問題

(全部で 4 問あるが、III は物理、IV は化学の知識が求められる問題なのでここには記述しない)

I

a, b, c, p, q, r は実数で、a, p は 0 でないとする。さらに、2 つの放物線
$C_1 : y = ax^2 + bx + c, C_2 : y = px^2 + qx + r$
は相異なるとする。このとき、C_1 と C_2 に共通接線が存在するための必要十分条件は、
「a と p が同符号で C_1 と C_2 の共有点の個数が 1 以上」または
「a と p が異符号で C_1 と C_2 の共有点の個数が 1 以下」であることを証明せよ。

II

$a \geq 0$ に対して、放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}_a\left(a, \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線を l_a で表す。点 $\mathrm{Q}\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ から接線 l_a に下ろした垂線と接線 l_a との交点を H_a で表す。

問 1 P_a と H_a が一致するような正の数 a を a_0 と表す。このとき、a_0 の値を求めよ。

問 2 a が $0 \leq a \leq a_0$ の範囲を動くときにできる点 H_a の軌跡と、放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答

I

C_1 と C_2 に共通接線が存在する場合、その式を $y = sx + t$ とおく。
このとき 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = sx + t, px^2 + qx + r = sx + t$ はいずれも重解をもつので、判別式から
$(b - s)^2 - 4a(c - t) = 0, (q - s)^2 - 4p(r - t) = 0$ が成り立つ。これらより
$t = c - \dfrac{(b-s)^2}{4a} = r - \dfrac{(q-s)^2}{4p}$ となるので、
s についての方程式 $c - \dfrac{(b-s)^2}{4a} = r - \dfrac{(q-s)^2}{4p}$ が実数解をもつことになる。
これを整理すると $(a - p)s^2 + 2(bp - aq)s + 4ap(c - r) + aq^2 - b^2p = 0$ となる。
以降は $a = p$ のときと $a \neq p$ のときに分けて考える。

(i)$a = p$ のとき
$2a(b - q)s + 4a^2(c - r) - a(q^2 - b^2) = 0$ と変形できる。
$b = q$ であるとすると方程式は $4a^2(c - r) = 0$ となり、条件より $a \neq 0, c \neq r$ なので解が存在しないことがわかる。すなわち $a = p$ のときに実数解をもつ必要十分条件は $b \neq q$ となる。
ここで方程式 $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ を考えると $(b - q)x = r - c$ と変形できる。$b = q$ の場合は $c \neq r$ より解が 0 個となり、$b \neq q$ のときは解が 1 個だけある。
すなわち接線をもつ条件は「$ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ の実数解は 1 個以上」と同値といえる。

(ii)$a \neq p$ のとき
共通接線が存在する条件は判別式より
$(bp - aq)^2 - (a - p)\{4ap(c - r) + aq^2 - b^2p\} \geq 0$ である、と言い換えられる。
ここで、

$$
\begin{aligned}
& (bp - aq)^2 - (a - p)\{4ap(c - r) + aq^2 - b^2p\} \\
= \ & (b^2p^2 - 2abpq + a^2q^2) - \{a^2q^2 + b^2p^2 - apq^2 - ab^2p\} - 64(a - p)ap(c - r) \\
= \ & ap(b - q)^2 - 4(a - p)ap(c - r) = ap\{(b - q)^2 - 4(a - p)(c - r)\}
\end{aligned}
$$

とできるので、共通接線が存在するための必要十分条件は
「$ap > 0$ かつ $(b - q)^2 - 4(a - p)(c - r) \geq 0$」または
「$ap < 0$ かつ $(b - q)^2 - 4(a - p)(c - r) \leq 0$」
となる。
$(b - q)^2 - 4(a - p)(c - r)$ は 2 次方程式 $(a - p)x^2 + (b - q)x + (c - r) = 0$ の判別式、

すなわち $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$ の判別式であるため、判別式の符号をもとに言い換えると
「$ap>0$ かつ $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$ の実数解は 1 個以上」または
「$ap<0$ かつ $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$ の実数解は 1 個以下」となる。

よって $a=p, a\neq p$ の場合を合わせると必要十分条件は
「a,p が同符号かつ C_1 と C_2 の共有点は 1 個以上」または
「a,p が異符号かつ C_1 と C_2 の共有点は 1 個以下」であるといえる。

II

問 1 $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^2}{2}=x$ であるから l_a の式は $y=a(x-a)+\dfrac{a^2}{2}$ より

$y=ax-\dfrac{a^2}{2}$ とおける。

したがって H_a の x 座標を $f(a)$ とおくと $\mathrm{H}_a\left(f(a), af(a)-\dfrac{a^2}{2}\right)$ となり、

QH_a が l_a に垂直であることから

$$f(a)\cdot 1+\left\{\left(af(a)-\frac{a^2}{2}\right)-\frac{5}{2}\right\}\cdot a=0$$

がわかる。これを解くと $f(a)=\dfrac{a^3+5a}{2(a^2+1)}$ がわかる。

P_a と H_a が一致するとき $f(a)=a$ であるから $a_0=\dfrac{a_0^3+5a_0}{2(a_0^2+1)}$ が成り立つ。

整理すると $a_0^3-3a_0=0$ より $a_0(a_0^2-3)=0$ であるから、

$a_0>0$ をみたす値は$\underline{a_0=\sqrt{3}}$

問 2 $f(a)=\dfrac{a}{2}+\dfrac{2a}{a^2+1}$ とおける。

$$f'(a) = \frac{1}{2}+\frac{2}{a^2+1}-\frac{4a^2}{(a^2+1)^2}=\frac{a^4-2a^2+5}{2(a+1)^2}=\frac{(a^2-1)^2+4}{2(a^2+1)^2}$$

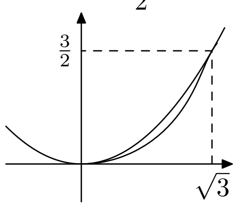
となるので $f(a)$ は単調増加であることがわかり、H_a の x 座標を b とおくと y 座標は 1 通りに表せることがいえる。そこでこの y 座標を $h(b)$ とおく。

また、H_a の y 座標を $g(a)$ とおくと $g(a)=\dfrac{2a^2}{a^2+1}$ となり、

$g(a)=2-\dfrac{2}{a^2+1}$ とできるので単調増加であることがわかる。

さらに、$\dfrac{x^2}{2}-\left(ax-\dfrac{a^2}{2}\right)=\dfrac{(x-a)^2}{2}\geq 0$ であるので

H_a は $y=\dfrac{x^2}{2}$ のグラフの下側にくることがわかる。



これより、

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2}dx - \int_0^{\sqrt{3}} h(b)db = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} g(a)f'(a)da \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\sqrt{3}} \left\{\frac{a^6 - 2a^4 + 5a^2}{(a^2+1)^3}\right\} da \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\sqrt{3}} \left\{1 - \frac{5}{a^2+1} + \frac{12}{(a^2+1)^2} - \frac{8}{(a^2+1)^3}\right\} da \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{-\frac{5}{(\tan^2\theta+1)} + \frac{12}{(\tan^2+1)^2} - \frac{8}{(\tan^2+1)^3}\right\} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-8\cos^4\theta + 12\cos^2\theta - 5)d\theta \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-2(2\cos^2\theta - 1)^2 + 2(2\cos^2\theta - 1) - 1)d\theta \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-2\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta - 1)d\theta \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos 2\theta - \cos 4\theta - 2)d\theta \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left[\sin 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} - 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \underline{\frac{2\pi}{3} - \frac{9}{8}\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

所感

I

　放物線に関する性質を多く利用する問題です。特異な性質を持ち出す必要がないですので取り掛かりやすい、ようですが、非常に論証が細かくなります。
場合分けや議論の方向に注意して丹念に解き進めていきましょう。

II

　曲線に関する問題です。問 1 は設定から順序よく取り出すことで解けると思います。
問 2 の積分が問題です。H_a の軌跡は x, y 座標をどちらも媒介変数表示で表現することになりますのでこの場合の積分計算 (x を x の媒介変数表示で置換積分) に慣れないと先へ進めません。
さらにそのあとで $\dfrac{1}{(a^2+1)^k}$ の形式を積分することになりますが、たぶん $a = \tan\theta$ とする置換をしないと大変だと思います。また、そこからもひと手間かかってしまうでしょう。