2}{3}a^3 - \frac{2\sqrt{6}}{9}a^3 + \sqrt{6}a^3 = \underline{\frac{7\sqrt{6}-6}{9}a^3}
\end{aligned}
$$

となります。

(2) まず $y=f(x)$ は原点を通りますので $f(0)=0$ です。
すなわち $f(0)=r$ より $r=0$ がわかります。
次に点 A の座標は $(-a,3a^2)$ ですので $y=f(x)$ が点 A,B を通ることから $f(-a)=f(a)=3a^2$ すなわち
$-a^3+pa^2-qa=a^3+pa^2+qa=3a^2$ がわかります。これを利用すると
$f(-a)+f(a)=2pa^2=6a^2$ となります。$a>0$ ですので $2a^2$ で割って $p=3$ がわかります。
さらに $f'(x)=3x^2+2px+q=3x^2+6x+q$ であり $f(x)$ は $x=-4$ で極値をとることから $f'(-4)=0$ がわかります。
$f'(-4)=48-24+q=0$ より $q=-24$ となり、結局$\underline{p=3,q=-24,r=0}$ がわかります。
これより $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$ となりますから、$f(x)$ は $x=-4,2$ で極値をとり、増減を考えると極小値は $f(2)=2^3+3\cdot 2^2-24\cdot 2=\underline{-28}$ とわかります。
また $f(a)=3a^2$ の左辺を展開すると $a^3+3a^2-24a=3a^2$ ですから整理すると
$a^3-24a=0$ すなわち $a(a^2-24)=0$ となります。$a>0$ ですのでこの式をみたすのは $\underline{a=2\sqrt{6}}$ とわかります。
すなわち $f(x)=x^3+3x^2-24x$ と C_2 の式 $h(x)=2x^2+24$ より曲線 $y=f(x)$ と C_2 の共有点の x 座標において $x^3+3x^2-24x=2x^2+24$ が成り立ちます。
整理すると $x^3+x^2-24x+24=0$ となり因数分解して
$(x+1)(x+2\sqrt{6})(x-2\sqrt{6})=0$ となります。
$a=2\sqrt{6}$ ですので $x=\pm 2\sqrt{6}$ は A,B の x 座標となります。ということで残りは $x=-1$ であり、座標は $(-1,f(-1))$ より$\underline{\text{(-1,26)}}$となります。



第３問

(1) $s=4$ のとき $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+4}{a_n+2}=\dfrac{2(a_n+2)}{a_n+2}=2$ となります。したがって $n\geq 2$ ならば $a_n=2$ ですので$\underline{a_2=2, a_{100}=2}$となります。

(2) $s=0$ のとき $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$ です。$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\underline{2}$ がわかります。
また $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}=b_n+\underline{\dfrac{1}{2}}$ がわかります。すなわち $\{b_n\}$ は等差数列なので初項から $b_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{3+n}{2}$ となり、すなわち $a_n=\underline{\dfrac{2}{3+n}}$ がわかります。

(3) $s=1$ のとき、$c_n=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$ とおくと、$c_1=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=\underline{3}$ となります。
また $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}$ です。これより
$1+a_{n+1}=\dfrac{3a_n+3}{a_n+2}, 1-a_{n+1}=\dfrac{1-a_n}{a_n+2}$ となりますから
$c_{n+1}=\dfrac{1+a_{n+1}}{1-a_{n-1}}=\dfrac{3(a_n+1)}{1-a_n}=3c_n$ となります。
これより $c_n=3^n$ となりますから $3^n=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$ です。
分母を払って整理すると $(3^n+1)a_n=3^n-1$ ですから
$a_n=\dfrac{3^n-1}{3^n+1}=\underline{1-\dfrac{2}{3^n+1}}$ となります。

(4) $c_kc_{k+1}=3^k\cdot 3^{k+1}=3\cdot 9^k=27\cdot 9^{k-1}$ となりますから数列 $\{c_nc_{n+1}\}$ は初項 27、公比 9 の等比数列です。したがって

$$\sum_{k=1}^{n}c_kc_{k+1}=27\cdot\frac{9^n-1}{9-1}=\underline{\frac{27}{8}(9^n-1)}$$

がわかります。
また $s=1$ のとき①の漸化式の分母を払うと $a_{n+1}(a_n+2)=2a_n+1$ となりますのでさらに変形して
$a_na_{n+1}=\underline{2(a_n-a_{n-1})+1}$ とできます。これより

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n}\{2(a_k-a_{k+1})+1\}\\ &= 2(a_1-a_{n+1})+n=2\cdot\frac{1}{2}+n-2\left(1-\frac{2}{3^{n+1}+1}\right)\\ &= \underline{n-1+\frac{4}{3^{n+1}+1}}\end{aligned}$$

となります。

第４問

(1) $|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \underline{\sqrt{6}}$ であり、
$|\vec{q}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \underline{\sqrt{2}}$ です。
また $\vec{p} \cdot \vec{q} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0$ ですので $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角は$\underline{90^\circ}$です。

(2) $\bar{n} = (1, y, z)$ とおきます。$\vec{n}$ は $\vec{p}$ と $\vec{q}$ に垂直ですから
$\vec{n} \cdot \vec{p} = 2 - y - z = 0, \vec{n} \cdot \vec{q} = y - z = 0$ です。これより $y = z = 1$ となり、すなわち$\underline{\vec{n} = (1, 1, 1)}$となります。
各ベクトルをこれらを使って表現してみます。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r\vec{n} + s\vec{p} + t\vec{q}$ と表すとき、
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{n} = 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \underline{6}, \vec{n} \cdot \vec{n} = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ です。
また $\vec{n} \cdot \vec{p} = \vec{n} \cdot \vec{q} = 0$ ですから $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{n} = 3r$ がわかり、すなわち $6 = 3r$ より$\underline{r = 2}$がわかります。
また、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{p} = 6 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 12$ ですので $12 = 6s$ となりすなわち$\underline{s = 2}$がわかり、
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{q} = 6 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -2$ ですので $-2 = 2t$ となりすなわち$\underline{t = -1}$がわかります。
さらに $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 9$ より $9 = 3u$ となりすなわち$\underline{u = 3}$がわかります。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -2\vec{n} + 2\vec{p} - \vec{q}$ となります。したがって座標は
$(-2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 0, -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1, -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - (-1))$
すなわち$\underline{(2,\text{-}5,\text{-}3)}$となります。また、$\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 3\vec{n}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2\vec{n}$ が平面 α 上のある点の位置ベクトルとなりますので、線分 BC を結ぶと平面 α との交点で BC を$\underline{3{:}2}$に内分します。
この点 C は平面 α に対して A と対称になるようにとった点です。ということで、M が線分 BC と平面 α との交点に一致する点が $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}| + |\overrightarrow{\mathrm{BM}}|$ を最小にします。ということでその点の座標は

$$\left(\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{2 + 3}, \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot (-5)}{2 + 3}, \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3)}{2 + 3}\right)$$

すなわち$\underline{\left(\frac{8}{5}, \frac{-3}{5}, -1\right)}$となります。

第５問

(1) 菓子の重さが正規分布に従うことから
$P(X < 50) = P\left(Z < \dfrac{50-50.2}{0.4}\right) = P(Z < \underline{-0.5})$ となります。
正規分布表から $z_0 = 0.5$ のときの面積は 0.1915 となっていますから
$P(Z < -0.5) = 0.5 - P(0.5 \leq Z \leq 0) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085$ より
四捨五入して $P(Z < -0.5) = \underline{0.31}$ となります。

(2) $P(Z < z) = 0.0401$ となるとき、標準正規分布表で面積が $0.5-0.0401 = 0.4599$ となる z_0 を探します。
この値は $z_0 = 1.75$ とありますので、すなわち $P(Z < \underline{-1.75}) = 0.0401$ です。
この値を $P(X < 50)$ にしたい場合、$-1.75 = \dfrac{50-m}{0.4}$ を解くことになり、
このとき $m = \underline{50.7}$ となります。

(3) 独立な確率変数は平均と分散を加算できます。これを利用すると、
Y の平均は $9m + 80 = \underline{531.8}$ であり、標準偏差は $\sqrt{9\sigma^2} = 3\sigma = \underline{1.2}$ だとわかります。
また、$\bar{X} = \dfrac{Y-80}{9}$ であることを利用すると $\bar{X}$ の標準偏差は $\dfrac{1.2}{9} = \underline{\dfrac{0.4}{3}}$ であるとわかります。$\bar{X}$ の平均も m で表せますから、
$P(\bar{X} < 50) = P\left(Z < \dfrac{50-50.2}{\frac{0.4}{3}}\right) = P(Z < -1.5) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$ となりますので、四捨五入してその確率は$\underline{0.07}$となります。

(4) 100 個の菓子による標本平均は標準偏差が $\dfrac{0.2}{\sqrt{100}} = 0.02$ の正規分布に従います。信頼度 95%の区間は標準偏差の 1.96 倍（正規分布表で面積が 0.4750 となる値が 1.96）ですので、信頼区間は
$50.10 - 0.02 \cdot 1.96 \leq m \leq 50.10 + 0.02 \cdot 1.96$ より $50.0608 \leq m \leq 50.1392$
すなわち四捨五入して$\underline{50.06 \leq m \leq 50.14}$となります。
信頼度と標準偏差が同じで信頼区間の幅を半分にしたい場合、標本平均の標準偏差を半分にします。この値は標本の大きさの平方根に反比例しますので、標準偏差を半分にしたい場合は標本の大きさを 4 倍、すなわち $100 \cdot 4 = \underline{5:400}$ にすることになります。

所感

第 1 問

[1]

同心円上にくる 3 点を使った三角関数の問題です。
道筋が示されていますので基本的なやりかたを抑えていれば解けると思います。

[2]

指数対数関数の問題です。
本試験では対数関数の値域が出題されましたがこちらは (1) で指数関数の値域が出ています。
基本的な計算をしていれば (1) は解けると思います。
(2) からは少し面倒な計算が必要です。二次関数で扱ったであろう特定範囲での解の個数の条件を考えることになります。

第 2 問

多項式の微積分を利用した問題です。
(1) は放物線と共通接線を使用しています。細かく方針が示されていますので接点を出すところまでは解きやすいと思いますが面積計算は少々面倒です。
(2) は通る点に関する等式と「極値をとる x では微分係数が 0 になる」という性質を利用することで最後まで解き進められると思います。

第 3 問

定数部分を色々に変化させる漸化式を利用した問題です。
(1) は漸化式が定数式になる形式であり、普通に計算すれば迷うことはないと思います。
(2) は逆数をとると等差数列になる形式です。これもよくある形式だと思います。
(3) 以降は分数式を特殊な変形をして性質を導きだすものです。自力では難しいですが問題文にある変形をして計算を進めるとやりやすい形式になってくれます。

第 4 問

3 次元座標空間におけるベクトルの問題です。
(1) は絶対値と内積を計算すれば導けます。
(2) 以降では 3 次元座標での表現を互いに垂直な 3 本のベクトルでの表現に変換しています。互いに垂直なベクトルを使用すると変換がしやすいことがこの問題で計算を進めていくと実感できるかもしれません。
(3) では交点が内分する比を計算する際、この解答のように B,C から垂線をおろして考えると図形の性質から求めることができますが、思いつかない場合は直線 BC 上の点と α 上の点とで媒介変数表示の式をたてて求めることになりそうです。

第 5 問

確率と統計の問題です。
(1) と (2) は素直に表を参考にしながら計算すれば解き進められると思います。
(3) は個数による平均と標準偏差の変化を考えますが、確率変数の計算を考えれば何倍になるかは求められるでしょう。
(4) はどうしてもやり方の暗記に頼るしかないですがやり方が分かっていれば最後まで解けます。