問題

第 1 問

座標平面上に放物線 C を $y = x^2 - 3x + 4$ で定め、領域 D を $y \geq x^2 - 3x + 4$ で定める。
原点をとおる 2 直線 l, m は C に接するものとする。

(1) C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件をみたす $\mathrm{P}(p, q)$ の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。
「D のすべての点 (x, y) に対し不等式 $px + qy \leq 0$ が成り立つ」

第 2 問

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}$ で定める。

(1) a_7 と 1 の大小を調べよ。

(2) $n \geq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ。

(3) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

第 3 問

$a > 0$ とし $f(x) = x^3 - 3a^2x$ とおく。

(1) $f(x)$ が $x \geq 1$ で単調に増加するための、a についての条件を求めよ。

(2) 次の 2 条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。
条件 1 ：方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。
条件 2 ：さらに方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

第 4 問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A(1,0) を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をみたす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き、点 R が線分 OA 上を動くとき、$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し、その面積を求めよ。

解答

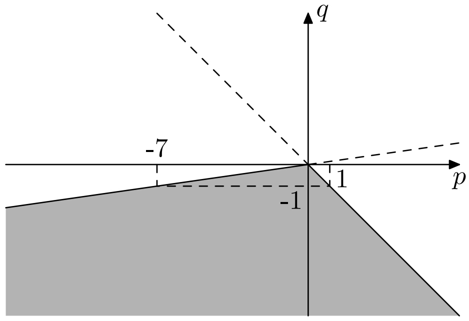
第1問

(1) 原点をとおる直線の式は実数 k を用いて $y=kx$ と表せる。
これが C に接するとき $kx=x^2-3x+4$ は重解をもつ。
整理すると $x^2-(3+k)x+4=0$ なので判別式より $(3+k)^2-16=0$ となり、したがって
$3+k=\pm 4$ より $k=1,-7$ がわかる。
したがって l,m の式は $y=x, y=-7x$ と表せる。これより A の座標を (t,t^2-3t+4) とおくと

$$\begin{aligned}\sqrt{L}+\sqrt{M} &= \sqrt{\frac{|t-(t^2-3t+4)|}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{|7t+(t^2-3t+4)|}{\sqrt{50}}}\\ &= \sqrt{\frac{|-(t-2)^2|}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{|(t+2)^2|}{5\sqrt{2}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5\sqrt{2}}}(\sqrt{5}|t-2|+|t+2|)\end{aligned}$$

となる。したがって $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は $t<-2$ の範囲で減少、$t>2$ の範囲で増加するので
最小値は $-2\leq t\leq 2$ でとることがわかる。このとき
$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\dfrac{1}{\sqrt{5\sqrt{2}}}\{(1-\sqrt{5})t+2(\sqrt{5}+1)\}$
であるので単調減少であることがわかる。
よって $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は $t=2$ で最小値をとるので
そのときの A の座標は $\underline{(2,2)}$

(2) D は点 $(0,4)$ を含むことから $px+qy=4q$ となるので条件をみたすには $q\leq 0$ が必要である。
$q=0$ のときは D が点 $(1,2),(-1,8)$ をふくむことから $-p\leq 0, p\leq 0$ が必要なので $p=0$ となり、このとき $px+qy=0$ となるので条件をみたす。
$q<0$ のときは $px+qy\leq 0$ は $y\geq -\dfrac{p}{q}x$ と書き換えられるので、すべての x に対して $x^2-3x+4\geq -\dfrac{p}{q}x$ をみたすことが必要十分となる。
$r=-\dfrac{p}{q}$ とおくとこの条件は $rx=x^2-3x+4$ が解をもたないか重解をもつ条件に一致するので
$(3+r)^2-16\leq 0$ となり $-7\leq r\leq 1$ が得られる。
これより $q<0$ に注意すると $7q\leq p\leq -q$ となるので条件をみたす (p,q) が動く領域は下図 (境界は実線部) となる。


q
-7
1
p
-1

第 2 問

(1) a_n を階乗で表すと $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$ とできる。

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{(14)!}{(7!)^3} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{7^2\cdot 6^2\cdot 5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2} \\ &= \frac{13\cdot 11}{7\cdot 6\cdot 5} = \frac{143}{210} \end{aligned}$$

となるので、$\underline{a_7 < 1}$ がわかる。

(2) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{(2n)!\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!(n!)^3} = \dfrac{2n(2n-1)}{n^3} = \dfrac{4n-2}{n^2}$ である。

これが 1 より小さいとき $\dfrac{4n-2}{n^2} < 1, n^2 > 0$ より $n^2 - 4n + 2 > 0$ がわかる。

さらに変形すると $(n-2)^2 - 2 > 0$ より $n > 2+\sqrt{2}, n < 2-\sqrt{2}$ となる。

$1 < \sqrt{2} < 2$ であるので $n > 0$ と合わせると $n \geq 4$ となることから

条件をみたす整数は4 以上のすべての整数とわかる。

(3) (2) より $n \geq 4$ ならば $a_n < a_{n-1}$ なので

(1) より $n \geq 8$ のとき $a_n < a_7 < 1$ がわかる。

また作り方から $a_n > 0$ がわかるので $n \geq 8$ ならば $0 < a_n < 1$ となり特に整数でないことがわかる。

したがって a_n が整数となる場合 $n = 1, \cdots, 6$ の場合に限られる。

$a_1 = \dfrac{2!}{(1!)^3} = 2$ であり、$n \geq 2$ で $a_n = \dfrac{4n-2}{n^2}a_{n-1}$ であることを利用すると

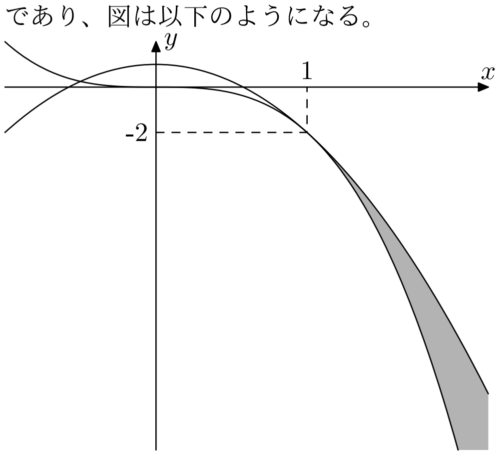
$a_2 = 3, a_3 = \dfrac{10}{3}, a_4 = \dfrac{35}{12}, a_5 = \dfrac{21}{10}, a_6 = \dfrac{77}{60}$ となるので、

a_n が整数となるものは $\underline{n = 1, 2}$ とわかる。

第 3 問

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$ であるので、
$-a < x < a$ で $f'(x) < 0$ となる。
したがって $a \geq 1$ のときは $1 \leq x < a$ で単調増加しなくなることがわかる。したがって求める範囲は $\underline{0 < a \leq 1}$

(2) まず $f(x)$ が $x \geq 1$ で単調増加である場合、$f(x) = b, x \geq 1$ をみたす x はあって 1 個であるので、(1) より条件をみたす場合は $1 < a$ が必要であるとわかる。
また $f(x) = b$ が異なる 3 個の実数解をもつとき $f(a) < b < f(-a)$ より $-2a^3 < b < 2a^3$ がわかる。
このとき $-a < \beta < a$ であり、この区間では $f(x)$ が減少することから (ii) をみたすためには $f(a) < b < f(1)$ が成り立つ必要がある。
すなわち $-2a^3 < b < 1-3a^2$ であるから求める条件は $\underline{a > 1, -2a^3 < b < 1 - 3a^2}$ であり、図は以下のようになる。



第4問

(1) P の座標を (t, t^2) とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (2t, 2t^2)$ となる。

$2t^2 = \dfrac{(2t)^2}{2}, -2 \leq 2t \leq 2$ に注意すると

Q の軌跡は$\underline{\text{放物線 } y = \dfrac{x^2}{2} \text{ の } -2 \leq x \leq 2 \text{ の部分}}$とわかる。

(2) R の座標を $(s, 0)$ とおき Q の座標を $\left(u, \dfrac{u^2}{2}\right)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \left(s+u, \dfrac{u^2}{2}\right)$

となる。

S の x 座標が a であるときに、u のとりうる値を考える。

(1) と $0 \leq s \leq 1$ を合わせて $-2 \leq a \leq 3$ であり、

$u = a - s$ と表されるから $-2 \leq u \leq 2$ かつ $a - 1 \leq u \leq a$ がわかる。

$-2 \leq a \leq -1$ のとき $a - 1 \leq -2 \leq a \leq 0$ であるから

$-2 \leq u \leq a \leq 0$ となり $\dfrac{a^2}{2} \leq \dfrac{u^2}{2} \leq 2$ がわかる。

$-1 \leq a \leq 0$ のとき $-2 \leq a-1 < a \leq 0$ であるから $\dfrac{a^2}{2} \leq \dfrac{u^2}{2} \leq \dfrac{(a-1)^2}{2}$

がわかる。

$0 \leq a \leq \dfrac{1}{2}$ のとき $a - 1 < 0 \leq a$ であり $1 - a > a$ であるから

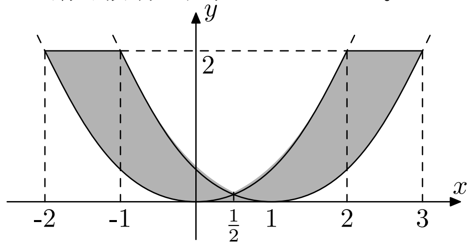
$0 \leq \dfrac{u^2}{2} \leq \dfrac{(1-a)^2}{2}$ がわかる。

同様に計算すると $\dfrac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき $0 \leq \dfrac{u^2}{2} \leq \dfrac{a^2}{2}$ であり

$1 \leq a \leq 2$ のとき $\dfrac{(a-1)^2}{2} \leq \dfrac{u^2}{2} \leq \dfrac{a^2}{2}$ となり

$2 \leq a \leq 3$ のとき $\dfrac{(a-1)^2}{2} \leq \dfrac{u^2}{2} \leq 2$ となるので、

S の動く領域は以下のようになる。



これより、面積は

$$
\begin{aligned}
& \int_{-2}^{-1}\left\{2-\frac{a^2}{2}\right\}da+\int_{-1}^{0}\left\{\frac{(a-1)^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right\}da+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{(1-a)^2}{2}da \\
& +\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{a^2}{2}da+\int_{1}^{2}\left\{\frac{a^2}{2}-\frac{(a-1)^2}{2}\right\}da+\int_{1}^{3}\left\{2-\frac{(a-1)^2}{2}\right\}da \\
= & \int_{-2}^{-1}\left\{2-\frac{a^2}{2}\right\}da+\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}-a\right)da+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2}-a+\frac{1}{2}\right)da \\
& +\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{a^2}{2}da+\int_{1}^{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)da+\int_{1}^{3}\left(\frac{3}{2}+a-\frac{a^2}{2}\right)da \\
= & \left[2a-\frac{a^3}{6}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{a^3}{6}-\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} \\
& +\left[\frac{a^3}{6}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}\right]_{1}^{2}+\left[\frac{3a}{2}+\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{6}\right]_{2}^{3} \\
= & \left(-\frac{11}{6}+\frac{8}{3}\right)+1+\frac{7}{48}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{48}\right)+(1-0)+\left(\frac{9}{2}-\frac{11}{3}\right)=\underline{\frac{95}{24}}
\end{aligned}
$$

所感

第 1 問

二次関数を使った中程度の問題です。l, m についてはどちらが $y = x$ になるか、ということは決められませんので「l は $y = x$、m の式は $y = -7x$ である」ととれる表現を避ける必要があるでしょう。
また、(2) については「ベクトル (p, q) とベクトル (x, y) の内積が負」と条件を言い換えると、2 直線 $y = x, y = -7x$ で分けられる領域のうち D を含む部分の点 (x, y) の位置ベクトルとベクトル (p, q) が鈍角をなすことから解答の範囲が十分条件となることがいえます。

第 2 問

今年は多くの大学で出題された整数を利用した問題です。易しめかもしれません。
(1) は a_7 を展開してどんどん約分して計算すれば大丈夫でしょう。
(2) も単純に定義を代入すれば計算は難しくないです。
(3) は (1)(2) を利用して $n \geq 7$ では整数にならないことを導けるかが分かれ目になります。

第 3 問

3 次関数の微分を利用した問題です。中程度よりは上でしょう。
(1) は問題文を正しく読んでいれば間違えないでしょう。
(2) は条件を積み重ねていることに着目し、上の条件から範囲を絞り込みましょう。

第 4 問

ベクトルと座標平面を利用した問題です。まじめに解こうとすると長時間かかる難問です。
(1) は P 上の点を媒介変数表示して関係式を求めればよいでしょう。
(2) は「(1) の図を x 軸方向に 0 以上 1 以下の範囲で平行移動させた」ぐらいを記述しておけば十分かもしれません。まともに範囲を出すとこの解答のように面倒な記述になります。
面積計算も「長方形 $-2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$ から該当しない部分を除外」という手法をとっても大丈夫だと思います。