問題

$\boxed{\mathbf{1}}$

　凸五角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n$ が以下の条件を満たしている。
・A_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の中点・B_{n+1} は辺 $\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n$ の中点
・C_{n+1} は辺 $\mathrm{E}_n\mathrm{A}_n$ の中点・D_{n+1} は辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点
・E_{n+1} は辺 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の中点

(1) 正の実数 α をうまくとると数列 $\left\{\alpha^n|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}|\right\}$ が 0 でない実数に収束するようにできることを示せ。

(2) 五角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n$ の 5 本の辺の長さの和を L_n,5 本の対角線の長さの和を M_n とする。極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{M_n}{L_n}$ を求めよ。

凸五角形とは、その内角がすべて 180° 未満であることをいう。また、五角形の対角線とは、2 頂点を結ぶ線分で辺ではないもののことである。

$\boxed{\mathbf{2}}$

　実数 a, b が $0 \leq a < 1$ および $0 \leq b < 1$ をみたしている。このとき、次の条件 (C) を満たす 2 つの整数 m, n が存在することを示せ。
(C)xy 平面において、点 $(m+a, n+b)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{100}$ の円の内部が、$y = x^2$ のグラフと共有点をもつ。

$\boxed{\mathbf{3}}$

n を自然数とする。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ ずつであるような硬貨を用意し、この硬貨を 2^n-1 回投げる。$2^{n-1} \leq k \leq 2^n-1$ である自然数 k のうち少なくとも 1 つが条件 (*) を満たす確率を p_n とする。
(*) n 以下のすべての自然数 m について、$\left[\dfrac{k}{2^{n-m}}\right]$ 回目の硬貨投げの結果は表である。
実数 x について、$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。
例えば、p_1 は硬貨を 1 回投げて表が出る確率を表すので $p_1=\dfrac{1}{2}$ である。p_2 は硬貨を 3 解投げて「1 回目と 2 回目が表」であるか「1 回目と 3 回目が表」であるかの少なくとも一方が成り立つ確率を表すので $p_2=\dfrac{3}{8}$ である。

(1) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(2) $r_n=\dfrac{2}{p_n}-n$ とする。すべての n に対して $r_n \geq 3$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して、$\dfrac{2}{3+n+\log n} \leq p_n \leq \dfrac{2}{n+3}$ を示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$

自然数 k と n は互いに素で、$k<n$ を満たすとする。n 項からなる数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が次の 3 条件 (イ),(ロ),(ハ) を満たすとき、性質 $\mathrm{P}(k,n)$ を持つということにする。
(イ)$a_1, a_2, \cdots, a_n$ はすべて整数
(ロ)$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2^n-1$
(ハ)$a_{n+1}, \cdots, a_{n+k}$ を $a_{n+j}=a_j (1 \leq j \leq k)$ で定めたとき、n 以下のすべての自然数 m に対して $2a_m - a_{m+k}$ は 2^n-1 で割り切れる。

(1) 性質 $\mathrm{P}(2,5)$ を持つ数列をすべて求めよ。

(2) 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が性質 $\mathrm{P}(k,n)$ を持つとする。$a_{k+1}-a_k=1$ を示せ。

解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

$\vec{a_n} = \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}, \vec{b_n} = \overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}, \vec{c_n} = \overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}, \vec{d_n} = \overrightarrow{\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n}, \vec{e_n} = \overrightarrow{\mathrm{E}_n\mathrm{A}_n}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{a_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n} = \frac{1}{2}\left(\vec{c_n} + \vec{d_n}\right)$ と表せる。

同様に $\overrightarrow{c_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\vec{e_n} + \vec{a_n}\right), \overrightarrow{d_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\vec{a_n} + \vec{b_n}\right)$ と表せるので

$\overrightarrow{a_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\vec{c_{n+1}} + \vec{d_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\vec{a_n} + \frac{1}{4}\vec{b_n} + \frac{1}{4}\vec{e_n}$ がわかる。

$\vec{a_n} + \vec{b_n} + \vec{c_n} + \vec{d_n} + \vec{e_n} = \vec{0}$ を利用すると

$\vec{a_n} + \vec{b_n} + \vec{e_n} = -\vec{c_n} - \vec{d_n} = -2\overrightarrow{a_{n+1}}$ と変形できるので

$\overrightarrow{a_{n+2}} = \frac{1}{4}\vec{a_n} - \frac{1}{2}\vec{a_{n+1}}$ がわかる。

ここで $\overrightarrow{a_{n+2}} - \beta\overrightarrow{a_{n+1}} = \left(-\frac{1}{2} - \beta\right)\left(\overrightarrow{a_{n+1}} - \beta\vec{a_n}\right)$ となるような β を考えると $-\beta\left(-\frac{1}{2} - \beta\right) = \frac{1}{4}$ より $4\beta^2 + 2\beta - 1 = 0$ となり、すなわち $\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ となる。

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{n+2}} + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{a_{n+1}} &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\overrightarrow{a_{n+1}} + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\vec{a_n}\right) \\ \overrightarrow{a_{n+2}} + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{a_{n+1}} &= \left(-\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\overrightarrow{a_{n+1}} + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\vec{a_n}\right) \end{aligned}$$

が成り立ち、これより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{n+1}} + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\vec{a_n} &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^{n-1}\left(\vec{a_2} + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\vec{a_1}\right) \\ \overrightarrow{a_{n+1}} + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\vec{a_n} &= \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\right)^{n-1}\left(\vec{a_2} + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\vec{a_1}\right) \end{aligned}$$

がわかる。よって $\beta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \beta_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ とおくと

$$\vec{a_n} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left\{(-\beta_2)^{n-1}\left(\vec{a_2} + \beta_1\vec{a_1}\right) + (-\beta_1)^{n-1}\left(\vec{a_2} + \beta_2\vec{a_1}\right)\right\}$$

となる。よって $\vec{a_2} + \beta_2\vec{a_1} = \vec{0}$ のときは $\alpha = -\frac{1}{\beta_2} = \sqrt{5} + 1$ とすると $\alpha^n\vec{a_n} = \frac{2\alpha}{\sqrt{5}}\left(\vec{a_2} + \beta_1\vec{a_1}\right)$ となり

$\vec{a_2} + \beta_1\vec{a_1} = \frac{\sqrt{5}}{2}\vec{a_1} \neq \vec{0}$ より $|\alpha^n\vec{a_n}|$ は 0 でない値に収束する。

$\overrightarrow{a_2}+\beta_2\overrightarrow{a_1}\neq\vec{0}$ のときは $\alpha=\dfrac{1}{\beta_1}=\sqrt{5}-1$ とすると

$$\alpha^n\overrightarrow{a_n}=\frac{2\alpha}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}(\overrightarrow{a_2}+\beta_1\overrightarrow{a_1})+(\overrightarrow{a_2}+\beta_2\overrightarrow{a_1})\right\}$$

となり $3-\sqrt{5}<2$ より $n\to\infty$ とすると
$\lim_{n\to\infty}\alpha^n\overrightarrow{a_n}=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{5}}(\overrightarrow{a_2}+\beta_2\overrightarrow{a_1})$ となるので $|\alpha^n\overrightarrow{a_n}|$ は 0 でない値に収束する。

(2) $L_n=|\overrightarrow{a_n}|+|\overrightarrow{b_n}|+|\overrightarrow{c_n}|+|\overrightarrow{d_n}|+|\overrightarrow{e_n}|$、
$M_n=|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}|+|\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}|+|\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n}|+|\overrightarrow{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}|+|\overrightarrow{\mathrm{E}_n\mathrm{B}_n}|$ である。
ここで $\overrightarrow{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{c_n}+\overrightarrow{d_n})$ などを利用すると

$$\begin{aligned}M_n&=|\overrightarrow{a_n}+\overrightarrow{b_n}|+|\overrightarrow{b_n}+\overrightarrow{c_n}|+|\overrightarrow{c_n}+\overrightarrow{d_n}|+|\overrightarrow{d_n}+\overrightarrow{e_n}|+|\overrightarrow{e_n}+\overrightarrow{a_n}|\\&=|2\overrightarrow{d_{n+1}}|+|2\overrightarrow{e_{n+1}}|+|2\overrightarrow{a_{n+1}}|+|2\overrightarrow{b_{n+1}}|+|2\overrightarrow{c_{n+1}}|=2L_{n+1}\end{aligned}$$

と変形できる。
ここで $\overrightarrow{a_2}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{a_1}=\vec{0}$ であるとすると $\overrightarrow{c_1}+\overrightarrow{d_1}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{a_1}=\vec{0}$ より $\overrightarrow{a_1}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\overrightarrow{b_1}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\overrightarrow{e_1}=\vec{0}$ となりすなわち $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ と $\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1$ が交わってしまうので不適。
したがって $\overrightarrow{a_2}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{a_1}\neq\vec{0}$ であるので $|(\sqrt{5}-1)^n\overrightarrow{a_n}|$ が $n\to\infty$ で 0 でない値に収束することがわかる。
他の辺についても同様のことがいえるので $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5}-1)^nL_n$ が正の値に収束することがわかる。この値を L とすると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{L_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2L_{n+1}}{L_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\alpha}\frac{\alpha^{n+1}L_{n+1}}{\alpha^nL_n}\\&=\frac{2L}{\alpha L}=\underline{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

　$m=50$ において考える。$50 \leq x < 51$ のとき $2500 \leq y < 2601$ である。
また、整数 n が $2500 \leq n < 2601$ をみたすとき
$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{100}$ であるので
$\sqrt{n}-50 \leq a \leq \sqrt{n+1}-50, 0 \leq b < 1$ であるならば

$$\left(a+50-\frac{1}{100}\right)^2 \leq \left(\sqrt{n+1}-\frac{1}{100}\right)^2 < n$$
$$\left(a+50+\frac{1}{100}\right)^2 \geq \left(\sqrt{n}+\frac{1}{100}\right)^2 > n+1$$

より $\left(a+50-\dfrac{1}{100}\right)^2 \leq b+n \leq \left(a+50+\dfrac{1}{100}\right)^2$ が成立する。
これはすなわち $a+m-\dfrac{1}{100} < x < a+m+\dfrac{1}{100}$ の範囲に $x^2=b+n$ となるような x が存在することを示している。
したがって $a+m-\dfrac{1}{100} < x < a+m+\dfrac{1}{100}, y=b+n$ をみたす範囲は中心 $(a+m, b+n)$ で半径 $\dfrac{1}{100}$ の円に含まれることから、条件 (C) が成立することがいえる。

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) 硬貨を $2^{n+1}-1$ 回投げたとき、$2\cdot 2^{n-1}\leq k\leq 3\cdot 2^{n-1}-1$ である自然数 k のうち条件 (*) をみたすものがある場合を考える。
k が条件を満たす場合、$k'=k-2^{n-1}$ とおくと $2\leq m\leq n+1$ について $\left[\dfrac{k'+2^{n-1}}{2^{n+1-m}}\right]$ 回目すなわち $\left[\dfrac{k'}{2^{n+1-m}}\right]+2^{m-2}$ 回目の結果が表であり、さらに $\left[\dfrac{k}{2^n}\right]=1$ 回目も表であると言い換えられる。
また $3\cdot 2^{n-1}\leq k\leq 4\cdot 2^{n-1}-1$ である自然数 k のうち条件 (*) を満たすものがあるとき、$k'=k-2\cdot 2^{n-1}$ とおくことで同様に考えると $2\leq m\leq n+1$ について $\left[\dfrac{k'+2\cdot 2^{n-1}}{2^{n+1-m}}\right]$ 回目すなわち $\left[\dfrac{k'}{2^{n+1-m}}\right]+2\cdot 2^{m-2}$ 回目の結果が表であり、さらに $\left[\dfrac{k}{2^n}\right]=1$ 回目も表であると言い換えられる。
これらから考えると、$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\{1-(1-p_n)^2\}=\underline{\dfrac{2p_n-p_n^2}{2}}$ と表せる。

(2) n に関する帰納法で示す。$n=1$ のとき $r_1=\dfrac{2}{p_1}-1=3$ なので成り立つ。
$n=k$ のとき $r_n\geq 3$ が成り立ったとする。

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \frac{2}{p_{k+1}}-(k+1)=\frac{4}{2p_k-p_k^2}-(k+1) \\ &= \frac{4}{p_k(2-p_k)}-k-1=\frac{2}{p_k}+\frac{2}{2-p_k}-k-1 \\ &\geq \frac{2}{p_k}+1-k-1=\frac{2}{p_k}-k=r_k \end{aligned}$$

が成り立つので $r_{k+1}\geq 3$ がいえる。
したがって帰納的にすべての自然数 n において $r_n\geq 3$ がいえる。

(3) (2) より $\dfrac{2}{p_n}-n\geq 3$ なのでこれを変形すると $p_n\leq\dfrac{2}{3+n}$ がわかる。これを利用すると

$$\begin{aligned} r_{n+1} &\leq \frac{2}{p_n}+\frac{2}{2-\frac{2}{3+n}}-n-1=\frac{2}{p_n}+\frac{3+n}{2+n}-n-1 \\ &= \frac{2}{p_n}-n+\frac{1}{2+n}=r_n+\frac{1}{2+n} \end{aligned}$$

がわかる。これを繰り返していくことで $r_n\leq r_1+\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2+k}$ がわかる。

ここで

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2+k} &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+k+x} dx \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} [\log(1+k+x)]_0^1 = \sum_{k=1}^{n-1} \{\log(2+k) - \log(1+k)\} \\
&= \log(n+1) - \log 2 = \log\left(\frac{n+1}{2}\right) = \log\left(n - \frac{n-1}{2}\right) \leq \log n
\end{aligned}
$$

と変形できるので、$r_n \leq 3 + \log n$ が成り立つ。
これより $\dfrac{2}{p_n} \leq 3 + n + \log n$ となり、これを変形することで
$\dfrac{2}{3+n+\log n} \leq p_n$ が得られる。

$\boxed{\mathbf{4}}$

$2a_m - a_{m+k}$ がとりうる値を考える。
$m+k \leq n$ であるとき $a_m < a_{m+k}$ より $2a_m - a_{m+k} < a_m < 2^n - 1$ であるから $2^n - 1$ で割り切れるときは $2a_m - a_{m+k} = 0$ のときに限られる。
$m+k > n$ であるとき $m+k < m+n$ であるから $a_m > a_{m+k}$ となる。したがって $2a_m - a_{m+k} > a_m \geq 0$ であり $2a_m - a_{m+k} \leq 2a_m < 2\cdot(2^n-1)$ であるから $2^n - 1$ で割り切れるときは $2a_m - a_{m+k} = 2^n - 1$ のときに限られる。
すなわち a_{m+k} の値は $m+k \leq n$ ならば $2a_m$、$m+k > n$ ならば $2a_m - 2^n + 1$ となる。

(1) 条件より順に計算すると $a_3 = 2a_1, a_5 = 2a_3 = 4a_1,$
$a_2 = a_7 = 2a_5 - 2^5 + 1 = 8a_1 - 31, a_4 = 2a_2 = 16a_1 - 62,$
$a_1 = a_6 = 2a_4 - 2^5 + 1 = 32a_1 - 155$ となる。
したがって $a_1 = 32a_1 - 155$ が成立することが必要であり、このとき $a_1 = 5$
これより $P(5,2)$ を持つ数列は$\underline{\{5, 9, 10, 18, 20\} \text{ のみ}}$とわかる。

(2) a_i を 2 進法で表現した式を $a_i = \sum_{j=1}^{m_i} 2^{p_{i,j}}$ とする。
$i+k \leq n$ ならば $a_{i+k} = \sum_{j=1}^{m_i} 2^{p_{i,j}+1}$ なので $m_i = m_{i+k}$ である。
また、$i+k > n$ ならば $2a_i \geq 2^n - 1$ なので $p_{i,j} = n-1$ となるようなものが存在する。これを $p_{i,1}$ とおくと
$a_{i+k} = \sum_{j=2}^{m_i} 2^{p_{i,j}+1} + 2^n - (2^n - 1) = \sum_{j=2}^{j=m_i} 2^{p_{i,j}+1} + 2^0$ とできるのでこの場合も $m_i = m_{i+k}$ が成り立つ。
したがって m_i は i によらない値であるのでこの値を m とすると
$a_i = \sum_{j=1}^{m} 2^{p_{i,j}}$ とおける。
ここで $p_{i,j}$ の値を考えてみる。
$a_{[\frac{n-i}{k}]k+i} = 2^{[\frac{n-i}{k}]}a_i$ と表され、さらに
$a_{[\frac{n-i}{k}+1]k+i} = a_{[\frac{n-i}{k}+1]k+i-n} = 2^{[\frac{n-i}{k}]+1}a_i - 2^n + 1$ となることがわかる。
すなわち $p_{i,j} + \left[\dfrac{n-i}{k}\right] + 1 = n$ となるような $p_{i,j}$ が存在することがわかる。
そこで $p_{i,1} = n - 1 - \left[\dfrac{n-i}{k}\right]$ とすると
$a_{[\frac{n-i}{k}+1]k+i-n} = \sum_{j=2}^{m} 2^{p_{i,j}+\left[\frac{n-i}{k}\right]+1} + 2^n - (2^n - 1)$
$= \sum_{j=2}^{m} 2^{p_{i,j}+\left[\frac{n-i}{k}\right]+1} + 2^0$
同様の議論をすると $m = k$ となることがわかり、
$p_{i,j} = n - 1 - \left[\dfrac{jn-i}{k}\right]$ がわかる。
したがって $a_i = \sum_{j=1}^{k-1} 2^{n-1-\left[\frac{jn-i}{k}\right]}$ となり、
これより $a_1 = \sum_{j=1}^{k-1} 2^{n-1-\left[\frac{jn-1}{k}\right]}$、$a_n = \sum_{j=1}^{k} 2^{n-1-\left[\frac{(j-1)n}{k}\right]}$ がわかる。

これより、$a_k = 2a_n - (2^n - 1) = \sum_{j=2}^{k} 2^{n-\left[\frac{(j-1)n}{k}\right]} + 2^0$、
$a_{k+1} = 2a_1 = \sum_{j=1}^{k} 2^{n-\left[\frac{jn-1}{k}\right]}$ がわかる。
n と k は互いに素なので $1 \leq j < k$ において jn は k で割り切れないことから $\left[\dfrac{jn}{k}\right] = \left[\dfrac{jn-1}{k}\right]$ がいえるので、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sum_{j=1}^{k-1} 2^{n-\left[\frac{jn}{k}\right]} + 2^{n-\left[\frac{kn-1}{k}\right]} \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} 2^{n-\left[\frac{(j-1)n}{k}\right]} + 2^{n-(n-1)} \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} 2^{n-\left[\frac{(j-1)n}{k}\right]} + 2^1 = a_k + 1 \end{aligned}$$

となり、$a_{k+1} - a_k = 1$ であることがいえる。

所感

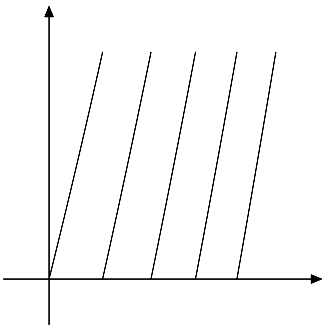
　前年度より難しくなって帰ってきました。特に第４問は数学オリンピック本選に行けるくらいの実力がないと無理だったのでは？とまで思えます。

$\boxed{\mathbf{1}}$

　五角形に関するベクトル問題です。この問題は少し面倒ですが各辺を基準にしたベクトルを考えるとやりやすいと思います。
これをすると $\overrightarrow{\mathrm{A}_{n+2}\mathrm{B}_{n+2}}, \overrightarrow{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}, \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$ で漸化式が作れますので一般式を導けます。
この導いた式をどう活用するかがもう一つの分かれ目か。

$\boxed{\mathbf{2}}$

　とっつきにくそうな関数問題です。
たとえば $y = x^2$ のグラフを考えて各点の座標をすべて小数部分だけにする、というのを考えるのがいいと思います。
この解答では x が大きくなるとある上向きの変化率が大きい曲線がびっしりと並ぶことを利用し、幅 $\dfrac{1}{100}$ の範囲に収まる細さになってくるところを利用しています。



参考：$2 \leq t \leq 3$ において x を t の小数部分、y を t^2 の小数部分としたグラフ。$y = 1$ の部分は含まない

$\boxed{\mathbf{3}}$

　コインをもとにした複雑な確率の問題です。
n の状態から $n+1$ の状態を作るのが難しく、そして問題全体に影響を与える要素となっています。
ここを乗り切ればあとは順当に進められますので楽です。

$\boxed{\mathbf{4}}$

本試験最難関ともいえる問題です。
まずは a_{i+k} と a_i との関係を式に直すことになりますがこれは比較的易しいです。これができれば (1) は 1 通りであることがわかるでしょう。
問題は (2) です。不等式で絞り込んだりするとおそらく結果は見えません。
2 進法で表現したときに道筋が見えてきそうですが、ある特定の並びを循環させている、と気づくのに時間がかかりそうです。
参考 : (1) で求めた数列は $00101_{(2)}, 01001_{(2)}, 01010_{(2)}, 10010_{(2)}, 10100_{(2)}$ となり、00101 を循環させたものになっています