問題

第 1 問

関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + \cos x (0 < x < \pi)$ の増減表をつくり、$x \to +0, x \to \pi - 0$ のときの極限を調べよ。

第 2 問

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ で定める。

(1) $n \geq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

第 3 問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A(1,0) を考える。$k > 0$ を実数とする。点 P が C 上を動き、点 Q が線分 OA 上を動くとき、$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。
$S(k), \lim_{k \to +0} S(k), \lim_{k \to \infty} S(k)$ を求めよ。

第 4 問

$a > 0$ とし $f(x) = x^3 - 3a^2x$ とおく。次の 2 条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。
条件 1 ：方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。
条件 2 ：さらに方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 P(z) は C 上にあり、点 A(1) とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を Q(u) とする。$w = \dfrac{1}{1-u}$ とおき、w と共役な複素数を $\bar{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\bar{w}}{w}$ を z についての整式として表し、絶対値の商 $\dfrac{|w+\bar{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 P(z) が C' 上を動くときの点 R(w) の軌跡を求めよ。

第 6 問

座標空間内の 4 点 O(0,0,0),A(1,0,0),B(1,1,0),C(1,1,1) を考える。
$\dfrac{1}{2} < r < 1$ とする。点 P が線分 OA,AB,BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球 (内部を含む) が通過する部分を、それぞれ V_1, V_2, V_3 とする。

(1) 平面 $y = t$ が V_1, V_3 双方と共通点をもつような t の範囲を与えよ。さらに、この範囲の t に対し、平面 $y = t$ と V_1 の共通部分をよび、平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。

(3) r は (2) の条件をみたすとする。V_1 の体積を S とし、V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする、V_1, V_2, V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S, T を用いて表せ。

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする。S, T を求め、V の体積を求めよ。

解答

第 1 問

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{x\cos x}{\sin^2 x} - \sin x = \frac{\sin x - x\cos x - \sin^3 x}{\sin^2 x}$$

$= \dfrac{\sin x(1-\sin^2 x) - x\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}(\sin x\cos x - x)$ である。

$g(x) = \sin x\cos x - x$ とおくと

$g'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = \cos 2x - 1$ となる。

いま $0 < x < \pi$ で考えているので $g'(x) < 1$ となり、すなわち $g(x)$ は単調減少であるから $g(x) < g(0) = 0$ となる。したがって $0 < x < \pi$ において $f'(x) = 0$ となるとき $\cos x = 0$ である場合に限られるので x は $\dfrac{\pi}{2}$ のみとわかる。

したがって増減は以下のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

また $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ を利用すると $\lim_{x\to +0} f(x) = \underline{2}$ であり,

$x \to \pi - 0$ で $\sin x \to +0$ であるので $\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \underline{+\infty}$ がわかる。

第 2 問

(1)

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}}\cdot\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}\cdot\frac{(n-1)!n!}{(2n-1)!}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \frac{(2n+1)\cdot 2n}{(n+1)\cdot n\cdot n} = \frac{2\cdot(2n+1)}{n(n+1)}\end{aligned}$$

となる。

$2n+1=2(n+1)-1$ であるので $2n+1$ と n は互いに素であり、また $2n+1$ と $n+1$ も互いに素である。

また、$n(n+1)$ は連続した整数の積であるので偶数であるので 2 で割り切れる。

したがって $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$ と表せ、これが既約の形式になるので

$\underline{p_n = \dfrac{n(n+1)}{2}, q_n = 2n+1}$

(2) $a_1 = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{1!} = 3$ である。(1) より

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1\\ &= \frac{q_n\cdot q_{n-1}\cdot\cdots\cdot q_2\cdot 3}{p_n\cdot\cdots\cdot p_2}\end{aligned}$$

と表される。したがって a_n は適当な奇数を整数で割った形式であるので $p_2,\cdots,p_n$ に偶数が含まれると整数にならない。

ここで $p_3=6$ であるので a_n は $n\geq 3$ のときは整数にならないことがわかる。

したがって $a_2 = \dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{2!} = 5$ であるので求める値は $\underline{n=1,2}$

第 3 問

　P の座標を (s, s^2),Q の x 座標を t とおく。このとき
$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(kt + \dfrac{s}{k}, \dfrac{s^2}{k}\right)$ と表される。
R の x 座標が a であるとき a のとりうる値は $-\dfrac{1}{k} \leq a \leq k + \dfrac{1}{k}$ であり
s のとりうる値を考えると $s = k(a - kt)$ であることから
$k(a-k) \leq s \leq ka$ であることがわかる。
これより $\dfrac{s^2}{k}$ の最小値は $0 < a < k$ のとき 0 であり
$a \leq 0$ のとき ka^2 であり $k \leq a$ のとき $k(a-k)^2$ であることがわかる。
また $-1 < k(a-k)$ かつ $ka < 1$ のとき $k - \dfrac{1}{k} < a < \dfrac{1}{k}$ であることと
$|a-k| \leq |a|$ と $a \geq \dfrac{k}{2}$ が同値であることから
$\dfrac{s^2}{k}$ の最大値は $0 < k < \sqrt{2}$ でかつ $k - \dfrac{1}{k} < a \leq \dfrac{k}{2}$ のとき $k(a-k)^2$ であり
$0 < k < \sqrt{2}$ でかつ $\dfrac{k}{2} \leq a < \dfrac{1}{k}$ のとき ka^2 であり
それ以外のとき $\dfrac{1}{k}$ であるので、
$0 < k \leq 1$ のときは

$$
\begin{aligned}
S(k) &= \int_{-\frac{1}{k}}^{k-\frac{1}{k}} \left\{\frac{1}{k} - ka^2\right\} da + \int_{k-\frac{1}{k}}^{0} \{k(k-a)^2 - ka^2\} da + \int_{0}^{\frac{k}{2}} \{k(a-k)^2\} da \\
&\quad + \int_{\frac{k}{2}}^{k} ka^2 da + \int_{k}^{\frac{1}{k}} \{ka^2 - k(a-k)^2\} da + \int_{\frac{1}{k}}^{k+\frac{1}{k}} \left\{\frac{1}{k} - k(a-k)^2\right\} da \\
&= \left[\frac{a}{k} - \frac{ka^3}{3}\right]_{-\frac{1}{k}}^{k-\frac{1}{k}} + \left[-\frac{k(k-a)^3}{3} - \frac{ka^3}{3}\right]_{k-\frac{1}{k}}^{0} + \left[\frac{k(a-k)^3}{3}\right]_{0}^{\frac{k}{2}} \\
&\quad + \left[\frac{ka^3}{3}\right]_{\frac{k}{2}}^{k} + \left[\frac{ka^3}{3} - \frac{k(a-k)^3}{3}\right]_{k}^{\frac{1}{k}} + \left[\frac{a}{k} - \frac{k(a-k)^3}{3}\right]_{\frac{1}{k}}^{k+\frac{1}{k}} \\
&= 1 - \frac{1}{3k^2} + \left(-\frac{k^4}{3} + \frac{1}{3k^2}\right) + \frac{7k^4}{24} + \frac{7k^4}{24} + \left(\frac{1}{3k^2} - \frac{k^4}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3k^2}\right) \\
&= \underline{2 - \frac{k^4}{12}}
\end{aligned}
$$

であり、$1 < k < \sqrt{2}$ のときは

$$\begin{aligned}
S(k) &= \int_{-\frac{1}{k}}^{0} \left\{ \frac{1}{k} - ka^2 \right\} da + \int_{0}^{k-\frac{1}{k}} \frac{1}{k} da + \int_{k-\frac{1}{k}}^{\frac{k}{2}} \{k(a-k)^2\} da \\
&\quad + \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}} ka^2 da + \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{k} da + \int_{k}^{k+\frac{1}{k}} \left\{ \frac{1}{k} - k(a-k)^2 \right\} da \\
&= \left[\frac{a}{k} - \frac{ka^3}{3} \right]_{-\frac{1}{k}}^{0} + \left[\frac{a}{k} \right]_{0}^{k-\frac{1}{k}} + \left[\frac{k(a-k)^3}{3} \right]_{k-\frac{1}{k}}^{\frac{k}{2}} \\
&\quad + \left[\frac{ka^3}{3} \right]_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}} + \left[\frac{a}{k} \right]_{\frac{1}{k}}^{k} + \left[\frac{a}{k} - \frac{k(a-k)^3}{3} \right]_{k}^{k+\frac{1}{k}} \\
&= \frac{2}{3k^2} + \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) + \left(-\frac{k^4}{24} + \frac{1}{3k^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{3k^2} - \frac{k^4}{24} \right) + \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3k^2} \right) \\
&= \underline{2 - \frac{k^4}{12}}
\end{aligned}$$

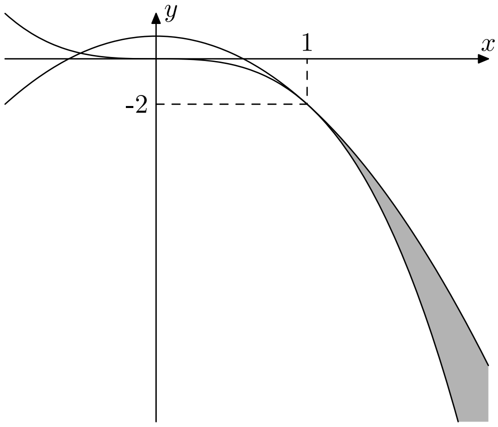
であり、$\sqrt{2} \leq k$ のときは

$$\begin{aligned}
S(k) &= \int_{-\frac{1}{k}}^{0} \left\{ \frac{1}{k} - ka^2 \right\} da + \int_{0}^{k} \frac{1}{k} da + \int_{k}^{k+\frac{1}{k}} \left\{ \frac{1}{k} - k(a-k)^2 \right\} da \\
&= \left[\frac{a}{k} - \frac{ka^3}{3} \right]_{-\frac{1}{k}}^{0} + \left[\frac{a}{k} \right]_{0}^{k} + \left[\frac{a}{k} - \frac{k(a-k)^3}{3} \right]_{k}^{k+\frac{1}{k}} \\
&= \frac{2}{3k^2} + 1 + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3k^2} \right) = \underline{\frac{4}{3k^2} + 1}
\end{aligned}$$

となる。したがって、$\underline{\lim_{k \to 0} S(k) = 2, \lim_{k \to \infty} S(k) = 1}$

第 4 問

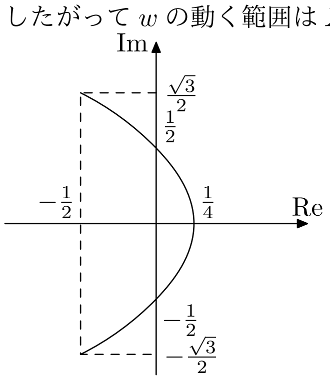
$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$ であるので $a > 0$ より $f(x)$ は極大値 $f(-a) = 2a^3$、極小値は $f(a) = -2a^3$ をとる。
したがって $f(x)$ が 3 個の実数解をもち $\beta > 1$ であるならば $a > 1$ であり $f(a) < b < f(1)$ がわかる。
これより求める条件は $\underline{a > 1, -2a^3 < b < 1 - 3a^2}$ であり、図は以下のようになる。



第 5 問

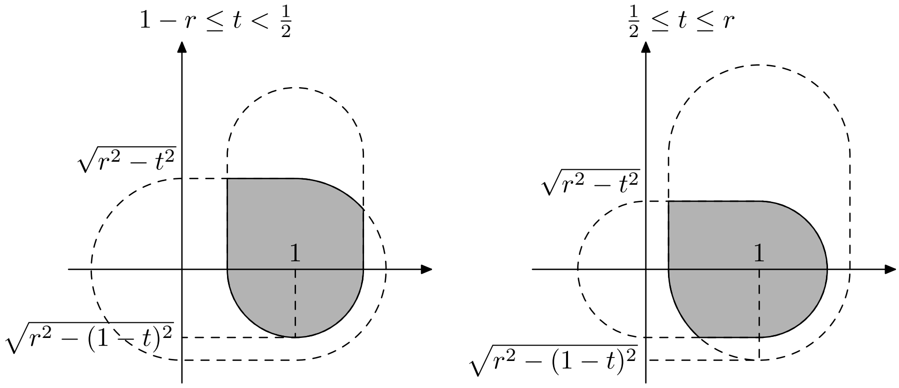
(1) 線分 AQ の中点を B, 原点を O とすると
直線 PB は AQ と OP に垂直なので $z-\dfrac{u+1}{2}$ は $u-1$ の純虚数倍であり、$u-1$ は z の実数倍である。
これより $u-1=kz$ と表すと $u=kz+1$ となり
$z-\dfrac{u+1}{2}=\left(1-\dfrac{k}{2}\right)z-1$ がわかる。
$k=0$ とするとこの値も 0 になることから $z=0$ となり不適。したがって
$\dfrac{\left(1-\frac{k}{2}\right)z-1}{kz}=\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{kz}$ が純虚数であるとわかるので
$\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{k\bar{z}}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{1}{kz}$
したがってこれに $2k$ をかけると $|z|^2=z\bar{z}=1$ も利用して
$(2-k)-2z=(k-2)+\dfrac{2}{z}$ となるので $k=2-\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ より
$u=\underline{-z^2+2z}$ となる。
また $w=\dfrac{1}{z^2-2z+1}$ であるので
$\dfrac{\bar{w}}{w}=\dfrac{z^2-2z+1}{\bar{z}^2-2\bar{z}+1}=\dfrac{z^2(z^2-2z+1)}{1-2z+z^2}=\underline{z^2}$ となる。
したがって $\dfrac{|w+\bar{w}-1|}{|w|}=\left|1+\dfrac{\bar{w}}{w}-\dfrac{1}{w}\right|=|2z|=\underline{2}$

(2) (1) の計算を用いると $w+\bar{w}-1=\dfrac{2z}{z^2-2z+1}=\dfrac{2}{z-2+\bar{z}}$ がわかる。
z の実部を x とおくと $2x=z+\bar{z}$ となるので
$w+\bar{w}-1=\dfrac{1}{x-1}$ がわかる。
したがって $w+\bar{w}=\dfrac{x}{x-1}$ となるので w の実部は $\dfrac{x}{2(x-1)}$ となり、
$-1\leq x\leq\dfrac{1}{2}$ であるので $w=X+Yi$ とおくと $-\dfrac{1}{2}\leq X\leq\dfrac{1}{4}$ となる。
また $2X-1=2\sqrt{X^2+Y^2}$ であるので $X=-Y^2+\dfrac{1}{4}$ がわかる。
したがって w の動く範囲は X の範囲を考慮すると以下のようになる。



第 6 問

(1) $y=t$ が V_1 と共通部分をもつとき $-r \leq t \leq r$ がわかる。
また V_3 と共通部分をもつとき $-r \leq 1-t \leq r$ より $1-r \leq t \leq 1+r$ がわかる。
したがって双方と共通部分をもつとき $\underline{1-r \leq t \leq r}$ が成り立つ。
またこのとき点 (x,t,z) が V_1 に含まれるときある実数 s において
$0 \leq s \leq 1, (x-s)^2+t^2+z^2 \leq r^2$ が成り立つ。
またこの点が V_3 に含まれるとき $0 \leq s \leq 1, (x-1)^2+(t-1)^2+(z-s)^2 \leq r^2$ が成り立つような s が存在する。
$(r^2-t^2)-\{r^2-(1-t)^2\}=1-2t$ であるから
$t \leq \dfrac{1}{2}$ のとき $r^2-t^2 \geq r^2-(1-t)^2$ であり
$\dfrac{1}{2} \leq t$ のとき $r^2-t^2 \leq r^2-(1-t)^2$ である。
したがって V_1, V_3 の共通部分は t の範囲により以下のようになる。



(2) V_1, V_3 の共通部分において、点 $(1,t,0)$ からもっとも離れた点は $\left(1-\sqrt{r^2-(1-t)^2}, t, \sqrt{r^2-t^2}\right)$ である。これが V_2 に含まれる条件を求めることになる。
平面 $y=t$ と v_2 との共通部分は $(x-1)^2+z^2 \leq r^2$ と表されるので、
$1-r \leq t \leq r$ であるすべての t について $\{r^2-(1-t)^2\}+(r^2-t^2) \leq r^2$ をみたす r の範囲を求めることになる。
この式を整理すると $r^2 \leq 2t^2-2t+1 = 2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$ となる。
いま $r > \frac{1}{2}$ であるので $1-r < \dfrac{1}{2} < r$ がわかり、$t=\dfrac{1}{2}$ をとりうるので
$r^2 \leq \dfrac{1}{2}$ となることが必要十分である。
したがって求める範囲は $\underline{\dfrac{1}{2} < r \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) V_2 の外部では V_1 と V_3 は重ならないので V は「V_2」「V_1 から V_2 を除いた部分」「V_3 から V_2 を除いた部分」に分割される。
V_1, V_2, V_3 は互いに合同であり $V_1 \cup V_2$ と $V_2 \cup V_3$ も互いに合同である

ことを利用すると
$V = S + (S - T) + (S - T) = \underline{3S - 2T}$ と求められる。

(4) V_1 は半径 r 高さ 1 の直円柱の底面に半径 r の半球を付けた形状なので
$S = \dfrac{4\pi}{3}r^3 + \pi r^2 = \underline{\dfrac{\pi}{3}(4r^3 + 3r^2)}$
また、V_1 と V_2 と平面 $z = s(-r \leq s \leq r)$ の共通部分は中心 $(1, 0, s)$、半径 $\sqrt{r^2 - s^2}$ の円の $\dfrac{3}{4}$ と一辺 $\sqrt{r^2 - s^2}$ の正方形を合わせたものであるから

$$\begin{aligned} T &= \int_{-r}^{r} \left\{ \frac{3\pi}{4}(r^2 - s^2) + (r^2 - s^2) \right\} ds = \left(\frac{3\pi}{4} + 1 \right) \int_{-r}^{r} (r^2 - s^2) ds \\ &= \left(\frac{3\pi}{4} + 1 \right) \left[r^2 s - \frac{s^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \underline{\left(\frac{4}{3} + \pi \right) r^3} \end{aligned}$$

したがって V の体積は $\pi(4r^3+3r^2) - 2r^3 \left(\dfrac{4}{3} + \pi \right) = \underline{\left(2\pi - \dfrac{8}{3} \right) r^3 + 3\pi r^2}$

所感

第 1 問

見た目は微分の基本を問う問題です。ただしちょっと工夫しないと何度も微分しないといけないのであなどれません。
なお、この解答における $g(x)$ については $2g(x) = \sin 2x - 2x$ が成り立ちますので、x が微小な正の値では $\sin x < x$ が成り立つことを利用して解き進めることもできます。

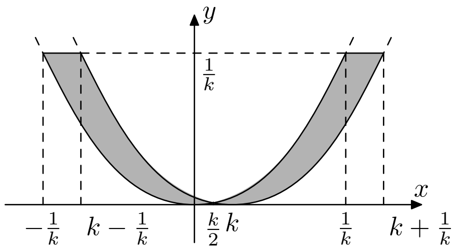
第 2 問

今年は多くの大学で出題された整数を利用した問題です。難しくはないです。
(1) は得られた値がちゃんと既約になることを証明しましょう。
$2n+1 = 2(n+1) - 1$ に気付きたい。
(2) は $a_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-1}$ を利用できないとたぶん解けません。a_n と a_{n-1} の大小関係から攻める方法もありそうですが q_n が奇数になることから偶数奇数に着目するとこの解答のような方式になります。

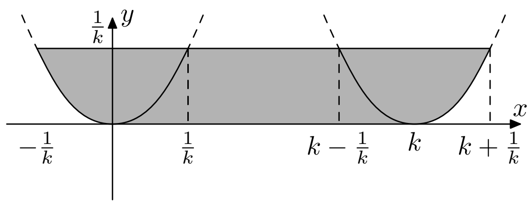
第 3 問

ベクトルと座標平面を利用した問題です。この解答のようにまじめに記述しようとすると長時間かかる難問です。
まずは Q を原点に固定して考えると R の軌跡は $y = kx^2 \left(-\dfrac{1}{k} \leq x \leq \dfrac{1}{k}\right)$ で表せますので、「放物線 $y = kx^2 \left(-\dfrac{1}{k} \leq x \leq \dfrac{1}{k}\right)$ を x 軸方向に 0 以上 k 以下の範囲で平行移動させたもの」と記述できれば十分だと思います。
また適宜図を用意して面積計算する、という手法も使えるでしょう。
参考:k における R の存在領域

$0 < k < \sqrt{2}$



$\sqrt{2} < k$



第 4 問

　３次関数の微分を利用した問題です。中程度よりは上でしょう。
条件を積み重ねていることに着目し、上の条件から範囲を絞り込みましょう。

第 5 問

　複素数平面に二次曲線が出てくる問題です。少々難しいと思います。
(1) は計算も少々面倒な上、なかなか直感的に出てこない結果が得られます。
(2) は $\dfrac{|w+\bar{w}-1|}{|w|}=2$ がすなわち $\left|\mathrm{Re}w-\dfrac{1}{2}\right|=|w|$ であることがわかると「焦点 0、準線 $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}$ の放物線」の一部であることが容易にわかります。どの範囲か、を示すのは面倒ですが。

第 6 問

　太い棒を折り曲げてできそうな図形を使った積分問題です。
(1) は記述が面倒ですがここを乗り切れば楽です。
(2) は (1) で図を出していますので「図から左上隅が V_2 に含まれるかどうかを考えればよい」と書けば十分でしょう。
(3) は図形の合同をうまく見つける必要がありますが、見つけやすいと思います。
(4) は単純な体積計算と積分です。T は平面 $z=s$ での切り口を考えれば計算しやすいです。