問題

$\boxed{1}$

a は正の実数とし、座標平面内の点 (x_0, y_0) は 2 つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|, C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり、$|x_0| \neq 1$ を満たすとする。C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつとき、C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において、辺 BC に B とは異なる点 P を取り、線分 AP の垂直 2 等分線が辺 AB、辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q,R とする。

(1) 線分 QR の長さを $\sin \angle \mathrm{BAP}$ を用いて表せ。

(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{4}$

四面体 ABCD は AC=BD、AD=BC を満たすとし、辺 AB の中点を P、辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき、2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

$\boxed{5}$

整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して、次の一連の操作を考える。ただし各球に書かれている整数は 1 つのみとする。

(i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し、その球に書かれている整数を k とする。

(ii) $k \neq 0$ の場合、整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。

(iii) $k = 0$ の場合、袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。

整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する。この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に、袋の中にある球に書かれている数の合計を X_n とする。例えば X_1 は常に 1 である。以下 $n \geq 2$ として次の問に答えよ。

(1) $X_n \geq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ。

(2) $X_n \leq n+1$ である確率を求めよ。

解答

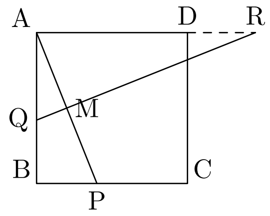
$\boxed{\mathbf{1}}$

$|x_0|>1$ であるとすると $x_0^2-1=x_0^2-2ax_0+2$ より $x_0=\dfrac{3}{2a}$ となる。
このとき C_1 の接線の傾きは $2x_0=\dfrac{3}{a}$、C_2 の接線の傾きは $2x_0-2a=\dfrac{3}{a}-2a$ となる。いま $a\neq 0$ なのでこれらは異なる値となり、すなわち $|x_0|>1$ は不適とわかる。
したがって $|x_0|<1$ がわかり $y_0=1-x_0^2=x_0^2-2ax_0+2$ となる。
また接線の傾きから $-2x_0=2x_0-2a$ であるので $x_0=\dfrac{a}{2}$ であり、
$2x_0^2-2ax_0+1=-\dfrac{a^2}{2}+1=0$ であるので $a>0$ より $a=\sqrt{2}$ したがって
$C_2: y=x^2-2\sqrt{2}x+2$ であり、他の C_1 との共有点は
$-1<x<1$ のとき $1-x^2=x^2-2\sqrt{2}x+2$ より
$2x^2-2\sqrt{2}x+1=(\sqrt{2}x-1)^2=0$ となり $x=x_0$、
$|x|\geq 1$ のとき $x^2-1=x^2-2\sqrt{2}x+2$ より $x=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$
したがって求める面積は

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\{(x^2-2\sqrt{2}x+2)-(1-x^2)\}dx+\int_{1}^{\frac{3}{2\sqrt{2}}}\{(x^2-2\sqrt{2}x+2)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\left[\frac{2x^3}{3}-\sqrt{2}x^2+x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}+\left[3x-\sqrt{2}x^2\right]_{1}^{\frac{3}{2\sqrt{2}}}=\underline{\frac{23\sqrt{2}}{24}-\frac{4}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$



(1) AP の中点を M とする。三角形 ABP は B が直角であるので

$\mathrm{AP}\cos\angle\mathrm{BAP} = \mathrm{AB} = 1$ より $\mathrm{AP} = \dfrac{1}{\cos\angle\mathrm{BAP}}$ がわかる。

また直線 QR は線分 AP の垂直二等分線であることから三角形 AMQ も直角三角形であることから

$\mathrm{MQ} = \mathrm{AM}\cdot\tan\angle\mathrm{PAB} = \dfrac{\sin\angle\mathrm{PAB}}{2\cos^2\angle\mathrm{PAB}}$ がわかる。

また $\angle\mathrm{QRA} + \angle\mathrm{PAR} = 90^\circ$ を利用すると

三角形 RAM は $\angle\mathrm{MRA} = \angle\mathrm{PAB}$ である直角三角形であるので

$\mathrm{AM} = \mathrm{MR}\tan\angle\mathrm{PAB}$ が成り立つ。これより

$$\begin{aligned}\mathrm{QR} &= \mathrm{QM}+\mathrm{RM} = \frac{\sin\angle\mathrm{PAB}}{2\cos^2\angle\mathrm{PAB}} + \frac{1}{2\cos\angle\mathrm{BAP}\cdot\tan\angle\mathrm{PAB}} \\ &= \underline{\frac{\sin\angle\mathrm{PAB}}{2-2\sin^2\angle\mathrm{PAB}} + \frac{1}{2\sin\angle\mathrm{PAB}}}\end{aligned}$$

(2) $\sin\angle\mathrm{PAB} = t$ とおくと

$$\mathrm{QR} = \frac{t}{2(1-t^2)} + \frac{1}{2t} = \frac{t^2+(1-t^2)}{2t(1-t^2)} = \frac{1}{2t(1-t^2)}$$

となる。したがって QR が最小のとき $2t(1-t^2)$ が最大になるとわかる。

$f(t) = 2t(1-t^2)$ とおくと $f'(t) = 2-6t^2$ であるから $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ が極値となる。

また $\mathrm{BP} = \mathrm{AB}\tan\angle\mathrm{PAB} = \tan\angle\mathrm{PAB}$ と $0 < \mathrm{BP} \leq 1$ より $0^\circ < \angle\mathrm{PAB} \leq 45^\circ$ なので $0 < t \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ がわかる。

したがって $0 < t \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で $f(t)$ は極小値をとらず極大値をとるので $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときが求める値となる。

このとき $\mathrm{QR} = \dfrac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

　k を整数とし、n を 3 で割った余りで分類する。
$n=3k$ のとき $n^3-7n+9=27k^3-21k+9=3(9k^3-7k+3)$,
$n=3k+1$ のとき $n^3-7n+9=27k^3+27k^2-12k+3=3(9k^3+9k^2-4k+1)$,
$n=3k+2$ のとき $n^3-7n+9=27k^3+54k^2+15k+3=3(9k^3+18k^2+5k+1)$
であるので
すべての整数について n^3-7n+9 は 3 で割り切れる。
したがってこの値が素数になる場合、考えられる値は 3 のみであることがわかるので
$n^3-7n+9=3$ を解けばよい。
$n^3-7n+6=(n-1)(n-2)(n+3)=0$ より、求める値は、$\underline{n=1,2,-3}$

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ がわかる。

また AC=BD から $|\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{b}|$、AD=BC から $|\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{b}|$ がわかるので、それぞれを 2 乗して内積の形式に整理すると

$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}, |\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$ となる。

したがって $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2\right), \vec{b}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2\right)$ となるので

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \vec{b}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2\right)+\frac{1}{4}\left(|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2\right)-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2=0
\end{aligned}
$$

となり、AB と PQ が垂直であることがわかる。

(2) 同様に計算すると

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= (\vec{d}-\vec{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}|\vec{c}|^2+\frac{1}{2}|\vec{d}|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2\right)-\frac{1}{4}\left(|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2\right)-\frac{1}{2}|\vec{c}|^2+\frac{1}{2}|\vec{d}|^2=0
\end{aligned}
$$

であるので、CD と PQ も垂直であることがわかる。

したがって直線 PQ に R で直交する面上の点 E は媒介変数 s,t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表せる。$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=u\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とすると

$$
\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \left(\frac{1}{2}+s-\frac{1}{2}u\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{2}u-t\right)\vec{c}+\left(\frac{1}{2}u+t\right)\vec{d}
$$

となる。E が四面体に含まれるとき

$0\leq\dfrac{1}{2}+s-\dfrac{1}{2}u, 0\leq t+\dfrac{1}{2}u, 0\leq\dfrac{1}{2}u-t, 0\leq\dfrac{1}{2}+s+\dfrac{1}{2}u\leq 1$ となる。

これより $\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{2}\leq s\leq\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}u, -\dfrac{1}{2}u\leq t\leq\dfrac{1}{2}u$ となるので、

位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AR}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が四面体に含まれることと

位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AR}}-s\overrightarrow{\mathrm{AB}}-t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が四面体に含まれることは同値となる。

また α が PQ を通ることからこれらは α からみて異なる側に位置する。

これを利用すると R を通り PQ に垂直な平面における四面体の切り口は α によって合同な 2 図形に分割されることがわかり、全体の体積も等しくなることが示せる。

$\boxed{5}$

(1) X_n がとりうる最大値を考える。この場合はすべての操作で 0 を取り出し、$1, 2, \cdots, n$ の球を新たに入れた場合に限られる。
これ以外の場合、n が書かれている球が入らなくなることから最大値は n 未満となり、最大値以下の球は最低でも 1 個あるので上で考えた値より X_n は小さくなる。
したがって X_n の最大値は $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である。
$\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{(n+2)(n-1)}{2} = 1$ であるので、
$X_n \geq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ となる場合は $X_n = \sum_{k=1}^{n} k$ の場合か
$X_n = \sum_{k=1}^{n-1} k + (n-1)$ の場合に限られる。
$X_n = \sum_{k=1}^{n} k$ となる場合はすべての操作で 0 を取り出した場合で
$X_n = \sum_{k=1}^{n-1} k + (n-1)$ となる場合は $n-1$ 回目まですべて 0 を取り出し n 回目で $n-1$ を取り出した場合に限られる。
したがって求める確率は、$\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n-1)!} \cdot \dfrac{1}{n} = \underline{\dfrac{2}{n!}}$

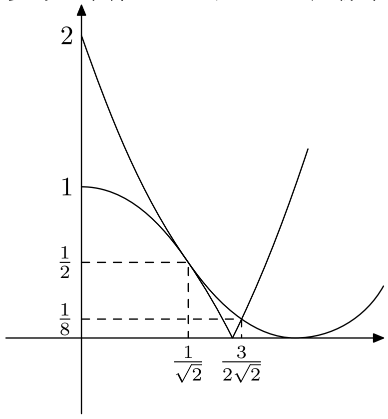
(2) X_n がとりうる最小値を考える。この場合は 2 回目以降すべての操作で 1 を取り出し、1 の球が n 個入った場合になる。
これ以外の場合 2 以上の球が追加されるので最小にならない。
したがって X_n の最小値は n である。
$X_n = n+1$ となる場合は 2 回目以降で 1 度だけ 0 を取り出し他はすべてで 1 を取り出した場合である。
したがって求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)!}{n!} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-2)!}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{k-1}{k+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n-2}{n} \right) \\ = \quad & \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \underline{\frac{2}{n}} \end{aligned}$$

所感

$\boxed{\mathbf{1}}$

　放物線と絶対値を用いた微積分の問題です。
条件を順に読み解いていって値を明らかにしていけば難しくはないです。
ただ、少々面倒な数値が出てきますので計算間違いには気を付けましょう。
参考：条件をみたすときの座標平面



$\boxed{\mathbf{2}}$

　三角比と三次関数を利用した問題です。少々難しいと思います。
(1) は単純に計算すると cos や tan も出てきますので、相互関係を駆使して変形しましょう。
(2) は逆数に着目するとやりやすいです。

$\boxed{\mathbf{3}}$

　京都大らしい、短くそれでいて解きがいのある整数問題です。
3 の倍数に着目できるかどうかが最大の分かれ目となるでしょう。
$n^3 - 7n + 9 = n(n+1)(n-1) + 3(3-2n)$ に気付くとすぐに導くことができます。
あとは方程式を解くだけですが n は負でも構わないことに注意しましょう。

$\boxed{\mathbf{4}}$

　立体図形を用いた問題です。説明能力が問われる難問です。
(1) は今年の共通テストで見たような気がする内容です。この問題ではベクトルを使っています。

後のことも考えるとベクトルで解くのがよさそうですが幾何的に「三角形 ACD と三角形 BDC が合同」「したがって AQ=BQ なので三角形 AQB は二等辺三角形」「だから線分 PQ は AB に垂直」と解き進めることもできます。
(2) は (1) を利用せずに解く方法も存在する気がします。この解答では (1) から CD と PQ も垂直であることも示せる、ということに気付き PQ に垂直な平面の位置ベクトルは PQ との交点 R を基準に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を使って表せることを利用しています。
どのような方法でも、最終的に「切られた立体は PQ を軸に 180 度回転させると重なる」ということを示すことになります。

$\boxed{\mathbf{5}}$

問題文が長い確率の問題です。長いですがそこまで難しくないです。
X_n のとりうる値を考えることがこの問題最大の手がかりとなります。
そうすると (1)(2) どちらの場合もとりうる X_n は 2 通りになり、あとはそれがどのような場合かを示すことで解答を導けます。